Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU
http://nv.nltu.edu.ua
https://doi.org/10.36930/40291013
Article received 15.10.2019 р.
Article accepted 26.12.2019 р.
УДК 532.54.013.2

ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)

@ Correspondence author
R. M. Hnativ
gnativ.roman.m@gmail.com

О. М. Яхно[1], Р. М. Гнатів[2], І. Р. Гнатів[3]

[1] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського", м. Київ, Україна
[2] Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна
[3] Львівський національний аграрний університет, м. Дубляни, Україна

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕЧІЙ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ У ТРУБАХ

Проаналізовано наукові роботи з розв'язку задач про нестаціонарний рух рідини в циліндричних трубах. Встановлено, що під час розв'язування задач неусталених рухів рідини у трубах виникає потреба визначення швидкостей рідини у перерізах трубопроводу, як в осьовому, так і радіальному напрямках. Класичні методи вирішення цієї задачі не дають задовільних результатів. Удосконалено методику розрахунку нестаціонарних потоків рідини на основі дисипативної моделі. У дослідженнях використано модель із врахуванням дисипативних процесів течії в'язкої рідини, яку вивчали варіаційним методом, враховуючи початкові і граничні умови. Об'єктом дослідження є гідравлічні процеси в неусталених потоках в'язкої рідини у циліндричному трубопроводі. Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків для нестисливої рідини на основі дисипативної моделі. З'ясовано, що в цьому випадку припущення про нехтування компонентою радіальної швидкості є асимптотично обґрунтованим. Наведено низькочастотні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для спрощеної моделі нестисливої рідини. Дисипативна модель ґрунтується на двох припущеннях про порядки розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса стосовно часу та осьової координати. При цьому ніякі припущення щодо порядку величини компонентів швидкості не виводяться.

Ключові слова: неусталений; нестаціонарний; рух рідини; дисипативна модель; розподіл швидкостей.

Вступ. Під час розв'язку задач неусталених рухів рідини у трубах виникає потреба визначення швидкостей рідини в перерізах трубопроводу як в осьовому, так і радіальному напрямках. Класичні методи вирішення цієї задачі не дають задовільних результатів.

Перші теоретичні дослідження нестаціонарних течій нестисливої рідини в трубах, де використовують диференціальні рівняння, що описують зміни профілю швидкості і коефіцієнта тертя, проводили вже наприкінці XIX ст. (Gromeka, 1952). Модель в'язкої нестисливої рідини має широке застосування до сьогодні.

Вивчення нестаціонарних течій стисливої рідини в трубах із змінним коефіцієнтом тертя почалося тільки в 50-ті роки XX ст. При цьому застосування знайшли дві моделі – модель плоскопаралельної течії (Shablovskii, 2007; Mochalin, 2002; Jayasinghe, & Leutheusser, 1972) і дисипативна модель (Magrakvelidze, 2005; D'Suza, & Oldenburger, 1964; Barmetov, & Palishkin, 2007; Bondarenko, & Terentev, 2009; Charnyi, 1975; Popov, 1977). Хоча модель плоскопаралельної течії є простішою, широкого застосування вона не знайшла, оскільки вона не може бути теоретично обґрунтована.

Під час виведення дисипативної моделі з рівнянь Нав'є-Стокса застосовували метод, за яким поступово вводиться низка припущень і на основі їх виводиться відповідна спрощена система диференціальних рівнянь (Magrakvelidze, 2005; D'Suza, & Oldenburger, 1964; Barmetov, & Palishkin, 2007; Bondarenko, & Terentev, 2009; Charnyi, 1975; Popov, 1977). За такого висновку залишається незрозумілою "замкнутість" зроблених припущень і отриманої моделі, а також зв'язки між введеними припущеннями.

На основі ґрунтовних досліджень отримано характеристики розповсюдження збурень у циліндричних трубах за рівняннями Нав'є-Стокса для окремих випадків при певних додаткових припущеннях (Adamkowski, & Lewandowski, 2006; Rakhmatullin, & Kim, 2006; Girgidov, 2009; Gnativ, & Mikitin, 2012; Gnativ, 2013). У цих роботах головна увагу приділено вивченню характеристики поширення збурень, а не розробленню та обґрунтуванню відповідних спрощених моделей.

Об'єкт і методи дослідження. Застосовуючи останній метод, у цій роботі проведено систематичне виведення й обґрунтування дисипативної моделі. Для цього

Інформація про авторів:
Яхно Олег Михайлович, д-р техн. наук, професор, кафедра прикладної гідроаеромеханіки і механотроніки. **Email:** oleg.yakhno@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-9522-5549
Гнатів Роман Маріянович, д-р техн. наук, доцент, кафедра гідравліки та сантехники. **Email:** gnativ.roman.m@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-4931-7493
Гнатів Ігор Романович, аспірант, кафедра екології. **Email:** gnativ13@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-2987-1673
Цитування за ДСТУ: Яхно О. М., Гнатів Р. М., Гнатів І. Р. Математична модель для дослідження нестаціонарних течій нестисливої рідини у трубах. Науковий вісник НЛТУ України. 2019, т. 29, № 10. С. 71–74.
Citation APA: Yahno, O. M., Hnativ, R. M., & Hnativ, I. R. (2019). Mathematical model for the study of unsteady flows of an incompressible fluid in pipes. *Scientific Bulletin of UNFU, 29*(10), 71–74. https://doi.org/10.36930/40291013

на основі лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для стисливої рідини знаходяться елементарні розв'язки цих рівнянь, що відповідають хвильовим рухам рідини в напрямку осі труби. Ввівши певні припущення про порядки фізичних величин і параметри розв'язків та застосовуючи асимптотичний аналіз, проводяться спрощення цих елементарних розв'язків. Наближені розв'язки, що отримуються внаслідок такого аналізу, використовуються як елементарні розв'язки відповідної дисипативної моделі. Стає зрозумілим, що дисипативна модель ґрунтується на двох припущеннях про порядки розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса стосовно часу та осьової координати. При цьому ніякі припущення щодо порядку величини компонентів швидкості не виводяться.

Результати дослідження. Розглянемо випадки нестисливої рідини і виведемо для неї математичну модель для опису низькочастотних розв'язків, виходячи з лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності для осесиметричних рухів:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 V_z + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\rho c^2 \theta + \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

де: $$\theta = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5)$$

де: v_z, v_r – складові швидкості в напрямку осей z, r; p – тиск; ρ – густина рідини; μ – коефіцієнт в'язкості; c – швидкість звуку в рідині; t – час.

Перейдемо до безрозмірних координат ξ, η, τ та безрозмірних змінних u_ξ, u_η, ϑ, q так:

$$\xi = \frac{z}{R}, \ \eta = \frac{r}{R}, \ \tau = \frac{c}{R}t, \quad (6)$$

$$u_\xi = \frac{v_z}{U}, \ u_\eta = \frac{v_r}{U}, \ \vartheta = \frac{R\theta}{U}, \ q = \frac{1}{cpU}p, \quad (7)$$

де: R – радіус труби; U – нормуюча швидкість.

У нових змінних рівняння (1)-(3) і співвідношення (4), (5) набувають вигляду:

$$\beta \frac{\partial u_\xi}{\partial \tau} = -\beta \frac{\partial q}{\partial \xi} + \tilde{\nabla}^2 u_\xi + \frac{1}{3}\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}, \quad (8)$$

$$\beta \frac{\partial u_\eta}{\partial \tau} = -\beta \frac{\partial q}{\partial \eta} + \tilde{\nabla}^2 u_\eta - \frac{u_\eta}{\eta^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \quad (9)$$

$$\vartheta + \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0, \quad (10)$$

$$\vartheta = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\eta}{\eta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, \quad (11)$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (12)$$

де $$\beta = \frac{cR}{\nu}, \ \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (13)$$

Розглянемо частинні розв'язки системи (8)-(11) у вигляді:

$$u_\xi = U_\xi(\eta) e^{i(\omega\tau - k\xi)}, \ u_\eta = U_\eta(\eta) e^{i(\omega\tau - k\xi)}, \ \vartheta = \theta(\eta) e^{i(\omega\tau - k\xi)},$$
$$q = Q(\eta) e^{i(\omega\tau - k\xi)}. \quad (14)$$

Підставляючи вираз (13) в рівняння (8)-(11), отримуємо для визначення функцій U_ξ, U_η, θ, Q систему:

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - i\omega\beta)U_\xi + ik\beta Q - \frac{1}{3}ik\theta = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{\tilde{\nabla}}^2 U_\eta - (\frac{1}{\eta^2} + i\omega\beta)U_\eta - \beta \frac{dQ}{d\eta} + \frac{1}{3}\frac{d\theta}{d\eta} = 0, \quad (16)$$

$$\theta + i\omega Q = 0, \quad (17)$$

$$\theta = \frac{dU_\eta}{d\eta} + \frac{1}{\eta}U_\eta - ikU_k. \quad (18)$$

Введемо таке позначення

$$\tilde{\tilde{\nabla}}^2 = \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - k^2. \quad (19)$$

За нестисливості в рівняннях (8)-(12) необхідно прийняти:

$$\vartheta = 0. \quad (20)$$

Відповідно система (15)-(18) має вигляд:

$$(\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - i\omega\beta)U_\xi + ik\beta Q = 0, \quad (21)$$

$$\left[\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - (\frac{1}{\eta^2} + i\omega\beta) \right] U_\eta - \beta \frac{dQ}{d\eta} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial U_\eta}{d\eta} + \frac{1}{\eta}U_\eta - ikU_\xi = 0. \quad (23)$$

З рівнянь (21)-(23) випливає, що

$$\left[\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - (\frac{1}{\eta^2} + i\omega\beta) \right] \left[\tilde{\tilde{\nabla}}^2 - \frac{1}{\eta^2} \right] U_\eta = 0. \quad (24)$$

Розв'язок рівняння (24), яке є кінцевим при $\eta = 0$, має також вигляд

$$U_\eta = B_1 J_1(C_1\eta) + B_2 J_1(C_2\eta). \quad (25)$$

де тепер: $$C_1^2 = -k^2 - i\beta\omega, \quad (26)$$

$$C_2^2 = -k^2. \quad (27)$$

З рівняння (23) і співвідношення (25) виходить, що компонента швидкості U_ξ має також вигляд

$$U_\xi = A_1 J_0(C_1\eta) + A_2 J_0(C_2\eta), \quad (28)$$

причому, в цьому випадку у співвідношеннях

$$B_1 = m_1 A_1, \ B_2 = m_2 A_2, \quad (29)$$

потрібно взяти $$m_1 = \frac{ik}{C_1}, \ m_2 = \frac{ik}{C_2}. \quad (30)$$

З граничних умов при $\eta = 1$

$$U_\xi = 0, \ U_\eta = 0. \quad (31)$$

Отримуємо: $$A_1 J_0(C_1) + A_2 J_0(C_2) = 0, \quad (32)$$

$$m_2 A_1 J_1(C_1) + m_2 A_2 J_1(C_2) = 0. \quad (33)$$

Для того, щоб система (32), (33) мала розв'язки, повинно задовольнятись характеристичне рівняння

$$m_1 J_0(C_2) J_1(C_1) - m_2 J_0(C_1) J_1(C_2) = 0. \quad (34)$$

Якщо розглядати тільки низькочастотні розв'язки та ввести припущення:

$$\left| \frac{\beta}{\omega} \right| >> 1 \ \text{або} \ |\beta| >> |\omega|, \quad (35)$$

$$|\omega\beta| >> |\kappa^2|, \quad (36)$$

то співвідношення (26, 27, 30) набувають вигляду:

$$C_1^2 = -i\beta\omega, \ C_2^2 = -k^2 \quad (37)$$

та $$m_1 = \frac{ik}{C_1}, \ m_2 = 1. \quad (38)$$

Відповідно компоненти швидкості, тиску і характеристичного рівняння мають вигляд:

$$U_{\xi} = A_1[J_0(C_1\eta) - J_0(C_1)] \,, \quad (39)$$

$$U_{\eta} = ikA_1\left[\frac{J_1(C_1\eta)}{J_1C_1} - \frac{J_0(C_1)\eta}{2}\right], \quad (40)$$

$$Q = -\frac{\omega A_1}{k} J_0(C_1) \,, \quad (41)$$

$$k\left[2J_1(C_1) - C_1J_0(C_1)\right] = 0 \,. \quad (42)$$

З рівняння (42) випливає, що

$$k = 0. \quad (43)$$

З огляду на рівність (43) із співвідношення (40) отримуємо, що

$$U_{\eta} = 0 \,. \quad (44)$$

Звідси бачимо, що у випадку нестисливої рідини при виведенні спрощеної моделі припущення $U_{\eta} = 0$ є цілком обґрунтованим.

Якщо враховувати порядок складових в рівнянні (21)-(23) за співвідношеннями (35), (36), (39), (44), їх можна спростити до вигляду:

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} - i\omega\beta\right)U_{\xi} + ik\beta Q = 0 \,, \quad (45)$$

$$\frac{dQ}{d\eta} = 0 \,. \quad (46)$$

Відповідне вихідне рівняння для опису руху нестисливої рідини в циліндричній трубі має загальновідомий вигляд

$$\frac{\partial^2 u_{\xi}}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u_{\xi}}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial u_{\xi}}{\partial\tau} - \beta\frac{\partial q}{\partial\xi} = 0 \,. \quad (47)$$

Тут допускається, що

$$\frac{\partial q}{\partial\eta} = 0 \,. \quad (48)$$

Обговорення отриманих результатів. Розв'язок рівнянь для опису руху нестисливої рідини в циліндричній трубі, використовуючи модель із врахуванням дисипативних процесів течії в'язкої рідини, дало змогу отримати розподіл полів швидкостей із задовільною похибкою для інженерних розрахунків.

Проведені експериментальні дослідження неусталених потоків [15] рідини в циліндричних трубопроводах дали змогу отримати розподіл швидкостей, які підтвердили відповідність отриманих розрахунків на основі дисипативної моделі.

Визначено перспективні напрями досліджень, які уможливлять подальший розвиток пропонованого підходу для важливих практичних задач.

Висновки. Розв'язано задачу неусталених рухів рідини в трубах для визначення розподілу швидкостей рідини в перерізах трубопроводу в осьовому та радіальному напрямках. Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків для нестисливої рідини на основі дисипативної моделі. З'ясовано, що в цьому випадку припущення про нехтування компонентою радіальної швидкості є асимптотично обґрунтованим.

Використана модель із врахуванням дисипативних процесів течії в'язкої рідини, яку досліджували варіаційним методом з урахуванням початкових і граничних умов, дає змогу отримати розподіл полів швидкостей. Наведено низькочастотні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса для спрощеної моделі нестисливої рідини.

References

Adamkowski, A., & Lewandowski, M. (2006). Experimental examination of unsteady friction models for transient pipe flow simulation. *Trans. ASME. J. Fluids Eng., 128*(6), 1351–1363.

Barmetov, Iu. P., & Palishkin, D. A. (2007). Matematicheskie modeli gidravlicheskogo udara. *Materialy 45 Otchetnoi nauchnoi konferentcii za 2006 god Voronezhskoi gosudarstvennoi tekhnologicheskoi akademii.* (Part 2), (pp. 106–107). Voronezh: VGTA. [In Russian].

Bondarenko, N. I., & Terentev, Iu. I. (2009). *O neustanovivshemsia dvizhenii szhimaemoi zhidkosti v napornom truboprovode.* Moscow: Moscow State Technical University, 54 p. Dep. v VINITI RAN 15.10.2009, № 620-V2009. [In Russian].

Charnyi, I. A. (1975). *Neustanovivsheesia dvizhenie realnoi zhidkosti v trubakh.* Moscow: Nedra, 296 p. [In Russian].

D'Suza, A. F., & Oldenburger, R. (1964). Dinamicheskaia kharakteristika gidravlicheskikh truboprovodov. *Teor. osn. inzh. rasch., 3,* 196–205. [In Russian].

Girgidov, A. D. (2009). O dissipatcii energii pri dvizhenii neszhimaemoi zhidkosti. *Dokl. RAN. 426*(5), 626–628. [In Russian].

Gnativ, R. M. (2013). Doslidzhennia rozpodilu shvidkostei pri neustalenii techiї ridini v truboprovodi. *Promislova gidravlika i pnevmatika, 2*(40), 57–59. [In Ukrainian].

Gnativ, R. M., & Mikitin, M. I. (2012). Asimptotichnii metod vivedennia disipativnoї modeli neustalenogo potoku ridini. *Promislova gidravlika i pnevmatika, 1*(35), 40–44. [In Ukrainian].

Gromeka, I. S. (1952). K teorii dvizheniia zhidkosti v uzkikh tcilindricheskikh trubakh. *Sobr. soch. AN SSSR,* 149–171. [In Russian].

Jayasinghe, D. A. P., & Leutheusser, H. J. (1972). Pulsatile Waterhammer Subject to Laminar Friction. *J. Fluids Eng, 94*(2), 467–472.

Magrakvelidze, T. (2005). K voprosu raspredeleniia skorostei pri turbulentnom techenii zhidkosti v krugloi trube. *Sb. trudov In-t sistem upr. AN Gruzii, 9,* 96–101. [In Russian].

Mochalin, E. V. (2002). Variatcionnaia formulirovka zadachi o prostranstvennom dvizhenii neszhimaemoi zhidkosti. *Sobr. nauchn. trudov DGMI, 15,* 269–280. Alchevsk: DGMI. [In Russian].

Popov, D. N. (1977). *Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem.* Moscow: Mashinostr., pp. 185–249. [In Russian].

Rakhmatullin, Sh. I., & Kim, D. P. (2006). Vliianie stepeni turbulentnosti i chastoty turbulentnykh pulsatcii na gidravlicheskoe soprotivlenie krugloi truby. *Neft. kh-vo, 11,* 110–111. [In Russian].

Shablovskii, O. N. (2007). Neklassicheskie dissipativnye protcessy v neszhimaemoi zhidkosti. *Fundam. fiz.-mat. probl. i modelir. tekhn.-tekhnol. sistem, 10,* 96–100. [In Russian].

O. M. Yahno[1], R. M. Hnativ[2], I. R. Hnativ[3]

[1] *National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine*
[2] *Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*
[3] *Lviv National Agrarian University, Dublyany, Ukraine*

MATHEMATICAL MODEL FOR THE STUDY OF UNSTEADY FLOWS OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID IN PIPES

The authors have analysed some scientific works on solving problems of non-stationary movement of fluid in cylindrical tubes. It has been established that when solving problems of unsteady fluid motions in pipes, it becomes necessary to determine fluid velocities in pipeline sections both in axial and radial directions. Classical methods for solving this problem do not give satisfactory results. The purpose of the research is to improve the method of calculating unsteady fluid flows based on a dissipative model. The studies

used a model with allowance for dissipative flow of a viscous fluid, which was studied by the variational method with regard to the initial and boundary conditions. The object of the research is hydraulic processes in unsteady viscous fluid flows in a cylindrical pipeline. The paper proposes an improved method for calculating unsteady flows for an incompressible fluid based on a dissipative model. We have found that in this case the assumption that the radial velocity component is neglected is asymptotically justified. Low-frequency solutions of the Navier-Stokes equations for a simplified model of an incompressible fluid are given. The dissipative model is based on two assumptions about the order of the solutions of the Navier-Stokes equations for time and axial coordinate. In this case, assumptions about the order of magnitude of the components of speed are not displayed. The solution of equations for describing the motion of incompressible fluid in a cylindrical tube using a model concerning the dissipative processes of the viscous fluid flow allowed obtaining the distribution of velocity fields with a satisfactory error for engineering calculations. Prospective areas of the research were identified. These areas would enable further development of the proposed approach for important practical tasks.
Keywords: unsteady; non-stationary; fluid motion; dissipative model; velocity distribution.