

Перевірку програмного забезпечення КФС можна реалізувати віддалено, оскільки КФС з'єднані з Інтернетом. Потрібно тільки забезпечити певний програмний сервіс, який дає змогу запустити процес перевірки.

Враховуючи результати проведеного аналізу характеристик КФС та їх компонент, запропоновано багаторівневу віддалену метрологічну перевірку КФС. За запропонованим алгоритмом компоненти КФС можуть перевірятися за вимогою будь-якої компоненти, підсистеми або системи загалом. Також процес метрологічної перевірки може ініціювати людина, у випадку, якщо є підозра у некоректній роботі КФС або прийшов час планової перевірки КФС.

### Література

1. Cyber-physische Systeme. [Electronic resource]. – Mode of access <http://www.enzyklopaedie-der-wirtschaftsinformatik.de/wi-enzyklopaedie/lexikon/informationssysteme/Sektorspezifische-Anwendungssysteme/cyber-physische-systeme>.
2. Ненов О.І. Проектування вбудованих комп'ютерних систем / О.І. Ненов. – Одеса, 2008. – 89 с.
3. Дорожовець М. Основи метрології та вимірювальної техніки / М. Дорожовець, В. Мотало, Б. Стадник, В. Василюк, Р. Борек, А. Ковальчик. – Т. 1. Основи метрології. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2005. – 532 с.
4. Поліщук Є.С. Метрологія та вимірювальна техніка / Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О. Яцук, В.М. Ванько, Т.Г. Бойко. – Львів : Вид-во "Бескид Біт", 2003. – 544 с.
5. Mahajan Ajay. Physical and Virtual Intelligent Sensors for Integrated Health Management Systems / Ajay Mahajan, Christopher Oesch, Haricharan Padmanaban, Lucas Utterback, Sanjeevi Chitikeshi, Fernando Figueroa // International journal on smart sensing and intelligent systems, September. – 2012. – Vol. 5, No. 3. – Pp. 559-575.

Надійшла до редакції 15.09.2016 р.

### Олескив О.М., Микитин І.П. Особенности метрологической проверки компонентов кибер-физических систем

Проанализированы особенности функционирования кибер-физических систем. Рассмотрена классификация первичных преобразователей и возможности их подключения к кибер-физическим системам. Учитывая результаты проведенного анализа характеристик кибер-физических систем и их компонентов, предложена многоуровневая удаленная метрологическая проверка кибер-физических систем, по которой компоненты кибер-физической системы могут проверяться по требованию интеллектуальных первичных преобразователей, подсистем, главной подсистемы управления или человека.

**Ключевые слова:** средство измерения, программное обеспечение, метрологическая проверка, кибер-физическая система, встроенная система управления, интеллектуальный первичный преобразователь.

### Oleskiv O.M., Mykityn I.P. The Features of Metrological Verification of Cyber-Physical Systems

This article presents the features of functioning the cyber-physical systems and their components. The analysis opportunity of sensors possible accession to embedded system control is examined. The classification by the sensors output signal type is considered. On the basis of the sensors classification concluded that the cyber-physical systems is most expedient to use intelligent sensors. According to the results of the analysis of the cyber-physical system and those components characteristics, a multilevel remote metrological verification of cyber-physical systems is proposed.

**Keywords:** measuring instrument, software, verification, cyber-physical system, embedded system control, intelligent sensor.

### УДК 519.876.5

## УДОСКОНАЛЕННЯ АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ "НАСИЧЕНОГО БЛОКУ" У ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

І.С. Олійник<sup>1,2</sup>

Розв'язано задачу верифікації методу параметричної ідентифікації інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) для різних початкових умов, зокрема, залежно від структури та кількості невідомих параметрів моделі; проаналізовано метод обчислення оцінки розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь, шляхом заміни усієї системи "насиченим блоком", сформованим із її інтервальних рівнянь; удосконалено алгоритм визначення "насиченого блоку" у задачі параметричної ідентифікації інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь шляхом нормування похибки вимірювання та показано ефективність такого вдосконалення для ряду тестових прикладів.

**Ключові слова:** інтервальна система лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР), редукція, еліпсоїдна оцінка, "насичений блок", "зашумлений" інтервал, абсолютна похибка, відносна похибка

**Вступ.** Для побудови математичних моделей статичних систем застосовують інтервальний та стохастичний підходи. У рамках інтервального підходу вирізняють розв'язування задач з точними та неточними (інтервальними) даними. Для того, щоб розв'язати задачу з неточними даними, потрібно на основі інтервального аналізу побудувати рівняння, сформувати із них інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) та знайти її розв'язки [1]. Відомо [2], що розв'язки ІСЛАР отримують у вигляді деякої множини, оцінивши яку, можна побудувати інтервальну модель. Серед способів оцінювання множини розв'язків ІСЛАР є, наприклад, метод локалізації області розв'язків багатовимірним еліпсоїдом [3]. Необхідною початковою умовою для роботи цього методу є сформований набір інтервальних рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих параметрів моделі. Такий блок рівнянь прийнято називати "насиченим блоком" [1]. Як правило, ІСЛАР містить більше рівнянь, ніж кількість параметрів моделі, тому для знаходження "насиченого блоку" використовують метод редукції, алгоритм якого наведено у праці [4]. Результатами досліджень, опублікованих у праці [4] доведено, що проблемною ітерацією методу редукції є вибір початкового набору інтервальних рівнянь у такий спосіб, щоб забезпечити мінімальні розміри області локалізації множини розв'язків усієї ІСЛАР. Для вирішення цієї проблеми автори [4] запропонували метод формування субоптимального "насиченого блоку" та його застосування для задачі прогнозування генерованої електроенергії малою гідроелектростанцією. Однак актуальною залишається задача верифікації цього методу для різних початкових умов, зокрема, залежно від структури та кількості невідомих параметрів моделі, що і є метою цього дослідження.

Постановка задачі. Залежність між "виходом" та "входами" для статичної системи описують у вигляді алгебричного рівняння [2]

<sup>1</sup> аспірант. І.С. Олійник – Тернопільський національний економічний університет;

<sup>2</sup> наук. керівник: проф. М.П. Дивак, д-р техн. наук – Тернопільський національний економічний університет.

$$y_0 = \beta_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \dots + \beta_m \cdot \varphi_m(\bar{x}), \quad (1)$$

де:  $y_0$  – істинне невідоме значення "виходу" системи;  $\bar{x} \in R^m$  – вектор вхідних змінних;  $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$  – вектор невідомих параметрів,  $\vec{\varphi}^T(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}))^T$  – вектор відомих базисних функцій.

Результати експерименту представляють матрицею значень вхідних змінних  $X$  та вектором інтервальних значень вихідної змінної  $[\vec{Y}]$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \dots x_{1m} \\ \vdots \\ x_{i1} \dots x_{im} \\ \vdots \\ x_{N1} \dots x_{Nm} \end{pmatrix}; [\vec{Y}] = \begin{pmatrix} [y_1^-, y_1^+] \\ \vdots \\ [y_i^-, y_i^+] \\ \vdots \\ [y_N^-, y_N^+] \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Щоб оцінити вектор невідомих параметрів  $\vec{\beta}$ , потрібно забезпечити умову

$$y_i^- \leq y_{oi} \leq y_i^+. \quad (3)$$

Звідси формують інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь [2]:

$$\begin{cases} y_1^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq y_1^+ \\ \vdots \\ y_i^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq y_i^+ \\ \vdots \\ y_N^- \leq b_1 \varphi_1(\bar{x}_N) + \dots + b_m \varphi_m(\bar{x}_N) \leq y_N^+ \end{cases}. \quad (4)$$

Розв'язки ІСЛАР (4) отримують у вигляді множини  $\Omega$  [2]

$$\Omega = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid \vec{Y}^- \leq F \cdot \vec{b} \leq \vec{Y}^+ \right\}, \quad (5)$$

де:  $F = \{\varphi_j(\bar{x}_i), i=1, \dots, N, j=1, \dots, m\}$  – відома матриця значень базисних функцій;  $\vec{Y}^- = \{y_i^-, i=1, \dots, N\}$  та  $\vec{Y}^+ = \{y_i^+, i=1, \dots, N\}$  – вектори, сформовані з верхніх та нижніх меж інтервалів  $[y_i^-, y_i^+]$ .

Виділену із ІСЛАР (4) ІСЛАР із кількістю інтервальних рівнянь, що збігається із кількістю невідомих параметрів, називають "насиченим блоком" [1]. Матрицю значень базисних функцій для "насиченого блоку" позначають  $F_m$ , а область розв'язків такої системи –  $\Omega_m$  [1].

Алгоритм редукції ІСЛАР на основі її "насиченого блоку", описаний у праці [4], передбачає, зокрема:

1. Вибір із ІСЛАР (4)  $m$  рівнянь, що утворюють сумісну систему, тобто формування матриці  $F_m$ . Розв'язком цієї системи є область  $\Omega_m$ , яка геометрично має вигляд паралелогра, вершини якого обчислюють за такою формулою:

$$\vec{b}_s = F_m^{-1} \cdot \vec{Y}_s \quad (6)$$

де  $\vec{Y}_s$  – вектор, складений з межових значень інтервалів  $[y_i^-, y_i^+], i=1, \dots, N$ .

У відомому методі задача формування матриці  $F_m$  є задачею планування  $I_D$ -оптимального експерименту [5]:

$$\left( \prod_{i=1}^m (y_i^+ - y_i^-)^2 \right) \cdot \det(F_m \cdot F_m^T)^{-1} \xrightarrow{F_m} \min, \quad (7)$$

де:  $F_m = \{\vec{\varphi}^T(\bar{x}_i), i=1, \dots, m\}$ ;  $\bar{x}_i \in X$  – стовпчик матриці  $X$ .

2. Обчислення характеристик  $L_s(k)$  ( $L'_s(k)$ ) для усіх вершин паралелогра на підставі формул:

$$L_s(k) = y_{k+1}^- - \vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k), \quad (8)$$

$$L'_s(k) = \vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{b}_s(k) - y_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1}, \quad (9)$$

де:  $\bar{x}_{k+1}$  – вектор вхідних значень у  $k+1$  спостереженні, що визначає  $k+1$  рівняння у системі (4);  $y_{k+1}^-, y_{k+1}^+$  – нижня та верхня межі інтервалів "виходу" у  $k+1$  спостереженні;  $\Delta_{k+1} = y_{k+1}^+ - y_{k+1}^-$ .

3. Обчислення  $\delta_i^-(k+1)$  та  $\delta_i^+(k+1)$ , відповідно, за формулами:

$$\delta_i^-(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \text{ якщо } L_s(k) > 0, s=1, \dots, 2^{m-1} \wedge (\vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \\ \wedge (\exists L_s(k) < 0, s=1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L_s(k) \leq 0 \end{cases}; \quad (10)$$

$$\delta_i^+(k+1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{L'_s(k) / |\vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i|\}, \text{ якщо } L'_s(k) > 0, s=1, \dots, 2^{m-1} \wedge (\vec{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \vec{f}_i \neq 0) \\ \wedge (\exists L'_s(k) < 0, s=1, \dots, 2^m) \\ 0, \text{ якщо } L'_s(k) \leq 0 \end{cases}. \quad (11)$$

4. Обчислення меж інтервалу  $[y_i^-(k+1); y_i^+(k+1)]$  за формулою

$$y_i^-(k+1) = y_i^-(k) + \delta_i^-(k+1), \quad y_i^+(k+1) = y_i^+(k) - \delta_i^+(k+1), \quad i=1, \dots, m. \quad (12)$$

5. Якщо  $k \leq N - m$ , то перехід на крок 2. У протилежному випадку завершення процедури.

Як бачимо із наведеного алгоритму, фактично метод здійснює редукцію інтервальних рівнянь ІСЛАР, залишаючи тільки модифіковані за формулою (12) інтервальні рівняння "насиченого блоку".

Розглянутий вище метод локалізації розв'язків ІСЛАР має низку переваг порівняно із існуючими. Зокрема, дає змогу отримати в явному вигляді гарантовану еліпсоїдну оцінку області розв'язків ІСЛАР [3]:

$$\Omega_m(k+1) = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid (\vec{b} - \vec{b}(k+1))^T \cdot F^T \cdot E^{-2}(k+1) \cdot F \cdot (\vec{b} - \vec{b}(k+1)) = 1 \right\}, \quad (13)$$

де:  $\vec{b}(k+1) = F_m^{-1} \cdot ((y_1^+(k+1) - y_1^-(k+1)), \dots, (y_m^+(k+1) - y_m^-(k+1)))^T$  – вектор, який задає центр еліпсоїда;

$E(k+1) = \text{diag} (y_1^+(k+1) - y_1^-(k+1), \dots, y_1^+(k+1) - y_1^-(k+1), \dots, y_m^+(k+1) - y_m^-(k+1))$  – діагональна матриця різниць меж інтервалів із виразу (13).

Коридор для інтервальних моделей, яким визначаються їхні прогностичні властивості, в цьому випадку матиме такий вигляд:

$$[\bar{y}(\bar{x})]_{\bar{b} \in Q_m} = [\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} - \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\bar{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in Q_m}; \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{b} + \frac{1}{2} \cdot \Delta_{\bar{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in Q_m}], \quad (14)$$

де  $\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in Q_m}$  – похибка прогнозування (ширина коридору), яку обчислюють за формулою

$$\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} |_{\bar{b} \in Q_m} = \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x})}. \quad (15)$$

У праці [4] показано, що ефективність процедури редукції ІСЛАР істотно залежить від вибору базових рівнянь, тобто "насиченого блоку". Тому автори [4] запропонували новий метод обчислення оцінки розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь, шляхом заміни усієї системи "насиченим блоком", сформованим із її інтервальних рівнянь. Процедура формування такого блоку передбачає послідовне уточнення набору інтервальних рівнянь "насиченого блоку" на основі аналізу прогностичних властивостей інтервальних моделей, побудованих із його розв'язків. Алгоритм методу реалізується за такою схемою:

Крок 1. Вибір "насиченого блоку" із ІСЛАР (4) (довільний).

Крок 2. Оцінка області розв'язків "насиченого блоку" за допомогою багатовимірного еліпсоїда (13) та побудова коридору інтервальних моделей за виразом (14).

Крок 3. Знаходження точки (16), в якій досягається максимальне значення похибки прогнозування інтервальних моделей на області вхідних змінних, заданих експериментальними даними (2)

$$\bar{x}^{\max} = \arg \max_{\bar{x}_i=1, \dots, N} \left\{ \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot (F_m^T \cdot E^{-2} \cdot F_m)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}_i)} \right\}. \quad (16)$$

Крок 4. Ітерація заміни кожного із  $m$  рівнянь "насиченого блоку" рівнянням ІСЛАР, що відповідає розв'язку (16), формування на цій основі  $m$  "насичених блоків" та знаходження  $m$  функцій для похибок прогнозування кожного набору моделі, відповідно до виразу (17)

$$\Delta^1_{y(\bar{x})}, \Delta^2_{y(\bar{x})}, \dots, \Delta^m_{y(\bar{x})}. \quad (17)$$

Крок 5. Вибір оптимального "насиченого блоку" за критерієм (18)

$$F_m^{opt} = \arg \min_{p=1, \dots, m} \left\{ \max_{\bar{x}_i=1, \dots, N} \left\{ \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot (F_{mp}^T \cdot E_p^{-2} \cdot F_{mp})^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x}_i)} \right\} \right\}. \quad (18)$$

Перехід на крок 2. Зауважимо, що при переході на 2 крок для отриманого "насиченого блоку" відомими будуть як область розв'язків, так і значення максимальної похибки, що істотно спрощує обчислення.

Послідовність кроків реалізують доти, поки на останньому кроці буде отримано "насичений блок", будь-яка зміна рівнянь якого не призводить до зменшення максимальної похибки прогнозування інтервальних моделей.

**Верифікація алгоритму визначення "насиченого блоку" у задачі параметричної ідентифікації ІСЛАР.** Методика проведення верифікації досліджу-

ваного методу ґрунтується на обчислювальному експерименті. Спочатку визначаємо істинну модель, яка зв'яже вхідну змінну із вихідною у вигляді (4). На наступному етапі імітуємо "інтервальне вимірювання", де межі інтервальних значень генеруються за формулами [1]:

$$y_i^- = y_0(x) + (e_i - \Delta) \cdot y_0(x), \quad (19)$$

$$y_i^+ = y_0(x) + (e_i + \Delta) \cdot y_0(x), \quad (20)$$

де:  $e_i$  – деяка випадкова похибка, яка задана на інтервалі  $\pm \Delta$ , а  $\Delta$  – похибка вимірювань.

Далі, на основі отриманих даних, формуємо таблицю та будуємо інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь, для якої застосовуємо досліджуваний метод вибору "насиченого блоку".

**Приклад 1.** Нехай задана лінійна модель у вигляді

$$y(x_i) = b_0 + b_1 \cdot x_i, \quad (21)$$

та задано значення вхідної змінної (табл. 1).

Табл. 1. Значення вхідної змінної

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i$	1	4	7	8	11	15	16	17	18	21	22	23	26	27	28	29	31	32	33	35

Нехай у виразі (21):  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = 3$ . Із використанням виразів (19), (20) проведемо імітаційний експеримент, з метою отримання таблиці експериментальних даних. При цьому встановимо, що похибка вимірювання  $\Delta = \pm 10\%$ , а  $-\Delta_i \leq e_i \leq \Delta_i$ . Результати імітаційного експерименту наведено у табл. 2.

Табл. 2. Таблиця зімітованих інтервальних даних

$i$	$x_i$	$y_0(x_i)$	$e_i$	$y_i^- = y_0(x) + e_i - \Delta$	$y_i^+ = y_0(x) + e_i + \Delta$
1	1	5	-0,10000	4	5
2	4	14	-0,06100	11,746	14,546
3	7	23	0,01700	21,091	25,691
4	8	26	-0,03000	22,620	27,820
5	11	35	0,06500	33,775	40,775
6	15	47	-0,06500	39,245	48,645
7	16	50	0,04200	47,100	57,100
8	17	53	-0,03900	45,633	56,233
9	18	56	-0,08200	45,808	57,008
10	21	65	-0,07100	53,885	66,885
11	22	68	0,09800	67,864	81,464
12	23	71	-0,07600	58,504	72,704
13	26	80	-0,09800	64,160	80,160
14	27	83	0,00633	75,22564	91,82564
15	28	86	0,02000	79,120	96,320
16	29	89	-0,06700	74,137	91,937
17	31	95	-0,00984	84,56492	103,5649
18	32	98	-0,08900	79,478	99,078
19	33	101	0,05700	96,657	116,857
20	35	107	0,00398	96,72533	118,1253

На основі отриманих даних сформуємо інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} 4 \leq b_0 + b_1 \leq 5 \\ 11,746 \leq b_0 + 4b_1 \leq 14,546 \\ 21,091 \leq b_0 + 7b_1 \leq 25,691 \\ 22,62 \leq b_0 + 8b_1 \leq 27,82 \\ 33,775 \leq b_0 + 11b_1 \leq 40,775 \\ 39,245 \leq b_0 + 15b_1 \leq 48,645 \\ 47,1 \leq b_0 + 16b_1 \leq 57,1 \\ 45,633 \leq b_0 + 17b_1 \leq 56,233 \\ 45,808 \leq b_0 + 18b_1 \leq 57,008 \\ 53,885 \leq b_0 + 21b_1 \leq 66,885 \\ 67,864 \leq b_0 + 22b_1 \leq 81,464 \\ 58,504 \leq b_0 + 23b_1 \leq 72,704 \\ 64,16 \leq b_0 + 26b_1 \leq 80,16 \\ 75,22564 \leq b_0 + 27b_1 \leq 91,82564 \\ 79,12 \leq b_0 + 28b_1 \leq 96,32 \\ 74,137 \leq b_0 + 29b_1 \leq 91,937 \\ 84,56492 \leq b_0 + 31b_1 \leq 103,5649 \\ 79,478 \leq b_0 + 32b_1 \leq 99,078 \\ 96,657 \leq b_0 + 33b_1 \leq 116,857 \\ 96,72533 \leq b_0 + 35b_1 \leq 118,1253 \end{cases} \quad (22)$$

Реалізуємо для цієї системи метод вибору оптимального "насиченого блоку". На першому кроці оберемо довільний "насичений блок", наприклад у вигляді

$$\begin{cases} 4 \leq b_0 + b_1 \leq 5 \\ 11,746 \leq b_0 + 4b_1 \leq 14,546 \end{cases} \quad (23)$$

Оцінимо область розв'язків "насиченого блоку" (23) за допомогою багатовимірного еліпсоїда (13) та побудуємо коридор інтервальних моделей за виразом (14). Прогнозовані значення ширини коридору відобразимо у табл. 3 та на рис. 1.

Табл. 3. Коридор інтервальних моделей (21) з оцінками параметрів, обчисленими з ІСЛАР (23)

$i$	$x_i$	$y_0(x_i)$	$\hat{y}_i^-$	$\hat{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)} = \hat{y}_i^+ - \hat{y}_i^-$
1	1	5	4	5	1,00
2	4	14	11,746	14,546	2,80
3	7	23	18,94771	24,63629	5,69
4	8	26	21,3400	28,00800	6,67
5	11	35	28,50971	38,13029	9,62

6	15	47	38,06231	51,63369	13,57
7	16	50	40,44989	55,01011	14,56
8	17	53	42,83733	58,38667	15,55
9	18	56	45,22465	61,76335	16,54
10	21	65	52,38608	71,89392	19,51
11	22	68	54,77310	75,27090	20,50
12	23	71	57,16006	78,64794	21,49
13	26	80	64,32071	88,77929	24,46
14	27	83	66,70753	92,15647	25,45
15	28	86	69,09432	95,53368	26,44
16	29	89	71,48109	98,91000	27,43
17	31	95	76,25456	105,6654	29,41
18	32	98	78,64127	109,0427	30,40
19	33	101	81,02796	112,4200	31,39
20	35	107	85,80131	119,1747	33,37

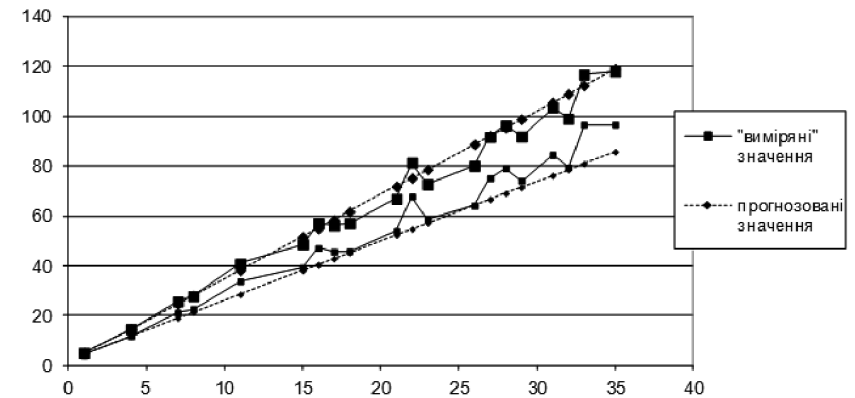


Рис. 1. Зіставлення коридору інтервальних моделей (21) з "експериментальними" даними табл. 3

Відповідно до алгоритму реалізації методу за формулою (16) знайдемо точку, в якій досягається максимальне значення похибки прогнозування інтервальних моделей на області вхідних змінних –  $\bar{x}_i^{\max}(i = 20)$ . На другій ітерації скомбінуємо рівняння "насиченого блоку" (23) з рівнянням, отриманим із виразу (16). Отримаємо нові набори рівнянь для субоптимальних "насичених блоків":

$$\begin{cases} 4 \leq b_0 + b_1 \leq 5 \\ 96,72533 \leq b_0 + 35b_1 \leq 118,1253 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} 11,746 \leq b_0 + 4b_1 \leq 14,546 \\ 96,72533 \leq b_0 + 35b_1 \leq 118,1253 \end{cases} \quad (25)$$

Оцінимо область розв'язків та побудуємо коридор інтервальних моделей для "насиченого блоку" (24) та (25), відповідно. Прогнозовані значення ширини коридору відобразимо у табл. 4 та на рис. 2, 3.

Табл. 4. Коридор інтервальних моделей (21) з оцінками параметрів, обчисленими з ІСЛАР (24) та (25)

I	$x_i$	$y_0(x_i)$	"Насичений блок" (24)			"Насичений блок" (25)		
			$\hat{y}_i^-$	$\hat{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$	$\hat{y}_i^-$	$\hat{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$
1	1	5	4	5	1,00	2,170187	5,874204	3,70
2	4	14	12,53323	14,63007	2,10	11,74600	14,54600	2,80
3	7	23	20,73068	24,59590	3,87	20,63542	23,90419	3,27
4	8	26	23,45207	27,92894	4,48	23,46906	27,15308	3,68
5	11	35	31,60537	37,93894	6,33	31,78678	37,08298	5,30
6	15	47	42,46533	51,29669	8,83	42,69722	50,50268	7,81
7	16	50	45,17938	54,63707	9,46	45,41134	53,87110	8,46
8	17	53	47,89320	57,97768	10,08	48,12236	57,24262	9,12
9	18	56	50,60683	61,31849	10,71	50,83090	60,61662	9,79
10	21	65	58,74683	71,34178	12,59	58,94586	70,74926	11,80
11	22	68	61,45994	74,68310	13,22	61,64826	74,12940	12,48
12	23	71	64,17297	78,02450	13,85	64,34969	77,51051	13,16
13	26	80	72,31163	88,04913	15,74	72,44949	87,65831	15,21
14	27	83	75,02441	91,39078	16,37	75,14825	91,04209	15,89
15	28	86	77,73714	94,73248	17,00	77,84655	94,42633	16,58
16	29	89	80,44983	98,07000	17,62	80,54443	97,81000	17,27
17	31	95	85,87511	104,7578	18,88	85,93915	104,5813	18,64
18	32	98	88,58770	108,0996	19,51	88,63606	107,9670	19,33
19	33	101	91,30027	111,4415	20,14	91,33271	111,3528	20,02
20	35	107	96,72533	118,1253	21,40	96,72533	118,1253	21,40

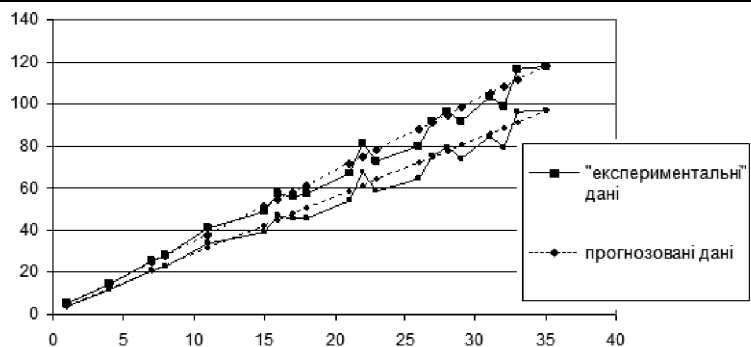


Рис. 2. Зіставлення коридору інтервальних моделей (21) з "експериментальними" даними табл. 4 ("насичений блок" (24))

Далі, згідно з алгоритмом реалізації методу, потрібно за критерієм (19) визначити оптимальний "насичений блок". У нашому випадку існує два рівнозначних блоки, що задовольняють цю умову, тому для них можна застосовувати алгоритм редукції.

Грунтуючись на взаємозв'язку між методом вибору насиченого блоку та методом редукції, показником визначення ефективності вважатимемо кількість результативних ітерацій, тобто тих, коли необхідно було здійснювати обчислення на 3–4-му кроці алгоритму редукції. Отже, застосуємо алгоритм редукції для насиченого блоку (24). Результати обчислень показали, що у цьому випадку, потрібно було здійснити 5 результативних ітерацій.

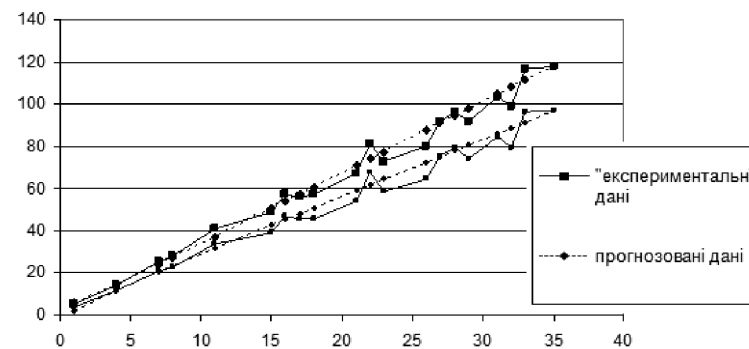


Рис. 3. Зіставлення коридору інтервальних моделей (21) з "експериментальними" даними табл. 4 ("насичений блок" (25))

Розв'яжемо аналогічну задачу для насиченого блоку (25). У цьому випадку алгоритму редукції для виведення розв'язку необхідно було здійснити 10 результативних ітерацій. Зіставлення коридору інтервальної моделі (21) з "експериментальними" даними після редукції для описаних вище випадків зображено на рис. 4, 5.

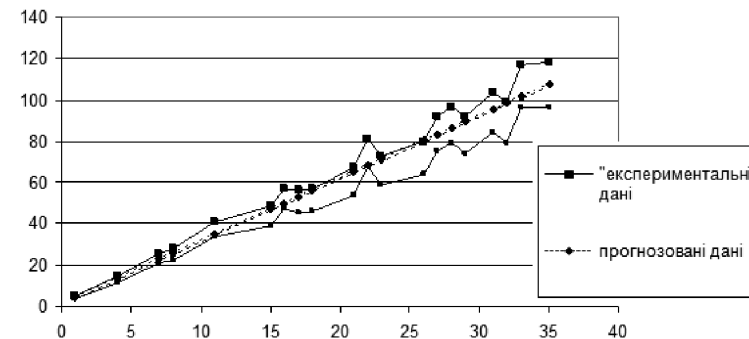


Рис. 4. Зіставлення коридору інтервальних моделей (21) з "експериментальними" даними табл. 4 ("насичений блок" (24)), після алгоритму редукції

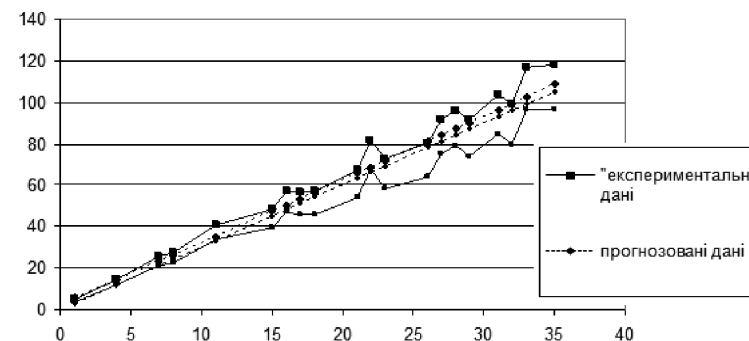


Рис. 5. Зіставлення коридору інтервальних моделей (21) з "експериментальними" даними табл. 4 ("насичений блок" (25)), після алгоритму редукції

**Приклад 2.** Нехай задана квадратична модель у вигляді

$$y(x_i) = b_0 + b_1 \cdot x_i + b_2 \cdot x_i^2, \quad (26)$$

та задано значення вхідної змінної (див. табл. 1).

Нехай у виразі (26):  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -3$ ,  $b_2 = 5$ . Із використанням виразів (19), (20) проведемо імітаційний експеримент з метою отримання таблиці експериментальних даних. При цьому встановимо, що похибка вимірювання  $\Delta = \pm 10\%$ , а  $-\Delta_i \leq e_i \leq \Delta_i$ . Результати імітаційного експерименту наведено у табл. 5.

На основі даних табл. 5 та структури моделі (26) сформуємо інтервальну систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2,925582 \leq b_0 + b_1 + b_2 \leq 3,525582 \\ 68,39142 \leq b_0 + 4b_1 + 16b_2 \leq 82,19142 \\ 204,2703 \leq b_0 + 7b_1 + 49b_2 \leq 249,2703 \\ 265,0473 \leq b_0 + 8b_1 + 64b_2 \leq 324,4473 \\ 557,2104 \leq b_0 + 11b_1 + 121b_2 \leq 671,8104 \\ 1033,362 \leq b_0 + 15b_1 + 225b_2 \leq 1249,562 \\ 1232,21 \leq b_0 + 16b_1 + 256b_2 \leq 1478,81 \\ 1286,607 \leq b_0 + 17b_1 + 289b_2 \leq 1565,607 \\ 1337,032 \leq b_0 + 18b_1 + 324b_2 \leq 1650,432 \\ 2074,475 \leq b_0 + 21b_1 + 441b_2 \leq 2503,075 \\ 2061,028 \leq b_0 + 22b_1 + 484b_2 \leq 2532,028 \\ 2410,621 \leq b_0 + 23b_1 + 529b_2 \leq 2926,021 \\ 2648,223 \leq b_0 + 26b_1 + 676b_2 \leq 3308,823 \\ 3048,706 \leq b_0 + 27b_1 + 729b_2 \leq 3761,706 \\ 3520,762 \leq b_0 + 28b_1 + 784b_2 \leq 4288,162 \\ 3985,223 \leq b_0 + 29b_1 + 841b_2 \leq 4809,023 \\ 4227,495 \leq b_0 + 31b_1 + 961b_2 \leq 5170,095 \\ 4767,449 \leq b_0 + 32b_1 + 1024b_2 \leq 5772,449 \\ 4767,358 \leq b_0 + 33b_1 + 1089b_2 \leq 5836,758 \\ 5713,231 \leq b_0 + 35b_1 + 1225b_2 \leq 6917,431 \end{array} \right. \quad (27)$$

**Табл. 5. Таблиця зімтованих інтервальних даних**

I	$x_i$	$y_0(x_i)$	$e_i$	$y_i^- = y_0(x) + e_i - \Delta$	$y_i^+ = y_0(x) + e_i + \Delta$
1	1	3,00	0,075194	2,925582	3,525582
2	4	69,00	0,091180	68,39142	82,19142
3	7	225,00	0,007868	204,2703	249,2703
4	8	297,00	-0,007590	265,0473	324,4473
5	11	573,00	0,072444	557,2104	671,8104
6	15	1081,00	0,055930	1033,362	1249,562
7	16	1233,00	0,099359	1232,210	1478,810
8	17	1395,00	0,022299	1286,607	1565,607
9	18	1567,00	-0,046760	1337,032	1650,432

10	21	2143,00	0,068024	2074,475	2503,075
11	22	2355,00	-0,024830	2061,028	2532,028
12	23	2577,00	0,035437	2410,621	2926,021
13	26	3303,00	-0,098200	2648,223	3308,823
14	27	3565,00	-0,044820	3048,706	3761,706
15	28	3837,00	0,017582	3520,762	4288,162
16	29	4119,00	0,067522	3985,223	4809,023
17	31	4713,00	-0,003010	4227,495	5170,095
18	32	5025,00	0,048746	4767,449	5772,449
19	33	5347,00	-0,008410	4767,358	5836,758
20	35	6021,00	0,048884	5713,231	6917,431

Реалізуємо для ІСЛАР (27) досліджуваний метод вибору "насиченого блоку". На першому кроці алгоритму вибираємо довільний "насичений блок", наприклад

$$\left\{ \begin{array}{l} 2,925582 \leq b_0 + b_1 + b_2 \leq 3,525582 \\ 68,39142 \leq b_0 + 4b_1 + 16b_2 \leq 82,19142 \\ 204,2703 \leq b_0 + 7b_1 + 49b_2 \leq 249,2703 \end{array} \right. \quad (28)$$

Оцінимо область розв'язків "насиченого блоку" (28) багатовимірним еліпсоїдом (13) та побудуємо коридор прогнозування інтервальних моделей у вигляді (14). Отримані значення ширини коридору покажемо у табл. 6.

**Табл. 6. Коридор інтервальної моделі (26) з оцінками параметрів, обчисленими з ІСЛАР (28)**

I	$x_i$	$y_0(x_i)$	$\hat{y}_i^-$	$\hat{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)} = \hat{y}_i^+ - \hat{y}_i^-$
1	1	3,00	2,925582	3,525582	0,60
2	4	69,00	68,39142	82,19142	13,80
3	7	225,00	204,2703	249,2703	45,00
4	8	297,00	259,5015	330,3197	70,82
5	11	573,00	459,554	644,9931	185,44
6	15	1081,00	808,1677	1229,743	421,58
7	16	1233,00	910,0151	1405,355	495,34
8	17	1395,00	1017,746	1592,731	574,98
9	18	1567,00	1131,363	1791,868	660,51
10	21	2143,00	1507,535	2459,843	952,31
11	22	2355,00	1644,702	2706,019	1061,32
12	23	2577,00	1787,757	2963,954	1176,20
13	26	3303,00	2252,259	3808,308	1556,05
14	27	3565,00	2418,873	4113,275	1694,40
15	28	3837,00	2591,376	4430,000	1838,62
16	29	4119,00	2769,769	4758,482	1988,71
17	31	4713,00	3144,225	5450,717	2306,49
18	32	5025,00	3340,288	5814,471	2474,18
19	33	5347,00	3542,241	6189,981	2647,74
20	35	6021,00	3963,819	6976,274	3012,45

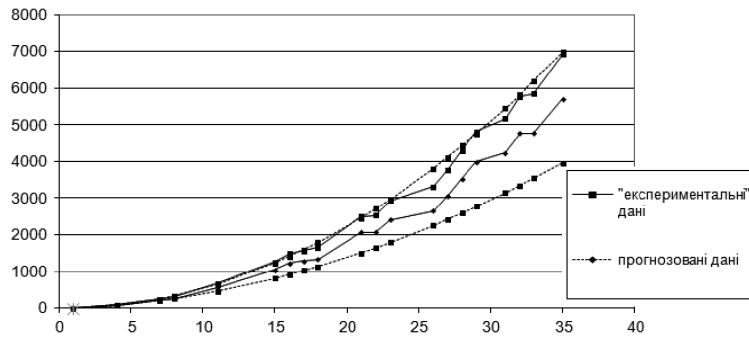


Рис. 6. Зіставлення коридору інтервальної моделі (26) з "експериментальними" даними табл. 6

Згідно з алгоритмом методу вибору "насиченого блоку" виберемо точку (16), де досягається максимальне значення похибки прогнозування інтервальних моделей –  $\bar{x}_i^{\max}(i = 20)$ .

На наступній ітерації відповідно до кроку 4 алгоритму сформуємо "насичені блоки" та визначимо для кожного похибку прогнозування за критерієм (17). Отже, отримуємо такі набори рівнянь у "насичених блоках":

- при заміні першого рівняння:

$$\begin{cases} 5713,231 \leq b_0 + 35b_1 + 1225b_2 \leq 6917,431 \\ 68,39142 \leq b_0 + 4b_1 + 16b_2 \leq 82,19142 \\ 204,2703 \leq b_0 + 7b_1 + 49b_2 \leq 249,2703 \end{cases} ; \quad (29)$$

- при заміні другого рівняння:

$$\begin{cases} 2,925582 \leq b_0 + b_1 + b_2 \leq 3,525582 \\ 5713,231 \leq b_0 + 35b_1 + 1225b_2 \leq 6917,431 \\ 204,2703 \leq b_0 + 7b_1 + 49b_2 \leq 249,2703 \end{cases} ; \quad (30)$$

- при заміні третього рівняння:

$$\begin{cases} 2,925582 \leq b_0 + b_1 + b_2 \leq 3,525582 \\ 68,39142 \leq b_0 + 4b_1 + 16b_2 \leq 82,19142 \\ 5713,231 \leq b_0 + 35b_1 + 1225b_2 \leq 6917,431 \end{cases} . \quad (31)$$

Табл. 7. Коридор інтервальної моделі (26) з оцінками параметрів, обчисленими з ІСЛАР (29), (30) та (31)

I	"Насичений блок" (29)			"Насичений блок" (30)			"Насичений блок" (31)		
	$\bar{y}_i^-$	$\bar{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$	$\bar{y}_i^-$	$\bar{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$	$\bar{y}_i^-$	$\bar{y}_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$
1	-12,8824	54,39144	67,27	2,925582	3,525582	0,60	2,925582	3,525582	0,60
2	68,39142	82,19142	13,80	53,60522	80,99535	27,39	68,39142	82,19142	13,80
3	204,2703	249,2703	45,00	204,2703	249,2703	45,00	225,0456	257,3662	32,32
4	269,6756	327,9362	58,26	275,4292	326,8227	51,39	296,0921	338,6398	42,55
5	530,0133	629,0682	99,05	546,8851	628,6943	81,81	564,6361	652,1879	87,55
6	1018,981	1190,324	171,34	1038,251	1198,550	160,30	1052,065	1232,855	180,79
7	1165,375	1360,342	194,97	1184,027	1371,078	187,05	1197,062	1407,020	209,96

8	1321,208	1542,465	221,26	1339,008	1555,599	216,59	1351,321	1592,778	241,46
9	1486,414	1736,757	250,34	1503,211	1752,096	248,88	1514,846	1790,127	275,28
10	2037,891	2393,03	355,14	2051,286	2413,317	362,03	2061,026	2451,696	390,67
11	2240,266	2636,323	396,06	2252,498	2657,602	405,10	2261,626	2695,39	433,76
12	2451,899	2891,901	440,00	2462,982	2913,813	450,83	2471,496	2950,669	479,17
13	3142,310	3732,380	590,07	3150,113	3753,963	603,85	3156,739	3786,004	629,27
14	3390,948	4037,123	646,17	3397,728	4057,84	660,11	3403,699	4087,614	683,92
15	3648,839	4354,157	705,32	3654,633	4373,625	718,99	3659,932	4400,807	740,87
16	3915,982	4683,481	767,50	3920,83	4701,317	780,49	3925,438	4725,581	800,14
17	4478,032	5378,993	900,96	4481,108	5392,415	911,31	4484,273	5409,873	925,60
18	4772,943	5745,178	972,23	4775,192	5755,818	980,63	4777,601	5769,391	991,79
19	5077,112	6123,646	1046,53	5078,572	6131,122	1052,55	5080,203	6140,49	1060,29
20	5713,231	6917,431	1204,20	5713,231	6917,431	1204,20	5713,231	6917,431	1204,20

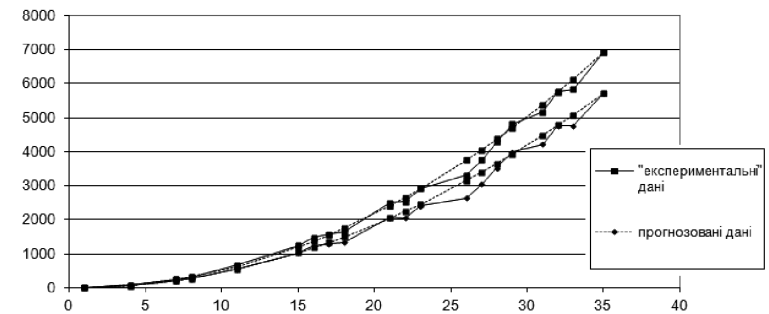


Рис. 7. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (29))

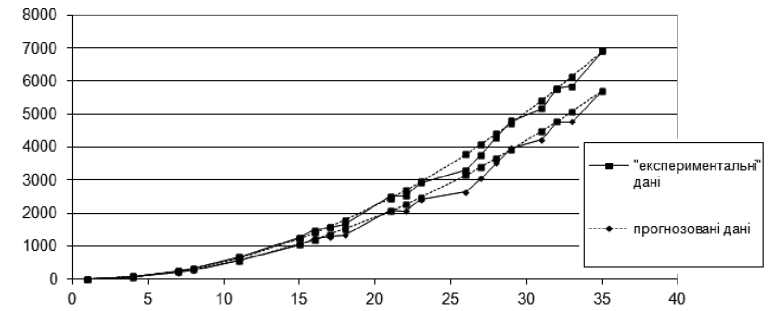


Рис. 8. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (30))

Відповідно до схеми алгоритму, серед "насичених блоків" (29), (30), (31) за критерієм (19) обираємо "оптимальний". Для моделі (26) такими оптимальними блоками є одночасно (29), (30) та (31), які задають однакову похибку прогнозування інтервальної моделі.

Враховуючи описані вище критерії ефективності, застосуємо алгоритм редукції почергово для кожного із "оптимальних насичених блоків". У ході обчислень виявлено, що у випадку "насиченого блоку" (29) необхідно було здійснити 3 результативних ітерацій, у випадку "насиченого блоку" (30) таких

ітерацій 6, а для "насиченого блоку" (31) в ході редукції результативними було теж 6 ітерацій. Прогнозовані значення ширини коридору інтервальної моделі (26) після застосування методу редукції для "насичених блоків" (29), (30), (31) наведено на рис. 10-12.

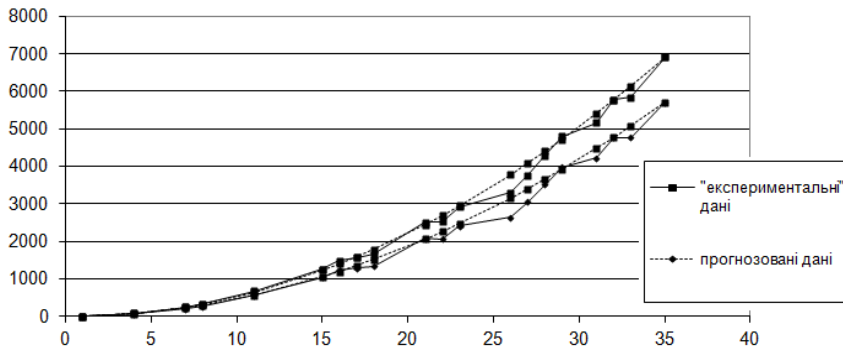


Рис. 9. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (31))

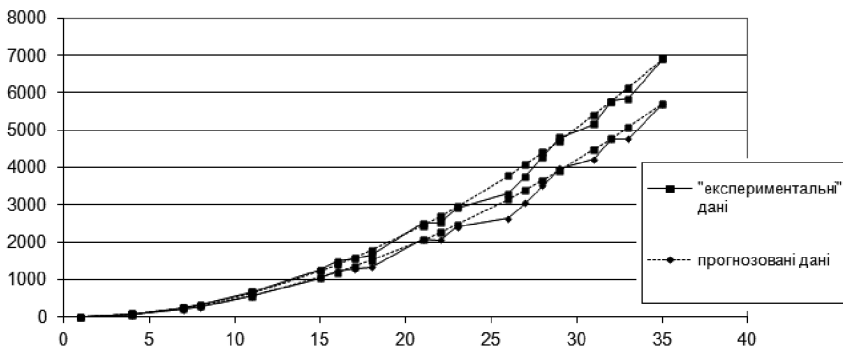


Рис. 10. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (29)), після алгоритму редукції

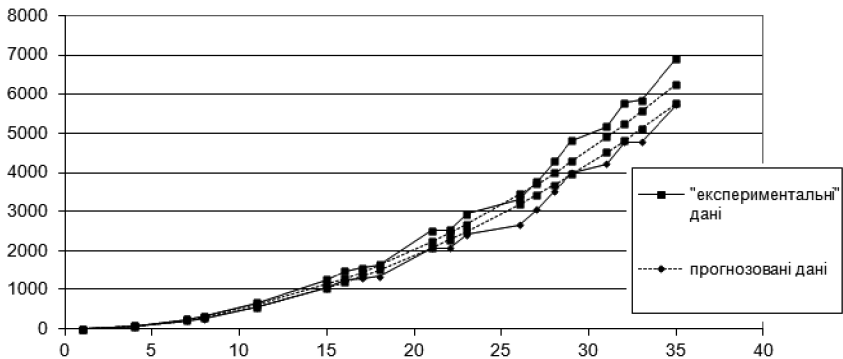


Рис. 11. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (30)), після алгоритму редукції

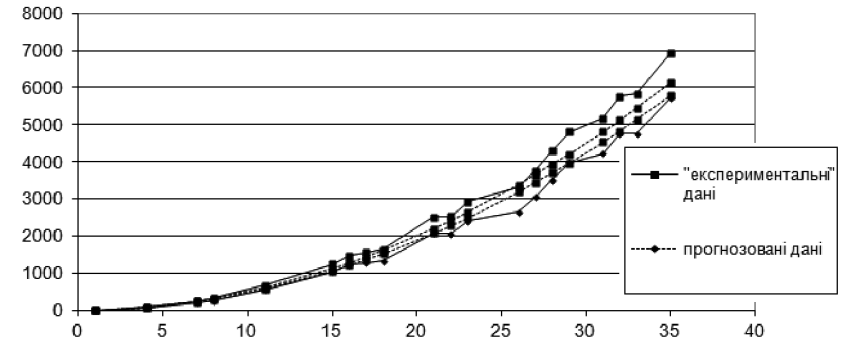


Рис. 12. Зіставлення коридору інтервальних моделей (26) з "експериментальними" даними табл. 7 ("насичений блок" (31)) після алгоритму редукції

Як бачимо з прикладів, при використанні  $I_G$ -оптимального "насиченого" плану для вибору базових рівнянь у задачі ідентифікації параметрів моделі виникає кілька розв'язків у вигляді "насичених блоків", які за подальшого застосування процедури редукції усієї ІСЛАР забезпечують різні прогностичні властивості отриманих інтервальних моделей. Тому виникає проблема вибору одного з множини розв'язків такого "насиченого блоку", який априорі забезпечить найкращі прогностичні властивості моделі. Для розв'язування зазначеної проблеми доцільно скористатися деякими модифікаціями  $I_G$ -оптимального "насиченого" плану.

Удосконалення алгоритму визначення "насиченого блоку" у задачі параметричної ідентифікації ІСЛАР. Модифікуємо правило знаходження точки, в якій досягається максимальне значення похибки прогнозування інтервальних моделей на області вхідних змінних, заданих експериментальними даними (2) із формули (16). Зокрема, визначимо відносне значення похибки

$$\Delta_0 = \max_{\bar{x}=1...N} \frac{\Delta_{\bar{y}(\bar{x})}}{\Delta_{y(\bar{x})}} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}, \quad (32)$$

де:  $\Delta_{\bar{y}(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$  – прогнозоване значення ширини коридору інтервальних моделей;

$\Delta_{y(\bar{x})} \Big|_{\bar{b} \in Q_m}$  – вимірне значення ширини коридору інтервальних моделей.

Нехай на першій ітерації модифікованого методу вибору "насиченого блоку" для моделі (21) початковим обрано "насичений блок" (23). Користуючись даними табл. 2 та 3, визначимо максимальне відносне значення похибки за формулою (32). Порівняльні дані відображено у табл. 8.

Табл. 8. Виміряні та прогнозовані значення ширини коридору інтервальних моделей для "насиченого блоку" (23)

i	$x_i$	$y_i^-$	$y_i^+$	$\Delta_{y(x_i)}$	$\hat{y}_i^-$	$\hat{y}_i^+$	$\Delta_{\hat{y}(x_i)}$	$\Delta_0$
1	1	4	5	1	4	5	1,0	1
2	4	11,746	14,546	2,8	11,74600	14,5460	2,80	1,0
3	7	21,091	25,691	4,6	18,94771	24,6363	5,69	1,236957

4	8	22,620	27,820	5,2	21,34000	28,0080	6,67	1,282692
5	11	33,775	40,775	7,0	28,50971	38,1303	9,62	1,374286
6	15	39,245	48,645	9,4	38,06231	51,6337	13,57	1,443617
7	16	47,100	57,100	10,0	40,44989	55,0101	14,56	1,456000
8	17	45,633	56,233	10,6	42,83733	58,3867	15,55	1,466981
9	18	45,808	57,008	11,2	45,22465	61,7634	16,54	1,476786
10	21	53,885	66,885	13,0	52,38608	71,8939	19,51	1,500769
11	22	67,864	81,464	13,6	54,77310	75,2709	20,50	1,507353
12	23	58,504	72,704	14,2	57,16006	78,6479	21,49	1,513380
13	26	64,160	80,160	16,0	64,32071	88,7793	24,46	1,528750
14	27	75,226	91,826	16,6	66,70753	92,1565	25,45	1,533133
15	28	79,120	96,320	17,2	69,09432	95,5337	26,44	1,537209
16	29	74,137	91,937	17,8	71,48109	98,9100	27,43	1,541011
17	31	84,565	103,565	19,0	76,25456	105,6654	29,41	1,547896
18	32	79,478	99,078	19,6	78,64127	109,0427	30,40	1,551020
19	33	96,657	116,857	20,2	81,02796	112,4200	31,39	1,553960
20	35	96,725	118,125	21,4	85,80131	119,1747	33,37	1,559348

Як видно із табл. 8, максимальна похибка, обчислена згідно з виразом (32), досягається для  $i = 20$ . Згідно із загальною схемою методу обчислення оцінки розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (крок 4), на наступному етапі обчислень рівняння із ІСЛАР (22) за номером  $i = 20$  почергово вносимо в "насичений блок" (23).

Вважається, що на цій ітерації модифікованого алгоритму сформовані "насичені блоки" збігаються з тими, які були отримані за використання критерію абсолютної похибки, тобто їх вигляд ідентичний (24), (25). Зважаючи на цей факт, для вибору оптимального "насиченого блоку" на цій ітерації можемо скористатися даними табл. 2 та 4, відповідно. Порівняльні дані відображено у табл. 9.

Табл. 9. Виміряні та прогнозовані значення ширини коридору для "насиченого блоків" (24), (25)

i	x <sub>i</sub>	Ширина виміряного інтервалу	Для "насиченого блоку" (24)		Для "насиченого блоку" (25)	
			$\Delta_{y(x_i)}$	$\Delta_{\bar{y}(x_i)}$	$\Delta_0$	$\Delta_0$
1	1	1	1,00	1	3,70	3,7
2	4	2,8	2,10	0,750000	2,80	1,00
3	7	4,6	3,87	0,841304	3,27	0,710870
4	8	5,2	4,48	0,861538	3,68	0,707692
5	11	7,0	6,33	0,904286	5,30	0,757143
6	15	9,4	8,83	0,939362	7,81	0,830851
7	16	10,0	9,46	0,946000	8,46	0,846000
8	17	10,6	10,08	0,950943	9,12	0,860377
9	18	11,2	10,71	0,956250	9,79	0,874107
10	21	13,0	12,59	0,968462	11,80	0,907692
11	22	13,6	13,22	0,972059	12,48	0,917647
12	23	14,2	13,85	0,975352	13,16	0,926761
13	26	16,0	15,74	0,983750	15,21	0,950625
14	27	16,6	16,37	0,986145	15,89	0,957229

15	28	17,2	17,00	0,988372	16,58	0,963953
16	29	17,8	17,62	0,989888	17,27	0,970225
17	31	19,0	18,88	0,993685	18,64	0,981054
18	32	19,6	19,51	0,995408	19,33	0,986224
19	33	20,2	20,14	0,997030	20,02	0,991089
20	35	21,4	21,40	1,000001	21,40	1,000001

Вважається, що на цій ітерації модифікованого алгоритму сформовані "насичені блоки" збігаються з тими, які були отримані за використання критерію абсолютної похибки, тобто їх вигляд ідентичний (24), (25). Зважаючи на цей факт, для вибору оптимального "насиченого блоку" на цій ітерації можемо скористатися даними табл. 2 та 4, відповідно. Порівняльні дані відображено у табл. 9.

На основі даних табл. 9 та відповідно до кроку 5 модифікованого алгоритму визначаємо, що "оптимальним" для редукції вважається "насичений блок" (24). Пригадаємо, що у випадку знаходження максимальної ширини коридору для цих даних за формулою (16), описаному у попередньому розділі, отримували рівнозначність, коли обидва "насичені блоки" задовольняли умови алгоритму методу. Значимо, що вигляд коридору прогнозування моделі (21) після редукції для "насиченого блоку" (24) наведено на рис. 4.

Застосуємо модифікований метод для другого прикладу, коли модель має вигляд (26). Нехай на першій ітерації модифікованого методу вибору "насиченого блоку" для моделі (26) початковим обрано "насичений блок" (28). Користуючись даними табл. 5 та 6, визначимо максимальне відносне значення похибки за формулою (32). Порівняльні дані відображено у табл. 10.

Табл. 10. Виміряні та прогнозовані значення ширини коридору для "насиченого блоку" (28)

i	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub> <sup>-</sup>	y <sub>i</sub> <sup>+</sup>	$\Delta_{y(x_i)}$	$\bar{y}_i^-$	$\bar{y}_i^+$	$\Delta_{\bar{y}(x_i)}$	$\Delta_0$
1	1	2,925582	3,525582	0,6	2,925582	3,525582	0,60	1
2	4	68,39142	82,19142	13,8	68,39142	82,19142	13,80	1
3	7	204,2703	249,2703	45,0	204,2703	249,2703	45,00	1
4	8	265,0473	324,4473	59,4	259,5015	330,3197	70,82	1,192256
5	11	557,2104	671,8104	114,6	459,5540	644,9931	185,44	1,618150
6	15	1033,362	1249,562	216,2	808,1677	1229,743	421,58	1,949954
7	16	1232,210	1478,810	246,6	910,0151	1405,355	495,34	2,008678
8	17	1286,607	1565,607	279,0	1017,746	1592,731	574,98	2,060860
9	18	1337,032	1650,432	313,4	1131,363	1791,868	660,51	2,107562
10	21	2074,475	2503,075	428,6	1507,535	2459,843	952,31	2,221909
11	22	2061,028	2532,028	471,0	1644,702	2706,019	1061,32	2,253333
12	23	2410,621	2926,021	515,4	1787,757	2963,954	1176,20	2,282111
13	26	2648,223	3308,823	660,6	2252,259	3808,308	1556,05	2,355510
14	27	3048,706	3761,706	713,0	2418,873	4113,275	1694,40	2,376438
15	28	3520,762	4288,162	767,4	2591,376	4430,000	1838,62	2,395908
16	29	3985,223	4809,023	823,8	2769,769	4758,482	1988,71	2,414069
17	31	4227,495	5170,095	942,6	3144,225	5450,717	2306,49	2,446945
18	32	4767,449	5772,449	1005,0	3340,288	5814,471	2474,18	2,461871
19	33	4767,358	5836,758	1069,4	3542,241	6189,981	2647,74	2,475912
20	35	5713,231	6917,431	1204,2	3963,819	6976,274	3012,45	2,501619

Як видно із табл. 10, максимальна похибка, обчислена згідно з виразом (32), досягається для  $i = 20$ . Згідно із загальною схемою методу обчислення оцінки розв'язків інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (крок 4), на наступному етапі обчислень рівняння із ІСЛАР (27) за номером  $i = 20$  по чергово вносимо в "насичений блок" (28). Вважається, що на цій ітерації модифікованого алгоритму сформовані "насичені блоки" збігаються з тими, які були отримані за використання критерію абсолютної похибки, тобто їх вигляд ідентичний (29), (30), (31). Зважаючи на цей факт, для вибору оптимального "насиченого блоку" на цій ітерації можемо скористатися даними табл. 5 та 7, відповідно. Порівняльні дані відображено у табл. 11.

Табл. 11. Виміряні та прогнозовані значення ширини коридору для "насичених блоків" (29), (30), (31)

i	$x_i$	Ширина виміряного інтервалу	Для "насиченого блоку" (29)		Для "насиченого блоку" (30)		Для "насиченого блоку" (31)	
			$\Delta_{y(x_i)}$	$\Delta_{\bar{y}(x_i)}$	$\Delta_0$	$\Delta_{\bar{y}(x_i)}$	$\Delta_0$	$\Delta_{\bar{y}(x_i)}$
1	1	0,6	67,27	112,1167	0,60	1	0,60	1
2	4	13,8	13,80	1	27,39	1,984783	13,80	1
3	7	45,0	45,00	1	45,00	1	32,32	0,718222
4	8	59,4	58,26	0,980808	51,39	0,865152	42,55	0,71633
5	11	114,6	99,05	0,864311	81,81	0,713874	87,55	0,763962
6	15	216,2	171,34	0,792507	160,30	0,741443	180,79	0,836216
7	16	246,6	194,97	0,790633	187,05	0,758516	209,96	0,851419
8	17	279,0	221,26	0,793047	216,59	0,776308	241,46	0,865448
9	18	313,4	250,34	0,798787	248,88	0,794129	275,28	0,878366
10	21	428,6	355,14	0,828605	362,03	0,84468	390,67	0,911503
11	22	471,0	396,06	0,840892	405,10	0,860085	433,76	0,920934
12	23	515,4	440,00	0,853706	450,83	0,874719	479,17	0,929705
13	26	660,6	590,07	0,893233	603,85	0,914093	629,27	0,952573
14	27	713,0	646,17	0,906269	660,11	0,925820	683,92	0,959215
15	28	767,4	705,32	0,919103	718,99	0,936917	740,87	0,965429
16	29	823,8	767,50	0,931658	780,49	0,947427	800,14	0,971279
17	31	942,6	900,96	0,955824	911,31	0,966805	925,60	0,981965
18	32	1005,0	972,23	0,967393	980,63	0,975751	991,79	0,986856
19	33	1069,4	1046,53	0,978614	1052,55	0,984244	1060,29	0,991481
20	35	1204,2	1204,20	1	1204,20	1	1204,20	1

На основі даних табл. 11 та відповідно до кроку 5 модифікованого алгоритму визначаємо, що "оптимальним" для редукції вважається "насичений блок" (31). Зазначимо, що вигляд коридору прогнозування моделі (26) після редукції для "насиченого блоку" (31) наведено на рис. 12.

Пригадаємо, що у випадку знаходження максимальної ширини коридору для цих даних за формулою (16), описаному у попередньому розділі, отримували рівнозначність, коли "насичені блоки" (29), (30), (31) одночасно задовольняли умови алгоритму методу. Застосовавши принцип нормування похибки, змогли уникнути рівнозначностей та знайти єдиний розв'язок, що підтверджує гіпотезу, висловлену у цій праці.

**Висновки.** У роботі розв'язано задачу верифікації методу параметричної ідентифікації інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР) для

різних початкових умов, зокрема, залежно від структури та кількості невідомих параметрів моделі. Також удосконалено алгоритм визначення "насиченого блоку" у задачі параметричної ідентифікації інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь шляхом нормування похибки вимірювання та показано ефективність такого вдосконалення для ряду тестових прикладів.

### Література

1. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними: монографія / за ред. М.П. Дивака. – Тернопіль: Вид-во "Економ. думка", 2011. – 216 с.
2. Shary S.P. Algebraic Approach to the Interval Linear Static Identification, Tolerance, and Control Problems, or One More Application of Kaucher Arithmetic, Reliable Computing. – 1996. – Vol. 2(1). – Pp. 3-33.
3. Дивак М.П. Метод формування допускової еліпсоїдної оцінки параметрів інтервальних моделей на основі виділення із інтервальної системи лінійних алгебричних рівнянь основних активних обмежень / М.П. Дивак, О.Л. Козак // Реєстрація, зберігання та оброблення даних. – 2009. – Т. 11, № 2. – С. 25-36.
4. Dyvak M. Reduction of Interval Equations for Interval System of Linear Algebraic Equations / M. Dyvak, I. Oliynyk, N. Kasatkina // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science of abstracts of the 13<sup>th</sup> International Conference TCSET'2016. – Lviv-Slavsko, Ukraine. – February 23-26, 2016. – Pp. 128-131.
5. Dyvak, M. Criterion of design of experiments for tasks of decision support interval model creation / M. Dyvak, A. Pukas // Proceedings of the Third Workshop – 2005 IEEE Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS, 2005. – Pp. 495-497.  
*Надійшла до редакції 15.09.2016 р.*

### Олинык И.С. Усовершенствование алгоритма определения "насыщенного блока" в задаче параметрической идентификации интервальной системы линейных алгебраических уравнений

Решена задача верификации метода параметрической идентификации интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАР) для различных начальных условий, в частности, в зависимости от структуры и количества неизвестных параметров модели; проанализирован метод вычисления оценки решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений путем замены всей системы "насыщенным блоком", сформированным из ее интервальных уравнений; усовершенствован алгоритм определения "насыщенного блока" в задаче параметрической идентификации интервальной системы линейных алгебраических уравнений путем нормирования погрешности измерения и показана эффективность такого совершенствования для ряда тестовых примеров.

**Ключевые слова:** интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАР), редукция, эллипсоидная оценка, "насыщенный блок", "зашумлённый" интервал, абсолютная погрешность, относительная погрешность.

### Oliynyk I.S. Improved Algorithm for Determining of "Saturated Block" in the Task of Parametric Identification Interval System of Linear Algebraic Equations

The work solved the problem of the verification of the method of parametric identification of interval system of linear algebraic equations (ISLAE) for different initial conditions, in particular depending on the structure and the number of unknown model parameters; analyzed method of calculating estimates of solutions of interval system of linear algebraic equations by replacing the whole system, "saturated block" formed from its interval equations; improved algorithm for determining the "saturated block" in the problem of parametric identification of interval system of linear algebraic equations by the normalization error of measurement and the efficiency of such improvement for a number of test cases.

**Keywords:** interval system of linear algebraic equations (ISLAE), reduction, ellipsoidal estimation, "saturated block", "noisy" interval, the absolute error, the relative error.