



$$\Rightarrow \overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2] \times \overline{C}^T = \overline{Y}^T, \quad (3)$$

звідки

$$\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]^{-1} \times \overline{Y}^T = \overline{C}^T, \quad (4)$$

де:  $\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]$  – матриця Тейлора, значення елементів якої обчислюються за координатами вузлів  $\overline{X}_1$  і  $\overline{X}_2$  інтерполяції;  $\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]^{-1}$  – обернена матриця за відношенням до матриці Тейлора;  $\overline{Y}^T$  – вектор-стовпець вузлових значень інтерполяції.

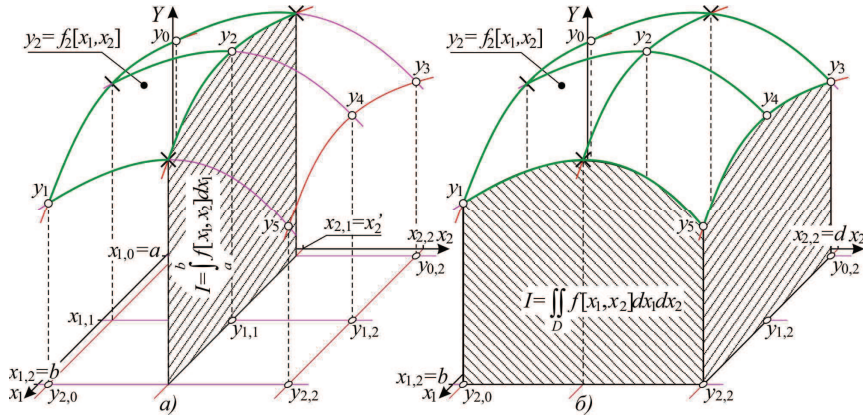


Рис. 1. Схема обчислення означених одинарного (а) та подвійного (б) інтегралів, обмеженого гладкими кривими

Означені одинарні інтеграли від многочлена (2) (рис. 1, а) за однією зі змінних  $x_1$  та  $x_2$  з урахуванням (4) визначаються за такими формулами:

$$\int_a^b f^n[x_1, x_2] dx_1 = \left( \overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2] \Big|_{x_1=b} - \overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2] \Big|_{x_1=a} \right) \times \overline{Lx}_1 \times \overline{C}^T; \quad (5)$$

$$\int_c^d f^n[x_1, x_2] dx_2 = \left( \overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2] \Big|_{x_2=d} - \overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2] \Big|_{x_2=c} \right) \times \overline{Lx}_2 \times \overline{C}^T, \quad (6)$$

де:  $\overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2]$  – рядок Тейлора  $(n+1)$ -го степеня для двох змінних;  $\overline{Lx}_1$  і  $\overline{Lx}_2$  – матриці інтегрування рядка Тейлора відповідно за змінною  $x_1$  та  $x_2$ .

Означений подвійний інтеграл від многочлена (2) (рис. 1, б) за двома змінними  $x_1$  та  $x_2$  з урахуванням (4) визначається за такою формулою:

$$\begin{aligned} \iint_D f^n[x_1, x_2] dx_1 dx_2 &= \int_a^b dx_1 \int_c^d f^n[x_1, x_2] dx_2 = \int_c^d dx_2 \int_a^b f^n[x_1, x_2] dx_1 = \\ &= \left( \overline{\overline{T}}^{n+2}[x_1, x_2] \Big|_{x_2=d} - \overline{\overline{T}}^{n+2}[x_1, x_2] \Big|_{x_2=c} \right) \times \overline{Lx}_1 x_2 \times \overline{C}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\overline{\overline{T}}^{n+2}[x_1, x_2]$  – рядок Тейлора  $(n+2)$ -го степеня для двох змінних;  $\overline{Lx}_1 x_2$  – матриця інтегрування рядка Тейлора за змінними  $x_1$  і  $x_2$ .

Отже, для обчислення значень одинарних і подвійних інтегралів від функції, заданої табл. 1, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформулювати матричне рівняння (3) та розв'язати його;
- сформулювати рядок Тейлора  $(n+1)$ -го степеня  $\overline{\overline{T}}^{n+1}[x_1, x_2]$  та матриці його інтегрування  $\overline{Lx}_1$  і  $\overline{Lx}_2$  відповідно за змінною  $x_1$  та  $x_2$ ;
- сформулювати рядок Тейлора  $(n+2)$ -го степеня  $\overline{\overline{T}}^{n+2}[x_1, x_2]$  та матрицю його інтегрування  $\overline{Lx}_1 x_2$  за змінними  $x_1$  і  $x_2$ ;
- для означеного одинарного інтегралу – підставити у формулу (5) чи (6) отриманий корінь  $\overline{C}^T$  рівняння (4) та числові значення  $x_1 = b$ ,  $x_2 = x'_2$  і  $x_1 = a$ ,  $x_2 = x'_2$  (чи  $x_1 = x'_1$ ,  $x_2 = d$  і  $x_1 = x'_1$ ,  $x_2 = c$ ) і виконати вказані в (5) чи (6) дії множення матриць;
- для означеного подвійного інтегралу – підставити у формулу (7) отриманий корінь  $\overline{C}^T$  рівняння (4) та числові значення  $x_1 = b$ ,  $x_2 = d$  і  $x_1 = a$ ,  $x_2 = c$  і виконати вказані в (7) дії множення матриць.

### 3. Обчислення площ перерізів тривимірної фігури та її об'єму

Загалом тривимірна фігура, обмежена зверху і знизу опуклими поверхнями, має вигляд, який показано на рис. 2, а. В цьому випадку табличні функції від двох змінних, які описують опуклі поверхні тривимірної фігури, задамо у вигляді табл. 2.

Табл. 2. Загальний вигляд двох табличних функцій від двох змінних

№ вузла	0	1	...	$i$	...	$p$
$\overline{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	...	$x_{1,i}$	...	$x_{1,p}$
$\overline{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	...	$x_{2,i}$	...	$x_{2,p}$
$\overline{Y}_1$	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	...	$y_{2,i}$	...	$y_{1,p}$
$\overline{Y}_2$	$y_{2,0}$	$y_{3,1}$	...	$y_{2,i}$	...	$y_{2,p}$

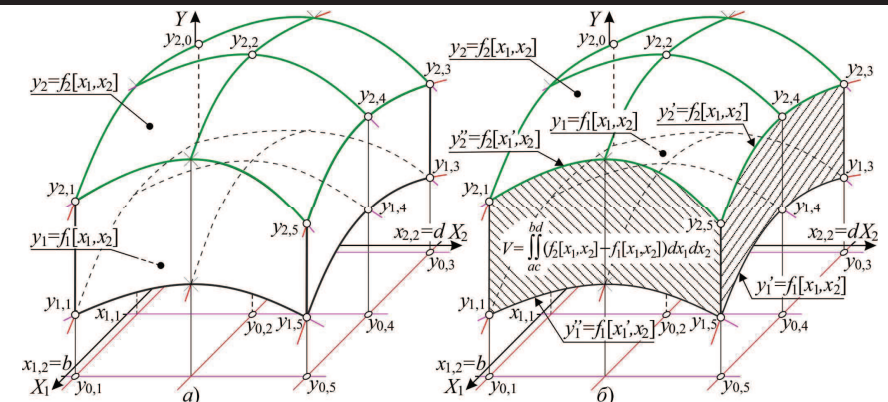


Рис. 2. Загальний вигляд тривимірної фігури (а), обмеженої гладкими поверхнями, та схема обчислення її об'єму (б)

У табл. 2 введено такі позначення:  $\overline{Y} = [\overline{Y}_k = [y_{k,i}, i = \overline{1, p}]; k = \overline{1, 2}]$  – значення табличних функцій у вузлових точках. Табличні функції  $\overline{Y}_k = f_k[\overline{X}_1, \overline{X}_2], k = \overline{1, 2}$  від двох змінних можна подати аналітично їх інтерполянтою (2) у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня:

$$y_k = f_k^n[x_1, x_2] = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{C}_k^T, k = \overline{1, 2}, \quad (8)$$

де:  $\bar{C}_k^T, k = \overline{1, 2}$  – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів  $k$ -ої інтерполянти. Згідно з виразом (3),  $k$ -ий стовпець  $\bar{C}_k^T$  з виразу (8) є коренем такого лінійного матричного рівняння:

$$\bar{T}[\bar{X}_1, \bar{X}_2] \times \bar{C}_k^T = \bar{Y}_k^T, k = \overline{1, 2} \Rightarrow \bar{T}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]^{-1} \times \bar{Y}_k^T = \bar{C}_k^T, k = \overline{1, 2}, \quad (9)$$

де  $\bar{Y}_k^T, k = \overline{1, 2}$  – транспонований рядок (стовпець) значень вузлових точок  $k$ -ої інтерполяції.

**Обчислення площ перерізів тривимірної фігури (площі плоских фігур).** Згідно з [2, ст. 269], площа плоскої фігури (рис. 3, а), яка обмежена гладкими кривими  $y_1' = f_1^n[x_1, x_2]$  і  $y_2' = f_2^n[x_1, x_2]$  (де  $f_1^n[x_1, x_2] \leq f_2^n[x_1, x_2]$ ,  $x_2 = const$ ), а також прямими  $x_1 = a$ ,  $x_1 = b$  та  $x_2 = x_2'$ , визначається за такою формулою:

$$S_1 = \int_a^b (f_2^n[x_1, x_2'] - f_1^n[x_1, x_2']) dx_1. \quad (10)$$

Площа плоскої фігури (рис. 3, б), яка обмежена гладкими кривими  $y_1'' = f_1^n[x_1', x_2]$  і  $y_2'' = f_2^n[x_1', x_2]$  (де  $f_1^n[x_1', x_2] \leq f_2^n[x_1', x_2]$ ,  $x_1 = const$ ), а також прямими  $x_1 = x_1'$ ,  $x_2 = c$  і  $x_2 = d$ , визначається за формулою:

$$S_2 = \int_c^d (f_2^n[x_1', x_2] - f_1^n[x_1', x_2]) dx_2. \quad (11)$$

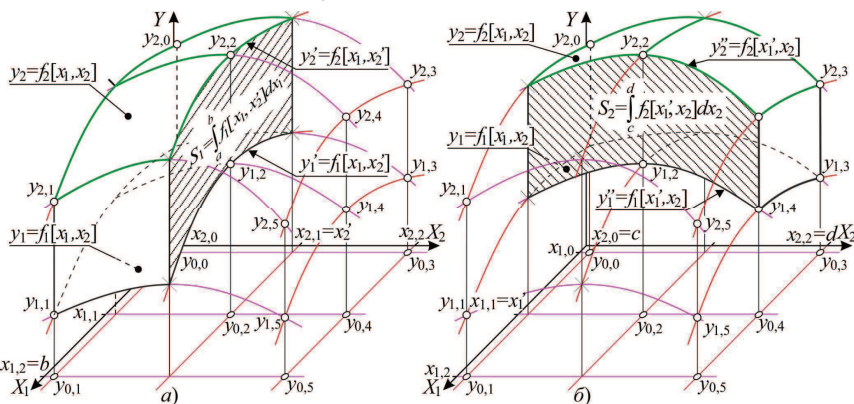


Рис. 3. Схема обчислення площ перерізів тривимірної фігури (площі плоских фігур), обмежених гладкими кривими

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 3, а) аналітично задано двома інтерполянтами  $y_k = f_k^n[x_1, x_2]$ ,  $k = \overline{1, 2}$  від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня (8), то площі перерізів двох плоских фігур  $S_1$  та  $S_2$  у буквенному записі можна визначити за такими формулами:

$$S_1 = F[y_1', y_2']_{\substack{x_1=a, \\ x_2=x_2'}}^{x_1=b} = f_2^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=b \\ x_2=x_2'}} - f_1^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=a \\ x_2=x_2'}}, \quad (12)$$

$$S_2 = F[y_1'', y_2'']_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c, d}} = f_2^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c}}^{x_2=d} - f_1^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c}}. \quad (13)$$

Водночас, у матричному записі вирази (12) та (13) з урахуванням виразу (9) матимуть такий вигляд:

$$S_1 = \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=a \\ x_2=x_2'}}^{x_1=b} \times \bar{I}x_1 \times (\bar{C}_2^T - \bar{C}_1^T) = \left( \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=b \\ x_2=x_2'}} - \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=a \\ x_2=x_2'}} \right) \times \bar{I}x_1 \times \Delta \bar{C}^T, \quad (14)$$

$$S_2 = \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c}}^{x_2=d} \times \bar{I}x_2 \times (\bar{C}_2^T - \bar{C}_1^T) = \left( \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=d}} - \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c}} \right) \times \bar{I}x_2 \times \Delta \bar{C}^T. \quad (15)$$

Отже, для обчислення площ плоских фігур  $S_1$  та  $S_2$  від двох функцій, заданих табл. 2, потрібно виконати такі дії:

- за даними табл. 2 сформулювати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;
- сформулювати рядок Тейлора  $(n+1)$ -го степеня  $\bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]$  і відповідні матриці його інтегрування  $\bar{I}x_1$  та  $\bar{I}x_2$ ;
- підставити у формулу (14) отримані корені  $\bar{C}_k^T, k = 1$ -го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів  $x_1 = a$  і  $x_1 = b$  та  $x_2 = x_2'$ , після чого для отримання площі  $S_1$  потрібно виконати дії множення матриць;
- підставити у формулу (15) отримані корені  $\bar{C}_k^T, k = 2$ -го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів  $x_1 = x_1'$  та  $x_2 = c$  і  $x_2 = d$ , після чого для отримання площі  $S_2$  потрібно виконати дії множення матриць.

**Приклад 1.** Нехай від функцій  $\bar{Y}_k = \bar{Y}_k[x_1, x_2], k = \overline{1, 2}$ , заданих табл. 3, потрібно обчислити площі плоских фігур  $S_1$  та  $S_2$  при таких обмеженнях:  $x_1 = b = 20$ ,  $x_1 = a = -10$  та  $x_2 = x_2' = 70$ ;  $x_1 = x_1' = 15$ ,  $x_2 = d = 95$ ,  $x_2 = c = 46$ .

Табл. 3. Значення табличних функцій, що описують опуклі поверхні тривимірної фігури

№ вузла	1	2	3	4	5	6
$\bar{X}_1$	-10	-10	-10	5	5	20
$\bar{X}_2$	46	68	95	62	84	74
$\bar{Y}_1$	5	8	18	6	11	9
$\bar{Y}_2$	10	14	26	12	18	14

Згідно з даними табл. 3, аналітичний вираз інтерполянти 2-го степеня для  $k$ -ої табличної функції має мати такий вигляд

$$y_k = f_k^2[x_1, x_2] = c_{0,k} + c_{1,k} \frac{x_1}{1!} + c_{2,k} \frac{x_2}{1!} + c_{3,k} \frac{x_1^2}{2!} + c_{4,k} \frac{x_1 x_2}{1!1!} + c_{5,k} \frac{x_2^2}{2!} = \bar{T}^2[x_1, x_2] \times \bar{C}_k^T, k = 1, 2. \quad (16)$$

Рядок Тейлора 3-го степеня для змінних  $x_1$  та  $x_2$  матиме такий вигляд:

$$\bar{T}^3[x_1, x_2] = \left| 1 \quad \frac{x_1}{1!} \quad \frac{x_2}{1!} \quad \frac{x_1^2}{2!} \quad \frac{x_1 x_2}{1!1!} \quad \frac{x_2^2}{2!} \quad \frac{x_1^3}{3!} \quad \frac{x_1^2 x_2}{2!1!} \quad \frac{x_1 x_2^2}{1!2!} \quad \frac{x_2^3}{3!} \right|, \quad (17)$$

а матриці інтегрування  $\bar{I}x_1$  та  $\bar{I}x_2$  рядка Тейлора  $\bar{T}^3[x_1, x_2]$  відповідно за змінними  $x_1$  та  $x_2$  матимуть такий вигляд:

$$\overline{Lx_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \overline{Lx_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Розв'язками лінійних матричних рівнянь (9) є числові значення елементів таких двох векторів-стовпців:

$$\overline{C_1^T} = \begin{pmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ c_{1,4} \\ c_{1,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15,4854 \\ 0,2334 \\ -0,4493 \\ 0,0103 \\ -0,0041 \\ 0,0096 \end{pmatrix}; \overline{C_2^T} = \begin{pmatrix} c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{2,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,3887 \\ 0,3150 \\ -0,4829 \\ 0,0033 \\ -0,0054 \\ 0,0107 \end{pmatrix}; \Delta \overline{C^T} = \begin{pmatrix} 5,9033 \\ 0,0816 \\ -0,0336 \\ -0,0070 \\ -0,0012 \\ 0,0012 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Введемо деякі проміжні змінні та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=-10}^{x_1=20} = \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=20} - \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=-10} = |0 \ 30 \ 0 \ 150 \ 2100 \ 0 \ 1500 \ 10500 \ 73500 \ 0|. \quad (20)$$

$$\Delta \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=15}^{x_2=95} = \overline{T^{n+1}}[x_1, x_2]_{x_1=15} - \overline{T^{n+1}}[x_1, x_2]_{x_1=15} = |0 \ 0 \ 49 \ 0 \ 735 \ 3454,5 \ 0 \ 5512,5 \ 51817,5 \ 126673,2|. \quad (21)$$

Значення площі плоскої фігури  $S_1$ , обмеженої двома інтерполянтами  $y'_k = f_k[x_1, x'_2]$ ,  $k = \overline{1,2}$  від двох змінних, а також прямими  $x_1 = b = 20$ ,  $x_1 = a = -10$  та  $x_2 = x'_2 = 70$  з урахуванням (14), (18), (19) і (20) становить:

$$S_1 = \Delta \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=-10}^{x_1=20} \times \overline{Lx_1} \times \Delta \overline{C^T} = 181,05.$$

Значення площі плоскої фігури  $S_2$ , обмеженої двома інтерполянтами  $y''_k = f_k[x'_1, x_2]$ ,  $k = \overline{1,2}$  від двох змінних, а також прямими  $x_1 = x'_1 = 15$ ,  $x_2 = d = 95$ ,  $x_2 = c = 46$  з урахуванням (15), (18), (19) і (21) становить:

$$S_2 = \Delta \overline{T^3}[x_1, x_2]_{x_1=15}^{x_2=95} \times \overline{Lx_2} \times \Delta \overline{C} = 277,92.$$

Значення площ плоских фігур, обчислені за формулами трапецій з кроком  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$ , відповідно становлять  $S_1 = 180,55$  та  $S_2 = 278,03$  кв. од., що практично збігається з отриманими вище результатами.

**Обчислення об'єму тривимірної фігури.** Згідно з [2, ст. 271], об'єм фігури, яка обмежена гладкими поверхнями  $y_1 = f_1''[x_1, x_2]$  і  $y_2 = f_2''[x_1, x_2]$  (де

$f_1''[x_1, x_2] \leq f_2''[x_1, x_2]$ ), а також прямими  $x_1 = a$  і  $x_1 = b$  та  $x_2 = c$  і  $x_2 = d$ , визначається за такою формулою:

$$V = \int_a^b \int_c^d (f_2''[x_1, x_2] - f_1''[x_1, x_2]) dx_1 dx_2. \quad (22)$$

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 2, а) аналітично задано двома інтерполянтами  $y_k = f_k[x_1, x_2]$ ,  $k = \overline{1,2}$  від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора  $n$ -го степеня (8), то, з урахуванням виразу (9), об'єм цієї фігури (рис. 2, б) у буквену записі можна визначити за такою формулою:

$$V = F[y_1, y_2]_{x_1 \in [a,b], x_2 \in [c,d]} = f_2^{n+2}[x_1, x_2]_{x_1=b, x_2=c} - f_1^{n+2}[x_1, x_2]_{x_1=a, x_2=c}, \quad (23)$$

а у матричному записі – за такою формулою:

$$V = \overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]_{x_1=a, x_2=c} \times \overline{Lx_1 x_2} \times (\overline{C_2^T} - \overline{C_1^T}) = \left( \overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]_{x_1=b, x_2=d} - \overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]_{x_1=a, x_2=c} \right) \times \overline{Lx_1 x_2} \times \Delta \overline{C^T}. \quad (24)$$

Отже, для обчислення об'єму тривимірної фігури  $V$ , опуклі поверхні якої описано двома табличними функціями, потрібно виконати такі дії:

- за даними табл. 2 сформулювати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;
- сформулювати рядок Тейлора  $(n+2)$ -го степеня  $\overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]$  і відповідну матрицю його інтегрування  $\overline{Lx_1 x_2}$ ;
- підставити у формулу (21) отримані корені  $\overline{C_k^T}$   $k$ -го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів  $x_1 = a$  і  $x_1 = b$  та  $x_2 = c$  і  $x_2 = d$ , після чого для отримання  $V$  потрібно виконати дії множення матриць.

**Приклад 2.** Нехай від функцій  $\overline{Y}_k = \overline{Y}_k[x_1, x_2]$ ,  $k = \overline{1,2}$ , заданих табл. 3, потрібно обчислити об'єм тривимірної фігури при таких обмеженнях:  $x_1 = b = 20$ ,  $x_1 = a = -10$ ;  $x_2 = d = 95$ ,  $x_2 = c = 46$ .

Рядок Тейлора 4-го степеня для змінних  $x_1$  та  $x_2$  матиме такий вигляд:

$$\overline{T^4}[x_1, x_2] = \left| 1 \ \frac{x_1}{1!} \ \frac{x_2}{1!} \ \frac{x_1^2}{2!} \ \frac{x_1 x_2}{1!1!} \ \frac{x_2^2}{2!} \ \frac{x_1^3}{3!} \ \frac{x_1^2 x_2}{2!1!} \ \frac{x_1 x_2^2}{1!1!2!} \ \frac{x_2^3}{3!} \ \frac{x_1^4}{4!} \ \frac{x_1^3 x_2}{3!1!} \ \frac{x_1^2 x_2^2}{2!2!} \ \frac{x_1 x_2^3}{1!1!1!2!} \ \frac{x_2^4}{4!} \right|. \quad (25)$$

Розв'язками двох лінійних матричних рівнянь (9) є числові значення двох векторів-стовпців (19).

Введемо деяку проміжну змінну та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta \overline{T^4}[x_1, x_2]_{x_1=-10}^{x_1=20} = \overline{T^4}[x_1, x_2]_{x_1=20, x_2=46} - \overline{T^4}[x_1, x_2]_{x_1=-10, x_2=95} = |0 \ 30 \ 49 \ 150 \ 2360 \ 3454,5 \ 1500 \ 16700 \ 100830 \ 126673,2 \ 6250 \ 134333,3 \ 849600 \ 3020143 \ 3207215|. \quad (26)$$

Значення об'єму тривимірної фігури (рис. 2, б), обмеженої двома інтерполянтами  $y_k = f_k''[x_1, x_2]$ ,  $k = \overline{1,2}$  2-го степеня від двох змінних, а також прямими

$x_1 = b = 20$ ,  $x_1 = a = -10$  та  $x_2 = d = 95$ ,  $x_2 = c = 46$  з урахуванням (19), (24) та (26) становить:

$$V = \Delta \bar{T}^4 [x_1, x_2]_{\substack{x_1=b \\ x_1=a \\ x_2=c}} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \Delta \bar{C}^T = 9062,16.$$

Значення об'єму тривимірної фігури, обчислене за формулами трапецій з кроком  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$ , становить  $V = 9056,12$  куб. од., що практично збігається з отриманим вище результатом.

**Висновки**

1. Встановлено, що для більшості практичних задач обчислення інтегралів не завжди вдається виразити первісну від підінтегральної функції через елементарні функції. В інженерних розрахунках підінтегральна функція часто задається таблицею її значень для певних значень аргумента.

2. Наведено метод чисельного інтегрування табличної функції від двох змінних з використанням многочлена Тейлора, який дає змогу обчислити означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних і означений подвійний інтеграл за двома змінними. Обчислення означеного одинарного інтеграла за кожною змінною зводиться до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора  $(n+1)$ -го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на відповідну матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти. Обчислення означеного подвійного інтеграла за двома змінними зводиться до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора  $(n+2)$ -го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на відповідну матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

3. Розроблено алгоритм обчислення площ плоских фігур (перерізів тривимірної фігури), заданих табличними функціями від двох змінних з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня. Для обчислення площі плоскої фігури потрібно помножити рядок Тейлора  $(n + 1)$ -го степеня на матрицю інтегрування для однієї зі змінних, а також на вираз, який є різницею між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують гладкі криві плоскої фігури.

4. Розроблено алгоритм обчислення об'єму тривимірної фігури, опуклі поверхні якої задано табличними функціями від двох змінних з використанням многочлена Тейлора  $n$ -го степеня. Для обчислення об'єму цієї фігури потрібно помножити рядок Тейлора  $(n + 2)$ -го степеня на матрицю інтегрування для двох

змінних, а також на вираз, який є різницею між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують опуклі поверхні тривимірної фігури.

**Література**

1. Грицок Ю.І. Чисельне інтегрування табличних функцій для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора / Ю.І. Грицок, Я.П. Драган // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2016. – Вип. 26.3. – С. 350-360.
2. Данко П.Е. Вычислительная математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. [для студ. ВТУЗов] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. I. – Изд. 3-е, [перераб. и доп.]. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1980. – 320 с.
3. Данилина Н.И. Вычислительная математика : учебн. пособ. / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1985. – 472 с.
4. Davis, P. J., & Rabinowitz, P. (1984). Methods of Numerical Integrations, (2nd ed.). New York – San Francisco – London: Academic Press, 456 p.
5. Sugihara, Masaaki. (1987, February). Methods of numerical integration of oscillatory functions by the DE-formula with the Richardson extrapolation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 17(1–2), 47-68. doi:10.1016/0377-0427(87)90038-0
6. Фильц Р.В. Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных / Р.В. Фильц, М.В. Кошоба, Ю.И. Грицок // Электромеханика : Изв. вузов. – 1991. – № 5. – С. 5-10.
7. Фильц Р.В. Наближення таблично заданих функцій (інтерполяція та апроксимація). Конспект лекцій з предмету "Математичні задачі електромеханіки" для студ. спец. 1801 "Електромеханіка" / Р.В. Фильц. – Львів : Вид-во ДУ ЛП, 1995. – 60 с.

Надійшла до редакції 26.06.2016 р.

**Грыцюк Ю.И., Драган Я.П. Использование многочлена Тейлора для численного интегрирования табличных функций от двух независимых переменных**

Показана возможность численного интегрирования табличных функций двух переменных с использованием многочлена Тейлора. Выяснено, что во многих практических задачах не всегда удается выразить первообразную от подынтегральной функции через элементарные функции. Разработан метод численного интегрирование табличной функции, позволяющий вычислить определенные одинарные интегралы по каждой из переменных, а также определенный двойной интеграл по двум переменным. С использованием многочлена Тейлора разработан алгоритм вычисления площадей сечений трехмерной фигуры и ее объема, заданной двумя табличными функциями от двух переменных.

**Ключевые слова:** произвольная точка пространства независимых переменных; многочлены Тейлора; табличная функция от двух переменных; численное интегрирование табличных функций; определенные одинарные интегралы по каждой из переменных; определенный двойной интеграл по двум переменным.

**Gryciuk Yu.Iv., Dragan Ya.P. Use of Taylor Polynomial for Numerical Integration of Table Functions of two Independent Variables**

The possibility of numerical integration of table functions of two variables with the use of Taylor polynomial is shown. It is found out that in many practical problems it is not always that one succeeds in expressing the primitive of a subintegral function in terms of elementary functions. A method of numerical integration of a table function which enables us to calculate definite unary integrals with respect to each the variables, as well as to calculate a definite double integral with respect to its two variables is developed. With the use of Taylor polynomial, an algorithm of calculation of areas of sections and of volume of a three-dimensional geometrical solid which is determined by means of two table functions of two variables is developed.

**Keywords:** arbitrary point of a space of independent variables; Taylor polynomial; table function of two variables; numerical integration of table functions; definite unary integrals with respect to each the variables; definite double integral with respect to two variables.