ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU
https://nv.nltu.edu.ua
https://doi.org/10.36930/40320510
Article received 15.10.2022 р.
Article accepted 27.10.2022 р.
UDC 004.4:519.6

ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)

Correspondence author
Yu. I. Hrytsiuk
yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua

Ю. І. Грицюк, В. І. Гавриш

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ТАБЛИЧНО-ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОГОЧЛЕНА ФУР'Є

Розроблено методологію чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, яка дає можливість обчислювати похідні k-го порядку ($k \le n$) в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції. Проаналізовано останні дослідження та публікації, що дало змогу встановити складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями аргумента на деякому інтервалі значень табличної функції. Наведено постановку задачі чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку. Встановлено, що будь-яку таблично-задану функцію спочатку згладжують деякою функцією, котра є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК (англ. Ordinary Least Squares, OLS) з деякою похибкою. Під похідною від такої табличної функції розуміють похідну від її інтерполянти. Розроблено метод чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій, сутність якого зводиться до добутку вектора-рядка Фур'є n-го порядку на матрицю k-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів відповідної інтерполянти.

Наведено деякі постановки задач чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, відповідні алгоритми їх розв'язання та конкретні приклади реалізації. Встановлено, що для обчислення похідної k-го порядку від табличної функції за прийнятим значенням аргумента потрібно виконати такі дії: за даними таблиці сформувати матричне рівняння та розв'язати його; підставити у відповідний матричний вираз отриманий корінь з матричного рівняння та значення аргумента і виконати вказані у виразі дії множення матриць. Здійснено перевірку правильності виконання розрахунків з використанням відповідних центральних різницевих формул. Встановлено, що обчислені похідні k-го порядку з використанням формул центральних скінченних різниць практично збігаються зі значеннями, отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є n-го порядку, тобто значення похідних обчислено правильно.

Ключові слова: зашумлені дані; згладжування функцій; інтерполяція табличних функцій; методи регуляризації; обчислення похідних.

Вступ / Introduction

Під час розв'язання багатьох математичних задач з інженерії ПЗ часто виникає потреба отримання значень похідних різних порядків від функції $f[x]$, заданої у вигляді таблиці [13, 19]. У цьому випадку безпосередньо застосувати методи диференційного числення або неможливо, або занадто складно [3, 18, 23, 27, 38]. Тоді використовують наближені методи чисельного диференціювання табличних функцій. Нагадаємо, у чисельних методах чисельне диференціювання описує алгоритми для оцінювання похідної математичної функції, використовуючи для цього значення табличної функції та інші знання про дану функцію [38].

Задача чисельного диференціювання полягає в знаходженні значень похідних від функції $y = f[x]$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вигляд функції $f[x]$ невідомий (задана неявно), дуже складний або функція $f[x]$ задана таблицею. Привабливість чисельного підходу пояснюється наявністю простих так званих різницевих формул [24, 27, 33, 48], за допомогою яких похідні в заданих точках табличної функції можна обчислити приблизно за декількома значеннями функції $f[x]$ в цих і близьких до них точках.

Існує багато різних способів чисельного диференціювання таблично-заданих функцій (англ. *Numerical Differentiation of Periodic Tabular Functions*). Вибір найпридатнішого алгоритму залежить від того, наскільки обраний метод є точним, має необхідну стійкість та збіжність, які затрати комп'ютерних ресурсів на його використання, наскільки гладкою є крива інтерполянти,

Інформація про автора:
Грицюк Юрій Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0001-8183-3466
Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** gavryshvasyl@gmail.com; https://orcid.org/0000-0003-3092-2279

Цитування за ДСТУ: Грицюк Ю. І., Гавриш В. І. Чисельне диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є. Науковий вісник НЛТУ України. 2022, т. 32, № 5. С. 69–79.
Citation APA: Hrytsiuk, Yu. I., & Havrysh, V. I. (2022). Numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(5), 69–79. https://doi.org/10.36930/40320410

яку кількість наборів даних (значень аргументів і відповідних значень функції) вона вимагає і т.д.

Найбільш зручним інтерполяційним многочленом для чисельного диференціювання таблично-заданих функцій є поліном Ньютона [1, 45]. За допомогою нього було отримано різницеві формули різного порядку точності залежно від кількості задіяних точок x_j [23, 24, 38]. Однак, якщо функція має періодичний характер, то тут доцільно використовувати інший клас інтерполяційних функцій, наприклад тригонометричний многочлен Фур'є n-го порядку [13, 14, 19, 26, 55], який, як на наш погляд, має значно більше переваг порівняно з поліном Ньютона.

Об'єкт дослідження – чисельне диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з огляду на їх високу точність, необхідну стійкість та збіжність, а також належну ефективність використання комп'ютерних ресурсів.

Предмет дослідження – алгоритми і методи чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є, що дасть можливість обчислювати похідні заданого порядку в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції.

Мета роботи – розробити методологію чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, що дасть можливість обчислювати похідні k-го порядку в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні *завдання дослідження*:

- проаналізувати останні дослідження та публікації, що дасть змогу встановити основну складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями аргумента на деякому інтервалі значень табличної функції;
- навести постановку задачі чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку;
- з'ясувати особливості чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції;
- навести деякі постановки задач чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку та алгоритм їх розв'язання, а також конкретні приклади їх реалізації;
- здійснити перевірку правильності виконання розрахунків з використанням відповідних центральних різницевих формул.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Чисельне диференціювання –задача обчислення похідних від функції за заданими значеннями аргумента на деякому інтервалі значень табличної функції. Така потреба виникає внаслідок проведення різних наукових досліджень і практичних застосувань, наприклад: ідентифікації точок розриву в процесі оброблення зображення [33, 37]; процедури розв'язування інтегрального рівняння Абеля [35]; визначення піків у хімічній спектроскопії [28]; деякі обернені задачі в рівняннях математичної фізики [16] тощо. Основна складність в некоректності самої задачі, де малі похибки у вимірюваннях значень функції можуть призвести до великих помилок під час обчислення похідних [11, 16].

За останні декілька десятиліть багато сучасних підходів до чисельного диференціювання функцій були розроблені та розвинені різними дослідниками з різних країн [10, 11, 16, 30, 32, 52, 53]. Вони вдосконалювали відомі методи та знаходили нові шляхи для підвищення точності процедури чисельного диференціювання функцій. Проаналізуємо деякі з них.

Оскільки чисельне диференціювання функцій є некоректною проблемою, то для її наближення потрібні відповідні методи регуляризації, тобто внесення деякої додаткової інформації, щоб знайти рішення некоректно поставленої задачі. В чисельному диференціюванні функцій використовувані багатьма дослідниками методи регуляризації базуються на (зовнішніх) параметрах, наприклад, регуляризації Тихонова, яка має певні обчислювальні труднощі, пов'язані з ними. У таких підходах ітераційні методи регуляризації слугують привабливою альтернативою. Наприклад, у роботі [1] автори пропонують новий ітеративний метод регуляризації, де мінімізуючий функціонал містить не зашумлені дані безпосередньо, а скоріше згладжену або інтегровану їх версію. Перевага цього методу в тому, що, окрім прямого використання зашумлених даних, створена послідовність функцій під час процесу їх згладжування не вимагають перетворення, а отже, не істотно впливають на точність числового диференціювання.

Нагадаємо, зашумлені (приблизно лінійні) дані, до яких допасовано лінійну чи поліноміальну функції. Хоча поліноміальну функцію можна допасувати й ідеально, проте від лінійної функції можна очікувати кращого узагальнення. Іншими словами, якби ці дві функції застосовувати для екстраполювання даних за межами тих, до яких здійснювалося допасовування, то лінійна функція давала б кращі передбачення.

У роботі [33] наведено новий підхід до побудови скінченно-різницевих методів, придатних для стабільного чисельного диференціювання функцій. Показано, як багато-точкові так звані диференціатори можуть генерувати алгоритми з кроком h як параметром регуляризації. Наведено константи оцінок, які можна обчислити явно. Також розроблено ітераційну регуляризуючу схему розв'язування задачі чисельного диференціювання функції у формі інтегрального рівняння Вольтерри [2, 39].

У роботі [36] запропоновано метод стійкого чисельного диференціювання функцій на підставі зашумлених даних. Метод вимагає аналітичного розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду. Наведено деякі численні результати його застосування. У розглянутих прикладах їхній початковий розв'язок було обчислено аналітично. Розглянуті приклади показують, що запропонований метод стійкого чисельного диференціювання більш ефективний, ніж деякі інші методи, наприклад варіаційна регуляризація.

Робота [48] стосується класу багатокрокових чисельних різницевих методів для розв'язання одновимірних параболічних обернених задач математичної фізики із параметром керування джерелом тепла $p(t)$. В цій роботі автори застосували лінійний багатокроковий метод у поєднанні з інтерполяцією Лагранжа для розроблення трьох різних різницевих схем. Оскільки проблема чисельного диференціювання функцій з зашумленими та розсіяними даними є дещо некоректною, то розроблена автором сплайн-модель їх згладжування на підставі методу регуляризації Тихонова придатна для обчислення чисельної похідної, забрудненої шумовою помилкою. Також у роботі запропоновано оцінки похибок усікання та зроблено висновки щодо збіжності запропонованих авторами різницевих методів відповідно. Наведено результати численних тестів для даних з різними рівнями їх зашумлення, які показали, що запропоновані алгоритми точні та ефективні.

У роботі [45] автори обговорюють некоректність похідної від інтерпольованої функції та показали регуляризовану часткову похідну від інтерпольованої функції для сигналів з обмеженою смугою частот у двовимірному випадку. Також автори дослідили збіжність регуляризованої похідної від інтерпольованої функції та порівняли її за допомогою теореми про вибірку Шеннона.

Стосовно рядів Фур'є, то тут варто згадати тригонометричну серію професора Зиґмунда [56], яку вперше було опубліковано у Варшаві ще в 1935 році, яка згодом зарекомендувала себе як класична. В цій серії автор навів стислий опис головних результатів, відомих як на той час, але в такому масштабі, що обмежив можливість їх детального обговорення. Значно доповненим було друге видання (Cambridge, 1959), опубліковане у двох томах, яке повністю врахувало розвиток тригонометричних рядів, рядів Фур'є та суміжних розділів чистої математики з моменту публікації оригінального видання. Ці два томи, переплетені разом із передмовою Роберта Феффермана [55], окреслюють значення поданого в ньому матеріалу. Том I, що містить повністю переписаний матеріал оригінальної роботи, стосується тригонометричних рядів і рядів Фур'є. Том II містить багато матеріалів, які раніше не було опубліковано у вигляді книги.

У роботі [26] автори розробили алгоритм для розширення на нерівнопросторний випадок швидкого алгоритму побудови спектрально-точних наближень Фур'є для гладких, але неперіодичних даних. Автори вважають, що алгоритми швидкого перетворення Фур'є (англ. *Fast Fourier Transform*, FFT), які дають змогу наближенню Фур'є бути періодичним у розширеній області визначення, можна поєднати з основними ідеями, що знаходяться в основі алгоритмів нерівнопросторного швидкого перетворення Фур'є (англ. *Non-uniform Fast Fourier Transform*, NFFT). Результатом такого об'єднаного методу є алгоритм, який дає змогу швидко й точно апроксимувати рядами Фур'є нерівномірно відібрані неперіодичні багатовимірні дані. Особливе значення запропонованого алгоритму в тому, що його використання дає змогу уникнути труднощів, пов'язаних із обумовленістю лінійних систем, які необхідно розв'язати для побудови продовження Фур'є. Ефективність розробленого методу еквівалентна ефективності NFFT, а точність запропонованого алгоритму показано на багатьох прикладах. Численні результати демонструють спектральну швидкість збіжності цього методу для достатньо гладких функцій. Також показано, що точність алгоритму для достатньо великих наборів даних покращена на кілька порядків порівняно з раніше опублікованими методами інтерполяції розсіяних даних.

У роботі [9] автори отримують експоненціально точні ряди Фур'є для неперіодичних функцій на інтервалі [-1,1] шляхом їх розширення на періодичні функції у більшій області визначення. Ряд можна оцінити шляхом його побудови за допомогою швидкого перетворення Фур'є FFT (англ. *Fast Fourier Transform*). Наведено повну теорію збіжності на підставі ортогональних поліномів, які нагадують поліноми Чебишева першого і другого роду. Автори аналізують запропонований раніше метод чисельного диференціювання функцій, який є нестабільним у теорії, але стабільним на практиці. Також автори запропонували новий чисельний метод, стабільний як в теорії, так і на практиці.

У роботі [16] автори розглядають особливості чисельного диференціювання періодичних функцій, заданих зашумленими даними. Наведено та проаналізовано новий метод, який ґрунтується на техніці регуляризації відповідного компактного оператора з усіченим сингулярним розкладом TSVD (англ. *Truncated Singular Value Decomposition*). Було встановлено, що новий метод збігається з деяким підходом до скорочених рядів Фур'є. Також наведено значну кількість прикладів, що демонструють ефективність запропонованого методу.

У роботі [52] автори розглядають особливості чисельного диференціювання функцій, заданих зашумленими даними. Наведено та обговорено новий підхід, який базується на інтегральному рівнянні першого роду з відповідним компактним оператором. Оскільки сингулярну систему компактного оператора можна отримати легко, то усічений сингулярний розклад TSVD (англ. *Truncated Singular Value Decomposition*) вибрано як необхідну техніку регуляризації. Тут автори показують, що метод вимагає дискретного синусного перетворення, тому його можна легко та швидко реалізувати. Також наведено значну кількість прикладів, що демонструють ефективність запропонованого методу.

У роботі [53] авторами отримано теоретичний результат для довільного чисельного диференціювання функції від H^n [0, 1]. Але в цьому методі для різних n використовують різні підходи до вирішення проблеми. У роботі [51] автори наводять метод чисельного диференціювання періодичних функцій. У запропонованому методі обчислювальні процеси стали рівномірними для різних n, що означає, що метод є самоадаптивним.

У роботі [54] автори наводять новий метод чисельного диференціювання двовимірних періодичних функцій, коли задано зашумлений набір даних. Як необхідну методику регуляризації обрано усічений сингулярний розклад TSVD (англ. *Truncated Singular Value Decomposition*). Автори встановили, що новий метод збігається з деяким підходом до скорочених рядів Фур'є. Для демонстрації ефективності методу також наведено значну кількість прикладів.

У роботі [11] розглянуто класичну некоректну задачу чисельного диференціювання функцій новим методом. Автори роботи запропонували метод скорочення Фур'є для обчислення похідних високого порядку. Вони отримали оцінку стійкості методу типу Гельдера. Описано особливості чисельної реалізації методу скорочення Фур'є. Наведена значна кількість прикладів показує, що запропонований метод є ефективним і стабільним.

У роботі [12] досліджено задачу чисельного диференціювання періодичних функцій від двох змінних зі скінченною гладкістю. Для досягнення стійких наближень досліджено деякі варіанти методу усікання Фур'є. Для розроблених методів знайдено оцінки точності стосовно кількості використаних коефіцієнтів ряду Фур'є. Автори наводять значну кількість проведених експериментів, результати яких підтверджують правильність їхніх теоретичних висновків.

У роботі [49] на підставі ідеї розширення Фур'є розроблено новий метод чисельного диференціювання двовимірних функцій на довільній області визначення. Для цього неперіодичну функцію було розширено до періодичної у дещо більшій області визначення. Метод регуляризації Тихонова в шкалах Гільберта використано для вирішення некоректної постановки проблеми. Як стабілізатор було використано норму Соболєва, визначену на більшій області визначення. Аналіз похибок забезпечено параметром регуляризації, обраним за принципом розбіжності. Для ілюстрації ефективності запропонованого методу також наведено значну кількість проведених експериментів.

У роботі [7] автори вважають, що диференціювання функцій (обчислення похідних) є одним із найважливіших понять у численні, яке використовують у багатьох галузях математики, в т.ч. й прикладної. Цілком природно, що чисельне диференціювання функцій має бути важливою технікою виконання інженерних розрахунків. Однак, оскільки чисельне диференціювання функцій є некоректним у розумінні Адамара, згідно з яким будь-яка невелика помилка у вимірюваннях значень буде збільшена під час обчислення похідних, то інженерам дуже важко використовувати цю техніку виконання обчислень. У своїй роботі автори запропонували новий простий чисельний метод для реконструкції початкової функції з розсіяних вхідних даних і обчислення її похідних, внаслідок чого показують, що їхній метод є ефективним і може бути легко реалізований.

У роботі [5] автори вважають, що ефективним засобом апроксимації аналітичної неперіодичної функції на обмеженому інтервалі є використання ряду Фур'є у більшій області визначення. При належній побудові це так зване розширення Фур'є геометрично швидко сходиться за параметром усікання. На жаль, процедура обчислення розширення Фур'є вимагає розв'язання погано обумовленої лінійної системи, тому можна очікувати, що така швидка збіжність буде втрачена при виконанні обчислень із заданою точністю. Їхньою метою було показати, що це не так, що розширення Фур'є фактично чисельно стабільне, коли реалізовані в скінченній арифметиці, і досягають швидкої збіжності, яка є принаймні супералгебраїчною. Отже, у цьому випадку погана обумовленість лінійної системи не перешкоджає адекватній апроксимації навіть зашумлених вхідних даних.

У другій частині роботи [5] автори розглядають питання обчислення розширень Фур'є з рівнопросторних даних. Отримані результати [34] стверджують, що жоден метод вирішення цієї проблеми не може бути одночасно чисельно стабільним і експоненціально збіжним. Автори пояснюють, як розширення Фур'є пов'язане з цим теоретичним бар'єром і демонструють, що вони особливо добре підходять для вирішення цієї проблеми, а саме, вони досягають принаймні супералгебраїчної збіжності чисельно стабільним способом.

У роботі [22] автори вважають, що діапазон методів Фур'є може бути значно збільшений шляхом розширення неперіодичної функції $f(x)$ до періодичної $\phi(x)$ на більшому інтервалі. Коли функція $f(x)$ аналітично відома на розширеному інтервалі, то розширення є прямим. Якщо ж функція $f(x)$ невідома за межами фізичного інтервалу, то для роботи з нею немає стандартного рецепту. Набагато гірше, коли, наприклад, безрадарний літальний апарат, який пробирається крізь туман, так і алгоритм може зазнати краху для проблеми "гори в тумані". Йдеться про те, що функція $f(x)$, яка цілком добре поводиться на фізичному інтервалі, повністю може мати різні сингулярності в розширеній області визначення. У своїй роботі автори порівнюють роботу декількох алгоритмів для успішного розширення функції $f(x)$ у "тумані", навіть якщо аналітичне розширення є сингулярним. Найкраще розширення третього роду вимагає розкладання сингулярного значення з ітеративним уточненням, де сягає точності, близької до машинної.

Отже, проведений аналіз останніх досліджень та публікацій у сфері чисельного диференціювання функцій (обчислення похідних) показав, що багатьма дослідниками розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і прикладного характеру. Але основна маса досліджень – це строга теорія чисельного диференціювання функцій, тобто уточнення її фундаментальних математичних положень. У технічних системах чисельне диференціювання функцій найчастіше використовують для розпізнавання образів і покращення їх якості. Проте, якщо до обчислення похідних немає застережень, то використання чисельного диференціювання функцій не позбавлене своїх недоліків, пов'язаних з деякими відхиленнями через нагромадження похибок обчислення за великої кількості зашумлених даних.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

1. Під час вирішення проблем інженерії ПЗ існує багато прикладних задач [3, 23, 24, 27, 38], у математичному формулюванні яких виникає потреба обчислення похідних 1-го та вищих порядків від функцій, заданих таблицею. Найважливіша з них полягає у знаходженні екстремуму цільової функції за однією чи багатьма незалежними змінними [14, 18]. Переважно таку функцію у процесі оптимізаційного розрахунку подають в табличному вигляді, а незалежні змінні, що відповідають її екстремуму, визначають з лінійних чи нелінійних систем рівнянь [18, 38], які отримують шляхом прирівнювання до нуля частинних похідних цільової функції за цими незалежними змінними.

Зазвичай, постановка задачі чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку має таке формулювання: для періодичної табличної функції $V = V^n[\alpha]$ потрібно у довільній точці простору аргумента, заданого значенням $\alpha = \alpha'$, обчислити похідні 1-го чи 2-го порядків $dV/d\alpha$ ($d^2V/d\alpha^2$) і (або) похідні вищих порядків $d^nV/d\alpha^n$.

У загальному випадку функцію $V = V^n[\alpha]$, задану у вигляді табл. 1, спочатку згладжують деякою функцією $Q[\alpha]$, котра є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК з деякою похибкою $R_n(\alpha)$ [27]. Під похідною від такої табличної функції потрібно розуміти похідну від її інтерполянти [13, 14]. Тут варто відзначити некоректність процедури чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій в тому сенсі, що близькість табличної функції $V[\alpha]$ та загладжуваної функції $Q[\alpha]$ не гарантує близькості їх похідних [23, 38]. Понад це, вони можуть мати у одній і тій же точці α' похідні різних знаків [24, 27]. Тому чисельне диференціювання періодичних таблично-заданих функцій необхідно застосовувати обережно і, як правило, для похідних невеликих порядків. Тим не менше такий підхід широко використовують на практиці, в т.ч. й під час вирішення проблем інженерії ПЗ.

Табл. 1. Загальний вигляд таблично-заданої функції для P вузлів інтерполяції

№ вузла	1	2	…	p	…	P
α, рад	α_1	α_2	…	α_p	…	α_P
V, од.	v_1	v_2	…	v_p	…	v_P

Варто зазначити, що запис формул через функцію $V[\alpha]$ відповідає постановці задачі чисельного диференціювання, коли її аналітичний вигляд невідомий або дуже складний. Це означає, що значення функції $V[\alpha]$ можна розрахувати в потрібних точках α_p з кроком h. При цьому h називають кроком чисельного диференціювання та підбирають залежно від поведінки функції $V[\alpha]$ в околі точки α_0.

Запис формул через v_p відповідає постановці задачі чисельного диференціювання, коли функція $V[\alpha]$ задана таблицею. При цьому для крайніх точок α_1 і α_p можна застосовувати різницеві формули диференціювання вперед та назад (відповідно до того, з якого вони боку), а для внутрішніх точок краще застосовувати симетричні різницеві формули чисельного диференціювання [33, 48]. В цій роботі буде застосовано традиційний підхід до чисельного диференціювання періодичних таблично-заданої функції з використанням інтерполяційного многочлена Фур'є n-го порядку.

2. Розглянемо послідовність дій чисельного диференціювання таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку.

У загальному випадку функцію $V = V^n[\alpha]$, яку задано табл. 1, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Фур'є n-го порядку [19]:

$$\begin{aligned} V = V^n[\alpha] = c_0 + c_1\cos(\alpha) + b_1\sin(\alpha) + ... \\ +c_{2n-1}\cos((2n-1)\cdot\alpha) + b_{2n}\sin(2n\cdot\alpha) = \bar{\Phi}^n[\alpha]\times\bar{C}^{т}, \end{aligned} \tag{1}$$

де: α – значення вузлової точки; $\bar{\Phi}^n[\alpha]$ – рядок Фур'є n-го порядку; $\bar{C}^{т}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти.

У роботі [19] зазначено, що для визначення коефіцієнтів інтерполянти $\bar{C}^{т}$, заданої многочленом Фур'є n-го порядку, потрібно побудувати у матричному вигляді таку лінійну систему алгебричних рівнянь:

$$\bar{\bar{\Phi}}^n[\bar{\mathrm{A}}]\times\bar{C}^{т} = \bar{V}^{т}, \tag{2}$$

де: $\bar{\mathrm{A}} = [\alpha_p,\ p = \overline{1,P}]$ – значення вузлових точок; $\bar{V}^{т} = [v_p^{т},\ p = \overline{1,P}]$ – вузловий вектор-стовпець, який містить значення вузлів інтерполяції; $\bar{C}^{т} = [c_0^{т}, c_j^{т}, b_j^{т},\ j = \overline{0,2n}]$ – невідомі значення коефіцієнтів інтерполянти; $\bar{\bar{\Phi}}^n[\bar{\mathrm{A}}]$ – матриця Фур'є n-го порядку, елементи якої визначають за вузловими точками таблично-заданої функції.

З виразу (2) видно, що стовпець $\bar{C}^{т}$ є коренем такого матричного рівняння:

$$\bar{C}^{т} = \bar{\bar{\Phi}}^n[\bar{\mathrm{A}}]^{-1}\times\bar{V}^{т}, \tag{3}$$

де: $\bar{\Phi}^n[\alpha]$ – матриця, обернена до матриці Фур'є. Отже, маючи періодичну таблично-задану функцію (див. табл. 1), її дані згладжуємо інтерполяційним многочленом Фур'є n-го порядку. Тепер його можна використовувати не тільки для обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці, але й для обчислення похідних k-го порядку ($k \le n$) в будь-якому вузлі інтерполяції

З виразу (1) видно, що для обчислення інтерпольованого значення функції у заданій точці потрібно перемножити вектор-рядок Фур'є n-го порядку, обчисленого за прийнятим значенням аргумента, на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, внаслідок чого отримаємо число – значення функції. Щоб обчислити похідну в будь-якому вузлі інтерполяції потрібно між цими двома векторами розмістити деяку матрицю (як виявиться нижче – квадратну, але не одиничну), яка б давала змогу дещо поміняти місцями елементи вектора-рядка Фур'є та, перемноживши його на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполянти, можна було б отримати число, яке вказуватиме на значення похідної у прийнятому вузлі інтерполяції.

З урахуванням зазначеного вище, похідні 1-го, 2-го та k-го порядків ($k \le n$) від многочлена Фур'є n-го порядку (1) можна визначити за однією з формул (4), де $\bar{\bar{D}}_\alpha^1$, $\bar{\bar{D}}_\alpha^2 = \bar{\bar{D}}_\alpha^1\times\bar{\bar{D}}_\alpha^1$, $\bar{\bar{D}}_\alpha^3 = \bar{\bar{D}}_\alpha^2\times\bar{\bar{D}}_\alpha^1$, ..., $\bar{\bar{D}}_\alpha^k = \bar{\bar{D}}_\alpha^{k-1}\times\bar{\bar{D}}_\alpha^1$ – матриці 1-го, 2-го, 3-го і k-го порядків диференціювання рядка Фур'є n-го порядку. Тут варто зауважити, що матриця 1-го порядку диференціювання рядка Фур'є 1-го порядку буде мати зовсім іншу розмірність та значення елементів, ніж матриця 1-го порядку диференціювання рядка Фур'є 2-го порядку.

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{d\alpha} &= -c_1\sin(\alpha) + b_1\cos(\alpha) + ... - c_{2n-1}(2n-1)\sin((2n-1)\alpha) + b_{2n}2n\cos(2n\alpha) = \bar{\Phi}^n[\alpha]\times\bar{\bar{D}}_\alpha^1\times\bar{C}^{т};\\
\frac{d^2V}{d\alpha^2} &= -c_1\cos(\alpha) - b_1\sin(\alpha) + ... - c_{2n-1}(2n-1)^2\cos((2n-1)\alpha) - b_{2n}(2n)^2\sin(2n\alpha) = \bar{\Phi}^n[\alpha]\times\bar{\bar{D}}_\alpha^2\times\bar{C}^{т};\\
\frac{d^3V}{d\alpha^3} &= +c_1\sin(\alpha) - b_1\cos(\alpha) + ... + c_{2n-1}(2n-1)^3\sin((2n-1)\alpha) + b_{2n}(2n)^3\cos(2n\alpha) = \bar{\Phi}^n[\alpha]\times\bar{\bar{D}}_\alpha^3\times\bar{C}^{т};\\
\dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
\frac{d^kV}{d\alpha^k} &= +c_1\cos(\alpha) + b_1\sin(\alpha) + ... + c_{2n-1}(2n-1)^k\cos((2n-1)\alpha) - b_{2n}(2n)^k\sin(2n\alpha) = \bar{\Phi}^n[\alpha]\times\bar{\bar{D}}_\alpha^k\times\bar{C}^{т},
\end{aligned} \tag{4}$$

Отже, для обчислення похідної k-го порядку від функції, заданої табл. 1, за прийнятим значенням аргумента α = α' потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (3) та розв'язати його;
- підставити у вирази (4) отриманий корінь $\bar{C}^{т}$ з матричного рівняння (3) та значення аргумента α = α' і виконати вказані у виразах дії множення матриць.

3. Розглянемо деякі постановки задач чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку та алгоритм їх розв'язання на конкретних прикладах.

Приклад 1. Потрібно обчислити значення похідних 1-го порядку від функції $V = V^1[\alpha]$, заданої табл. 1 [19], за такого значення аргумента α = 2π/9. Правильність виконання розрахунків перевірити з використанням відповідної центральної різницевої формули.

Розв'язавши матричне рівняння (3), сформоване з числових значень таблично-заданої функції, отримаємо коефіцієнти інтерполянти (1), поданої у вигляді многочлена Фур'є 1-го порядку [19, (8)]. Коефіцієнти інтерполянти подамо у вигляді вектора-рядка з числовими елементами:

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} -0{,}50 & -1{,}50 & 3{,}50 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

1.1. Значення похідної 1-го порядку від функції $V = V^1[\alpha]$ при $\alpha = \alpha' = 2\pi/9$ знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^1[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}^1_{\alpha} \times \bar{C}^{\text{т}} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\alpha') & \cos(\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

підставивши у який значення $\alpha' = 2\pi/9$, отримаємо:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha'=2\pi/9} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}7660 & 0{,}6428 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0{,}50 \\ -1{,}50 \\ 3{,}50 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -0{,}6428 & 0{,}7660 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0{,}50 \\ -1{,}50 \\ 3{,}50 \end{vmatrix} = \mathbf{3{,}64534}. \qquad (7)$$

Правильність обчислення похідної 1-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць [31, ст. 636, (8.5)], а саме

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{k} = \frac{v_b - v_a}{2 \cdot h}. \qquad (8)$$

Результати обчислення похідної 1-го порядку залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки α' наведено в табл. 2.

Табл. 2. Результати обчислення похідної 1-го порядку з використанням формули (8) залежно від кроку *h* між вузлами інтерполяції

$V^1[\alpha] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Va	-0,14547	0,23126	0,41712	0,56418	0,58245	0,59704
Vb	1,30297	0,95912	0,78151	0,63709	0,61890	0,60433
***dV*/*d*α**	3,62108	3,63926	3,64382	3,64528	3,64532	**3,64534**

З даних цієї таблиці видно, що за кроку $h = 0{,}001$ обчислена похідна 1-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (8) практично збігається зі значенням (7), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 1-го порядку [19, (8)], тобто значення похідної обчислено правильно.

Приклад 2. Потрібно обчислити значення похідних 1-го і 2-го порядків від функції $V = V^2[\alpha]$, заданої табл. 2 [19], за такого значення аргумента $\alpha = 2\pi/9$. Правильність виконання розрахунків перевірити з використанням відповідних центральних різницевих формул.

Розв'язавши матричне рівняння (3), сформоване з числових значень таблично-заданої функції, отримаємо коефіцієнти інтерполянти (1), поданої у вигляді многочлена Фур'є 2-го порядку [19, (13)]. Коефіцієнти інтерполянти подамо у вигляді вектора-рядка з числовими елементами:

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} 1{,}1534 & -1{,}50 & 0{,}1931 & -1{,}6534 & 1{,}6307 \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

2.1. Значення похідної 1-го порядку від функції $V = V^2[\alpha]$ при $\alpha = \alpha' = 2\pi/9$ знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^2[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}^1_{\alpha} \times \bar{C}^{\text{т}} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & \cos(2\alpha') & \sin(2\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ b_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\alpha') & \cos(\alpha') & -2\sin(2\alpha') & 2\cos(2\alpha') \end{vmatrix} \times \bar{C}^{\text{т}}, \qquad (10)$$

підставивши у який значення $\alpha' = 2\pi/9$, отримаємо:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha'=2\pi/9} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0{,}7660 & 0{,}6428 & 0{,}1736 & 0{,}9848 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1{,}1534 \\ -1{,}50 \\ 0{,}1931 \\ -1{,}6534 \\ 1{,}6307 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -0{,}6428 & 0{,}7660 & -1{,}9696 & 0{,}3473 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1{,}1534 \\ -1{,}50 \\ 0{,}1931 \\ -1{,}6534 \\ 1{,}6307 \end{vmatrix} = \mathbf{4{,}93508}. \qquad (11)$$

Правильність обчислення похідної 1-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць (8), внаслідок чого отримаємо результати розрахунку, наведені в табл. 3.

Табл. 3. Результати обчислення похідної 1-го порядку з використанням формули (8) залежно від кроку *h* між вузлами інтерполяції

$V^2[\alpha] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Va	0,39830	0,93534	1,19556	1,39772	1,42255	1,44235
Vb	2,32892	1,91689	1,68839	1,49642	1,47190	1,45222
***dV*/*d*α**	4,82655	4,90779	4,92825	4,93481	4,93501	**4,93508**

З даних цієї таблиці видно, що за кроку $h = 0{,}001$ обчислена похідна 1-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (8) практично збігається зі значенням (11), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 2-го порядку [19, (13)], тобто значення похідної обчислено правильно.

2.2. Значення похідної 2-го порядку від функції $V = V^2[\alpha]$ при $\alpha = \alpha' = 2\pi/9$ знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^2[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}^2_{\alpha} \times \bar{C}^{\text{т}} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & \cos(2\alpha') & \sin(2\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-4} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ b_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -\cos(\alpha') & -\sin(\alpha') & -4\cos(2\alpha') & -4\sin(2\alpha') \end{vmatrix} \times \bar{C}^{\text{т}}, \qquad (12)$$

підставивши у який значення $\alpha' = 2\pi/9$, отримаємо:

$$\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{\alpha'=2\pi/9} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0{,}7660 & 0{,}6428 & 0{,}1736 & 0{,}9848 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-4} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1{,}1534 \\ -1{,}50 \\ 0{,}1931 \\ -1{,}6534 \\ 1{,}6307 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -0{,}7660 & -0{,}6428 & -0{,}6946 & -3{,}9392 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1{,}1534 \\ -1{,}50 \\ 0{,}1931 \\ -1{,}6534 \\ 1{,}6307 \end{vmatrix} = \mathbf{-4{,}25017}. \qquad (13)$$

Правильність обчислення похідної 2-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць [31, ст. 636, (8.7)], а саме

$$\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{k} = \frac{v_d - 2 \cdot v_k + v_c}{4 \cdot h^2}. \qquad (14)$$

Результати обчислення похідної 2-го порядку залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки α' наведено в табл. 4.

Табл. 4. Результати обчислення похідної 2-го порядку з використанням формули (14) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції

$V^2[\alpha] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Vc	-0,67608	0,39830	0,93534	1,34775	1,39772	1,43740
Vk	1,44728	1,44728	1,44728	1,44728	1,44728	1,44728
Vd	2,93251	2,32892	1,91689	1,54511	1,49642	1,45714
$d^2V/d\alpha^2$	-3,98835	-4,18362	-4,23346	-4,24950	-4,25000	**-4,25016**

З даних цієї таблиці видно, що за кроку h = 0,001 обчислена похідна 2-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (14) майже збігається зі значенням (13), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 2-го порядку [19, (13)], тобто значення похідної обчислено правильно.

Приклад 3. Потрібно обчислити значення похідних 1-го, 2-го і 3-го порядків від функції $V = V^3[\alpha]$, заданої табл. 3 [19], за такого значення аргумента α = 2π/9. Правильність виконання розрахунків перевірити з використанням відповідних центральних різницевих формул.

Розв'язавши матричне рівняння (3), сформоване з числових значень таблично-заданої функції, отримаємо коефіцієнти інтерполянти (1), поданої у вигляді многочлена Фур'є 3-го порядку [19, (18)]. Коефіцієнти інтерполянти подамо у вигляді вектора-рядка з числовими елементами:

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} 3,9222 & -1,7666 & -5,0037 & -4,4222 & 0,9699 & 0,2666 & 0,3407 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

3.1. Значення похідної 1-го порядку від функції $V = V^3[\alpha]$ при α = α' = 2π/9 знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^3[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}_\alpha^1 \times \bar{C}^{\text{т}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & \cos(2\alpha') & \sin(2\alpha') & \cos(3\alpha') & \sin(3\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ b_2 \\ c_3 \\ b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\sin(\alpha') & \cos(\alpha') & -2\sin(2\alpha') & 2\cos(2\alpha') & -3\sin(3\alpha') & 3\cos(3\alpha') \end{vmatrix} \times \bar{C}^{\text{т}}, \quad (16)$$

підставивши у який значення α' = 2π/9, отримаємо:

$$\left.\frac{dV}{d\alpha}\right|_{\alpha'=2\pi/9} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0,766 & 0,6428 & 0,1736 & 0,9848 & -5,0 & 0,866 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{3} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3,9222 \\ -1,7666 \\ -5,0037 \\ -4,4222 \\ 0,9699 \\ 0,2666 \\ 0,3407 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -0,6428 & 0,7660 & -1,9696 & 0,3473 & -2,5981 & -1,50 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3,9222 \\ -1,7666 \\ -5,0037 \\ -4,4222 \\ 0,9699 \\ 0,2666 \\ 0,3407 \end{vmatrix} = \mathbf{5,14559}. \quad (17)$$

Правильність обчислення похідної 1-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць (8), внаслідок чого отримаємо результати розрахунку, наведені в табл. 5.

З даних цієї таблиці видно, що за кроку h = 0,001 обчислена похідна 1-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (8) майже збігається зі значенням (17), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 3-го порядку [19, (18)], тобто значення похідної обчислено правильно.

Табл. 5. Результати обчислення похідної 1-го порядку з використанням формули (8) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції

$V^3[\alpha] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Va	-1,24938	-0,79731	-0,55225	-0,34973	-0,32410	-0,30354
Vb	0,74868	0,22426	-0,03863	-0,24683	-0,27264	-0,29325
$dV/d\alpha$	4,99515	5,10787	5,13615	5,14521	5,14549	**5,14558**

3.2. Значення похідної 2-го порядку від функції $V = V^3[\alpha]$ при α = α' = 2π/9 знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^3[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}_\alpha^2 \times \bar{C}^{\text{т}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & \cos(2\alpha') & \sin(2\alpha') & \cos(3\alpha') & \sin(3\alpha') \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{9} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ b_1 \\ c_2 \\ b_2 \\ c_3 \\ b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\cos(\alpha') & -\sin(\alpha') & -4\cos(2\alpha') & -4\sin(2\alpha') & -9\cos(3\alpha') & -9\sin(3\alpha') \end{vmatrix} \times \bar{C}^{\text{т}}, \quad (18)$$

підставивши у який значення α' = 2π/9, отримаємо:

$$\left.\frac{d^2V}{d\alpha^2}\right|_{\alpha'=2\pi/9} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0,766 & 0,6428 & 0,1736 & 0,9848 & -5,0 & 0,866 \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{9} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3,9222 \\ -1,7666 \\ -5,0037 \\ -4,4222 \\ 0,9699 \\ 0,2666 \\ 0,3407 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0,7660 & -0,6428 & -0,6946 & -3,9392 & 4,50 & -7,7942 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3,9222 \\ -1,7666 \\ -5,0037 \\ -4,4222 \\ 0,9699 \\ 0,2666 \\ 0,3407 \end{vmatrix} = \mathbf{2,36468}. \quad (19)$$

Правильність обчислення похідної 2-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць (14), внаслідок чого отримаємо результати розрахунку, наведені в табл. 6.

Табл. 6. Результати обчислення похідної 2-го порядку з використанням формули (14) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції

$V^3[\alpha] \setminus h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Vc	-1,91809	-1,24938	-0,79731	-0,40081	-0,34973	-0,30868
Vk	-0,29840	-0,29840	-0,29840	-0,29840	-0,29840	-0,29840
Vd	1,72285	0,74868	0,22426	-0,19504	-0,24683	-0,28810
$d^2V/d\alpha^2$	2,50973	2,40256	2,37425	2,36507	2,36478	**2,36468**

З даних цієї таблиці видно, що за кроку h = 0,001 обчислена похідна 2-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (14) практично збігається зі значенням (19), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 3-го порядку [19, (18)], тобто значення похідної обчислено правильно.

3.3. Значення похідної 3-го порядку від функції $V = V^3[\alpha]$ при α = α' = 2π/9 знаходимо за відповідною формулою з (4), внаслідок чого отримаємо такий матричний вираз для диференціювання періодичної таблично-заданої функції:

$$\left.\frac{d^3V}{d\alpha^3}\right|_{\alpha=\alpha'} = \bar{\Phi}^3[\alpha'] \times \bar{\bar{D}}_\alpha^3 \times \bar{C}^{\text{т}} =$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \cos(\alpha') & \sin(\alpha') & \cos(2\alpha') & \sin(2\alpha') & \cos(3\alpha') & \sin(3\alpha')\end{vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\mathbf{-1}&0&0&0&0\\0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{-8}&0&0\\0&0&0&\mathbf{8}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\mathbf{-27}\\0&0&0&0&0&\mathbf{27}&0\end{Vmatrix}\times\begin{vmatrix}c_0\\c_1\\b_1\\c_2\\b_2\\c_3\\b_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & \sin(\alpha') & -\cos(\alpha') & 8\sin(2\alpha') & -8\cos(2\alpha') & 27\sin(3\alpha') & -27\cos(3\alpha')\end{vmatrix}\times\bar{C}^{\mathrm{T}}, \qquad (20)$$

підставивши у який значення α' = 2π/9, отримаємо:

$$\left.\frac{d^3V}{d\alpha^3}\right|_{\alpha'=2\pi/9}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0{,}766 & 0{,}6428 & 0{,}1736 & 0{,}9848 & -5{,}0 & 0{,}866\end{vmatrix}\times\begin{Vmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\mathbf{-1}&0&0&0&0\\0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\mathbf{-8}&0&0\\0&0&0&\mathbf{8}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\mathbf{-27}\\0&0&0&0&0&\mathbf{27}&0\end{Vmatrix}\times\begin{vmatrix}3{,}9222\\-1{,}7666\\-5{,}0037\\-4{,}4222\\0{,}9699\\0{,}2666\\0{,}3407\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0{,}6428 & -0{,}7660 & 7{,}8785 & -1{,}3892 & 23{,}3827 & 13{,}50\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}3{,}9222\\-1{,}7666\\-5{,}0037\\-4{,}4222\\0{,}9699\\0{,}2666\\0{,}3407\end{vmatrix}=\mathbf{-22{,}65564}. \qquad (21)$$

Правильність обчислення похідної 3-го порядку перевіримо з використанням формули центральних скінченних різниць [31, ст. 636], а саме

$$\left.\frac{d^3V}{dx^3}\right|_k=\frac{v_d-2\cdot v_b+2\cdot v_a-v_c}{2\cdot h^3}. \qquad (22)$$

Результати обчислення похідної 3-го порядку залежно від кроку h між вузлами інтерполяції в околі точки α' наведено в табл. 7.

Табл. 7. Результати обчислення похідної 3-го порядку з використанням формули (22) залежно від кроку h між вузлами інтерполяції

$V^3[\alpha]\backslash h$	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
Vc	-1,91809	-1,24938	-0,79731	-0,40081	-0,34973	-0,30868
Va	-1,24938	-0,79731	-0,55225	-0,34973	-0,32410	-0,30354
Vb	0,74868	0,22426	-0,03863	-0,24683	-0,27264	-0,29325
Vd	1,72285	0,74868	0,22426	-0,19504	-0,24683	-0,28810
$\boldsymbol{d^3V/d\alpha^3}$	-22,19866	-22,54354	-22,62775	-22,65453	-22,65536	**-22,65563**

З даних цієї таблиці видно, що за кроку h = 0,001 обчислена похідна 3-го порядку з використанням формули центральних скінченних різниць (22) майже збігається зі значенням (21), отриманим за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є 3-го порядку [19, (18)], тобто значення похідної обчислено правильно.

Тут варто звернути увагу на деяких особливостях формування матриць 1-го, 2-го, 3-го і k-го порядків диференціювання рядка Фур'є n-го порядку, де $k \leq n$. Для матриць непарних порядків (1-го, 3-го і т.д) числові значення елементів знаходяться обабіч головної діагоналі, які міняють місцями (за винятком c_0) коефіцієнти многочлена Фур'є – наступний з попереднім. При цьому попередній коефіцієнт міняє знак на протилежний. Водночас, для матриць парних порядків (2-го, 4-го і т.д) числові значення елементів знаходяться на головній діагоналі, які міняють тільки знак (за винятком c_0) коефіцієнтів многочлена Фур'є на протилежний.

Отже, наведено деякі особливості чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Встановлено, що для обчислення похідної k-го порядку від функції, заданої таблицею, за прийнятим значенням аргумента α = α' потрібно виконати такі дії: за даними таблично-заданої функції потрібно сформувати матричне рівняння та розв'язати його; підставити у відповідний матричний вираз отриманий корінь з матричного рівняння та значення аргумента α = α' і виконати вказані у виразі дії множення матриць.

Обговорення результатів дослідження. Чисельне диференціювання функцій є цікавою темою в області числового аналізу. Це виникає в багатьох інженерних задачах, насамперед в їхніх математичних моделях станів об'єктів, процесів і явищ [6, 15, 17, 35, 37, 40]. Основна складність чисельного диференціювання функцій полягає в тому, що така процедура є некоректною, тобто малі помилки у вхідних даних можуть призвести до значних помилок у наближених похідних. За останні роки у відкритому друці та мережі Інтернет було наведено широкий набір обчислювальних методів для вирішення проблеми чисельного диференціювання функцій [4, 8, 20, 21, 29, 33, 41, 42, 43, 47, 50, 51, 52, 54]. Згідно з наявними методами регуляризації, нові методи можна класифікувати на методи різниць, методи пом'якшення, методи усічення та методи Тихонова. Більшість дослідників зосереджували свою увагу на одновимірному випадку, однак було опубліковано декілька праць, в яких розглянуто багатовимірні випадки [25, 33, 44, 46, 53]. В цих роботах на підставі апроксимації радіальних базисних функцій [43] автори використали напівнорму в глобальному просторі як функціонал регуляризації на кінцевому інтервалі. Розв'язуючи чисельно функціонал згладжування, було побудовано алгоритм регуляризації на підставі функції Гріна [41]. Наприклад, у роботі [44] наведено алгоритм регуляризації для реконструкції чисельних похідних із двовимірних розсіяних і водночас зашумлених даних на підставі теорії апроксимації сплайнів тонких пластин.

Внаслідок виконаного дослідження отримано такі *основні наукові результати*: розроблено метод чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку для однієї незалежної змінної у довільно розташованих вузлах інтерполяції. Особливу увагу зосереджено на матричному методі обчислення похідних k-го порядку за допомогою матриці диференціювання рядка Фур'є n-го порядку і стовпця коефіцієнтів відповідної інтерполянти. Наведено результати обчислення похідних k-го порядку від інтерполянт, заданих многочленом Фур'є n-го порядку для відповідної кількості вузлових точок. Зроблено перевірку правильності обчислення похідних k-го порядку з використанням відповідних формул центральних скінченних різниць.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено метод чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій від однієї незалежної змінної у довільно розташованих вузлах інтерполяції, сутність якого зводиться до добутку трьох матриць – вектора-рядка Фур'є n-го порядку, визначеного за прийнятим значенням аргумента, на матрицю k-го порядку його диференціювання ($k \leq n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів інтерполяційного многочлена Фур'є n-го порядку.

Практична значущість результатів дослідження – розроблені алгоритми та методи чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій від однієї незалежної змінної з використанням многочлена Фур'є n-го порядку можна використати в практиці як математичного моделювання, так і комп'ютерної графіки для оброблення зображень. Основна складність полягає в тому, що малі похибки у значеннях табличної функції можуть призвести до великих помилок під час обчислення похідних.

Висновок / Conclusions

Розроблено методологію чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, яка дає можливість обчислювати похідні k-го порядку ($k \le n$) в будь-яких точках між довільно розташованими вузлами інтерполяції. За результатами проведеного дослідження можна зробити такі висновки.

1. Проаналізовано останні дослідження та публікації, що дало змогу встановити складність задачі обчислення похідних від функції за значеннями аргумента на деякому інтервалі значень табличної функції. З'ясовано, що багатьма дослідниками розроблено потужний математичний апарат, який можна використовувати для розв'язання широкого кола задач як наукового, так і прикладного характеру. Однак, основна частка досліджень – це строга теорія чисельного диференціювання функцій, тобто уточнення її фундаментальних математичних положень.

2. Наведено постановку задачі чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку. Встановлено, що будь-яку таблично-задану функцію спочатку згладжують деякою функцією, котра є глобальним (локальним) інтерполяційним многочленом або многочленом, який отримано за МНК з деякою похибкою. Під похідною від такої табличної функції розуміють похідну від її інтерполянти. Некоректність процедури чисельного диференціювання табличних функцій в тому, що близькість табличної функції та загладжуваної не гарантує близькості їх похідних.

3. З'ясовано особливості чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку в довільно розташованих вузлах інтерполяції. Розроблено метод чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій, сутність якого зводиться до добутку вектора-рядка Фур'є n-го порядку на матрицю k-го порядку його диференціювання ($k \le n$) і на вектор-стовпець коефіцієнтів відповідної інтерполянти.

4. Наведено деякі постановки задач чисельного диференціювання періодичних таблично-заданих функцій з використанням многочлена Фур'є n-го порядку, відповідні алгоритми їх розв'язання та конкретні приклади реалізації. Встановлено, що для обчислення похідної k-го порядку від табличної функції за прийнятим значенням аргумента $\alpha = \alpha'$ потрібно виконати такі дії: за даними таблиці сформувати матричне рівняння та розв'язати його; підставити у відповідний матричний вираз отриманий корінь з матричного рівняння та значення аргумента $\alpha = \alpha'$ і виконати вказані у виразі дії множення матриць.

5. Здійснено перевірку правильності виконання розрахунків з використанням відповідних центральних різницевих формул. Встановлено, що обчислені похідні k-го порядку з використанням формул центральних скінченних різниць практично збігаються зі значеннями, отриманими за допомогою інтерполяційного многочлена Фур'є n-го порядку, тобто значення похідних обчислено правильно.

References

1. Abinash Nayak. (2020). A new regularization approach for numerical differentiation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 28(13), 1747-1772. https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1763983
2. Andrei D. Polyanin, & Alexander V. Manzhirov. (1998). *Handbook of Integral Equations: Second Edition* (Handbooks of Mathematical Equations). CRC Press, Boca Raton, 1142 p. Retrieved from: https://www.amazon.com/Handbook-Integral-Equations-Handbooks-Mathematical/dp/1584885076
3. Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., & Pasichnyk V. V. (Ed.), et al. (2018). *Numerical methods in computer science: textbook*. Issue 2. Lviv: Novy svit-2000, 536 p. [In Ukrainian].
4. Bang Hu, & Shuai Lu. (2012). Numerical differentiation by a Tikhonov regularization method based on the discrete cosine transform. *Applicable Analysis*, 91(1), 719–736. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.598862
5. Ben Adcock, Daan Huybrechs, & Jesús Martín-Vaquero. (2014). On the Numerical Stability of Fourier Extensions. *Foundations of Computational Mathematics*, 14, 635–687. https://doi.org/10.1007/s10208-013-9158-8
6. Binbin Yin, & Yuzhang Ye. (2006). Recovering the local volatility in Black–Scholes model by numerical differentiation. *Applicable Analysis*, 85(6–7), 681–692. https://doi.org/10.1080/00036810500475025
7. Cheng, J., Jia, X. Z., & Wang, Y. B. (2007). Numerical differentiation and its applications. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(1), 339-357. https://doi.org/10.1080/17415970600839093
8. Chu-Li Fu, Xiao-Li Feng, Zhi Qian. (2010). Wavelets and high order numerical differentiation. *Applied Mathematical Modelling*, 34(11), 3008–3021. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.01.009
9. Daan Huybrechs. (2010). On the Fourier Extension of Nonperiodic Functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(6). https://doi.org/10.1137/090752456
10. Diego A. Murio. (1993). *The Mollification Method and Numerical Solution of Ill-posed Problems*. New York: John Wiely & Sons, 254 p. https://doi.org/10.1002/9781118033210
11. Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). Regularization of Inverse Problems. *Mathematics and Its Applications*, 375, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8
12. Evgeniya V. Semenova, Sergiy G., Solodky, & Serhii A., Stasyuk. (2022). *Application of Fourier Truncation Method to Numerical Differentiation for Bivariate Functions*. Computational Methods in Applied Mathematics, 22(2). https://doi.org/10.1515/cmam-2020-0138
13. Filts, R. V. (1994). *Calculation of Taylor and Fourier polynomials and their derivatives*. Synopsis of lectures on the subject "Mathematical problems of electromechanics" for students. special 1801 "Electromechanics". Lviv: State University "Lviv Polytechnic", 24 p. [In Ukrainian].
14. Filts, R. V., Kotsyuba, M. V., & Grytsyuk, Yu. I. (1991). Algorithm for computing the Taylor polynomial and its derivatives on a computer. *Izvestia of universities. Electromechanics*, 5, 5–10. [In Russian].
15. Hanke M, Scherzer O. (1998). Error analysis of an equation error method for the identification of the diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic differential equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59(3), 1012–1027. https://doi.org/10.1137/S0036139997331628
16. Hanke, M., & Scherzer, O. (2001). Inverse problems light: Numerical differentiation. *American Mathematical Monthly*, 108(6), 512–521. https://doi.org/10.2307/2695705

17. Herbert Egger, & Heinz W. Engl. (2005). Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: convergence analysis and rates. *Inverse Problems*, 21(3), 1027–1045. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/014
18. Hrytsiuk, Yu. I. (2014). *Computational methods and models in scientific research: monograph*. Lviv: LSU BZD Publishing House. 288 p. [In Ukrainian].
19. Hrytsiuk, Yu. I., & Havrysh, V. I. (2022). Interpolation of table-given functions by Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(1), 88–102. https://doi.org/10.36930/40320414
20. Huilin Xu, & Jijun Liu. (2010). Stable numerical differentiation for the second order derivatives. *Advances in Computational Mathematics*, 33, 431–447. https://doi.org/10.1007/s10444-009-9132-9
21. Jane Cullum. (1971). Numerical differentiation and regularization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 8(2), 254–265. https://doi.org/10.1137/0708026
22. John P. Boyd. (2002). A Comparison of Numerical Algorithms for Fourier Extension of the First, Second, and Third Kinds. *Journal of Computational Physics*, 178(1), 118-160. https://doi.org/10.1006/jcph.2002.7023
23. Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Lisovenko, A. I. (2019). *Numerical Methods. Numerical integration of functions: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 74 p. [In Ukrainian].
24. Krylyk, L. V., Bogach, I. V., & Prokopova, M. O. (2013). Computational mathematics. *Interpolation and approximation of tabular data: tutorial*. Vinnytsia: VNTU, 111 p. [In Ukrainian].
25. Leevan Ling. (2006). Finding Numerical Derivatives for Unstructured and Noisy Data by Multiscale Kernels. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(1). https://doi.org/10.1137/050630246
26. Lyon, M., Picard, J. (2014). The Fourier approximation of smooth but non-periodic functions from unevenly spaced data. *Advances in Computational Mathematics*, 40, 1073–1092. https://doi.org/10.1007/s10444-014-9342-7
27. Mamchuk, V. I. (2015). *Numerical methods: tutorial*. Kyiv: National Aviation University, 388 p. [In Ukrainian].
28. Markus Hegland, & Robert S. Anderssen. (2005). Resolution enhancement of spectra using differentiation. *Inverse Problems*, 21, 915. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/008
29. Martin Hanke, & Otmar Scherzer. (2001). Inverse problems light: Numerical differentiation. *The American Mathematical Monthly*, 108(6), 512–521. https://doi.org/10.1080/00029890.2001.11919778
30. Murio, D. A., Mejia, C. E., & Zhan, S. (1998). Discrete mollification and automatic numerical differentiation. *Computers & Mathematics with Applications*, 35(5), 1–13. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)00001-7
31. Ovchinnikov, P. F. (Ed.), Lisitsyn, B. M., & Mikhailenko, V. M. (1989). *Higher mathematics*. Kyiv: High school, 679 p. Retrieved from: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Ovchin_P2_2004_792.pdf
32. Qian, Z., Fu, C. L., Xiong, X. T., & Wei, T. (2006). Fourier truncation method for high order numerical derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 940–948. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.01.057
33. Ramm, A. G., & Smirnova, A. B. (2001). On stable numerical differentiation. *Mathematics of Computation*, 70, 1131–1153. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-01-01307-2
34. Rodrigo B. Platte, Lloyd N. Trefethen, & Arno B. J. Kuijlaars. (2011). Impossibility of Fast Stable Approximation of Analytic Functions from Equispaced Samples. *SIAM Review*, 53(2), 308-318. Retrieved from: https://www. jstor.org /stable/23065166
35. Rudolf Gorenflo, & Sergio Vessella. (1991). Abel Integral Equations: Analysis and Applications. *Lecture Notes in Mathematics*, 1461. Berlin: Springer, 1991st Edition, 232 p. Retrieved from: https://www.amazon.com/Abel-Integral-Equations-Applications-Mathematics/dp/354053668X
36. Soyoung Ahn, U. JinChoi, & Alexander G. Ramm. (2006). A scheme for stable numerical differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(2), 325-334. https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.02.002
37. Stanley R. Deans. (2007). *The Radon Transform and Some of Its Applications* (Dover Books on Mathematics). Dover Publications; Illustrated edition, 304 p. Retrieved from: https://www.amazon.com/Radon-Transform-Applications-Dover-Mathematics/dp/0486462412
38. Tsegelyk, H. G. (2004). *Numerical methods: textbook for university students*. Lviv National University named after Ivan Franko. Lviv, 407 p. [In Ukrainian].
39. Vasylyshyn, T. V., Goy, T. P., & Fedak, I. V. (2014). *Integral equations: a study guide*. Ivano-Frankivsk: Simyk, 222 p. Retrieved from: https://kmfa.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/64/2019/12/Василишин-Т.В.-Гой-Т.П.-Федак-І.В.-Інтегральні-рівняння.pdf
40. Wan, X. Q., Wang, Y. B., & Yamamoto, M. (2006). Detection of irregular points by regularization in numerical differentiation and application to edge detection. *Inverse Problems*, 22(3), 1089. https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/3/022
41. Wang, Y. B., & Wei, T. (2005). Numerical differentiation for two-dimensional scattered data. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 312(1), 121-137. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.025
42. Wang, Y. B., Jia, X. Z., & Cheng, J. (2002). A numerical differentiation method and its application to reconstruction of discontinuity. *Inverse Problems*, 18(6), 1461. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/6/301
43. Wei, T., & Hon, Y. C. (2007). Numerical differentiation by radial basis functions approximation. *Advances in Computational Mathematics*, 27(3), 247–272. https://doi.org/10.1007/s10444-005-9001-0
44. Wei, T., Hon, Y, C., & Wang, Y. B. (2005). Reconstruction of numerical derivatives from scattered noisy data. *Inverse Problems*, 21(2), 657–672. https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/013
45. Weidong Chen. (2021). Regularized derivative interpolation for two dimensional band-limited functions. Signal Processing, 184, 107943. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107943
46. Xie, O., Zhao Z. Y. (2013). Numerical differentiation of 2d functions by a mollification method based on Legendre expansion. *International Journal of Computer Science Issues*, 10(1), 729–734. Retrieved from: https://ijcsi.org/papers/IJCSI-10-1-2-729-734.pdf
47. Yang, Lu. (2008). A perturbation method for numerical differentiation. *Applied mathematics and computation*, 199(1), 368–374. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.09.066
48. Yong-Fu Zhang, & Chong-Jun Li. (2019). A class of multistep numerical difference schemes applied in inverse heat conduction problem with a control parameter. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 27(7), 887–942. https://doi.org/10.1080/17415977.2018.1501370
49. Zehong Meng, Zhenyu Zhao, Duan Mei & Yongxiong Zhou. (2020). Numerical differentiation for two-dimensional functions by a Fourier extension method. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 28(1). https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1661410
50. Zewen Wang, & Rongsheng Wen (2010). Numerical differentiation for high orders by an integration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3), 941-948. https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.01.056
51. Zhenyu Zhao, & Zehong Meng. (2010). Numerical differentiation for periodic functions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 18(7), 957-969. https://doi.org/10.1080/17415977.2010.492517
52. Zhenyu Zhao, Zehong Meng, & Guoqiang He. (2009). A new approach to numerical differentiation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 232(2), 227–239. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.06.001
53. Zhenyu Zhao, Zehong Meng, Li Xu, & Junfeng Liu. (2009). A New Mollification Method for Numerical Differentiation of 2D Periodic Functions. IEEE. *International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, 24-26 April 2009, (pp. 205-207), Sanya, China. https://doi.org/10.1109/CSO.2009.174
54. Zhenyu Zhao. (2010). A truncated Legendre spectral method for solving numerical differentiation. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(16), 3209–3217. https://doi.org/10.1080/00207160902974404

55. Zygmund, Antoni (Author), Fefferman, Robert A. (Ed.). (2002). *Trigonometric series*, I, II, Cambridge Mathematical Library (3rd ed.), Cambridge University Press, 784 p. Retrieved from: https://www.amazon.com/Trigonometric-Cambridge-Mathematical-Library-Zygmund/dp/0521890535

56. Zygmund, Antoni. (1935). *Trigonometrical series* (English). Monografie Matematyczne 5. Warszawa: Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Warszawskiego; Warszawa: Instytut Matematyczny PAN. 331 s. Retrieved from: https://zbmath.org/?format=complete&q=an:0011.01703

Yu. I. Hrytsiuk, V. I. Havrysh

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

NUMERICAL DIFFERENTIATION OF PERIODIC TABULAR-SPECIFIED FUNCTIONS USING THE FOURIER POLYNOMIAL

A methodology for numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial of the n-th order has been developed, which makes it possible to calculate derivatives of the k-th order ($k \le n$) at any points between arbitrarily located interpolation nodes. The latest research and publications were analyzed, which made it possible to establish the complexity of the task of calculating the derivatives of the function by the values of the argument on a certain interval of values of the tabular function. The formulation of the problem of numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial of the n-th order is given. It is established that any tabular-specified function is first smoothed by some function, which is a global (local) interpolation polynomial or a polynomial obtained by OLS (Ordinary Least Squares) with some error. The derivative of such a tabular function is understood as the derivative of its interpolant. A method of numerical differentiation of periodic tabular-specified functions has been developed, the essence of which is reduced to the product of the Fourier series vector of the n-th order by the matrix of the k-th order of its differentiation ($k \le n$) and the column vector of the coefficients of the corresponding interpolant.

Some statements of problems of numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial of the n-th order, corresponding algorithms for their solution and concrete examples of implementation are given. It was established that to calculate the derivative of the k-th order from the table function based on the accepted value of the argument, the following actions must be performed: form a matrix equation based on the table data and solve it; substitute into the corresponding matrix expression the obtained root from the matrix equation and the value of the argument and perform the matrix multiplication actions specified in the expression. The check has been made of the correctness of performing calculations using the appropriate central difference formulas. It was established that the calculated derivatives of the k-th order using the formulas of central finite differences practically coincide with the values obtained using the Fourier interpolation polynomial of the n-th order, that is, the values of the derivatives are calculated correctly.

Keywords: noisy data; smoothing functions; interpolation of tabular functions; regularization methods; calculation of derivatives.