

Пукач П.Я. Колебания в некоторых сильно нелинейных механических системах с многими степенями свободы

Аналитические методы для нелинейных систем с одной степенью свободы обобщены на определенный класс нелинейных систем с конечным числом степеней свободы. Применение аналитических подходов на базе сочетания классических методов нелинейной механики и волновой теории движения дает возможность сделать выводы по важным вопросам анализа динамических процессов. Выводы, полученные с помощью аппарата специальных функций, позволяют получить характеристики динамики сильно нелинейных систем со многими степенями свободы, вытекающими из анализа решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные колебания, сильно нелинейная система, резонанс, специальные функции, амплитудно-частотная характеристика.

Pukach P.Ya. Oscillations in Some Strongly Nonlinear Mechanical Systems with Many Degrees of Freedom

Analytical methods for nonlinear systems with one degree of freedom generalized to a class of nonlinear systems with finite number of degrees of freedom are generalised. The application of analytical approaches based on the combination of classical methods of nonlinear mechanics and the wave theory of motion allows drawing general conclusions on important issues analysis of dynamic processes. Conclusions obtained using the apparatus of special features yield characteristics of the dynamics of strongly nonlinear systems with many degrees of freedom arising from the analysis of the solutions of the corresponding differential equations.

Key words: nonlinear oscillations, strong nonlinear system, resonance, special functions, amplitude-frequency characteristic.

УДК 519.711 Доц. А.І. Головатий, канд. техн. наук – Тернопільський НТУ ім. Івана Пулюя; проф. В.М. Теслик, д-р техн. наук; асист. А.Я. Зелінський, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ П'ЄЗОРЕЗИСТИВНОГО МІКРОДАВАЧА ТИСКУ ДЛЯ КОМПОНЕНТНОГО РІВНЯ ПРОЕКТУВАННЯ¹

Розроблено математичну модель п'єзореzystивного МЕМС давача тиску. Змодельовано реакцію мікродавача, спричинену дією прикладеного тиску, а саме механічні напруження в його діафрагмі, її максимальний прогин, зміну опорів вимірювальних п'єзореzystорів, вихідну напругу мостової схеми Вітстона. Досліджено вплив геометричної форми і конструктивних розмірів діафрагми на її максимальний прогин і чутливість мікродавача від прикладеного тиску. Побудована модель мікродавача тиску може бути використана для аналізу його вихідних параметрів на компонентному рівні проектування.

Ключові слова: мікроелектромеханічні системи (МЕМС), п'єзореzystивний МЕМС давач тиску, модель, автоматизоване проектування

Вступ. Технології МЕМС дають змогу виготовляти пристрої, в яких мініатюрні механічні структури інтегровані з мікроелектронними компонентами. Мікромеханічні давачі тиску були одними з найперших пристроїв, виготовлених за мікромашинною технологією [1]. Мікродавачі тиску використовуються в медицині, автомобільній промисловості, як барометр у смартфонах, планшетних комп'ютерах, спортивних годинниках, метеостанціях, як висотомір для виз-

начення рівня місця знаходження, військова і цивільна аерокосмічні галузі (вимірювальні модулі до двигунів, тиск у кабіні, інструментарій контролю польоту, гідравлічні системи) та в інших областях [2-4].

Важливе значення під час проектування таких складних гетерогенних систем як МЕМС мають системи автоматизованого проектування [5], які дають змогу скоротити термін розроблення інтегральних пристроїв і зменшити їх вартість. Проведений аналіз відкритих літературних джерел та інтернет-ресурсів у сфері проектування та моделювання МЕМС дає змогу стверджувати, що створення якісно нових математичних і комп'ютерних поведінкових моделей [6, 7] інтегральних мікроелектромеханічних давачів для оптимізації їх конструктивних параметрів з технічними характеристиками і покращення ефективності проектування є актуальним завданням сьогодення [4].

Принцип дії та математична модель п'єзореzystивного МЕМС давача тиску. На рис. 1 схематично зображено конструкцію МЕМС п'єзореzystивного давача тиску [3]. Мікродавач складається з діафрагми (мембрани) і чотирьох тензодавчів (п'єзореzystорів) напилених по центру країв діафрагми, таке розміщення обумовлене тим, що в цих місцях діафрагма піддається максимальному навантаженню за дії зовнішнього тиску. Розміщення п'єзореzystорів у місцях з максимальною деформацією дає змогу отримати максимальну чутливість, оскільки зміна питомого опору п'єзореzystивного матеріалу є прямо пропорційною до прикладеного навантаження [4, 8-10].

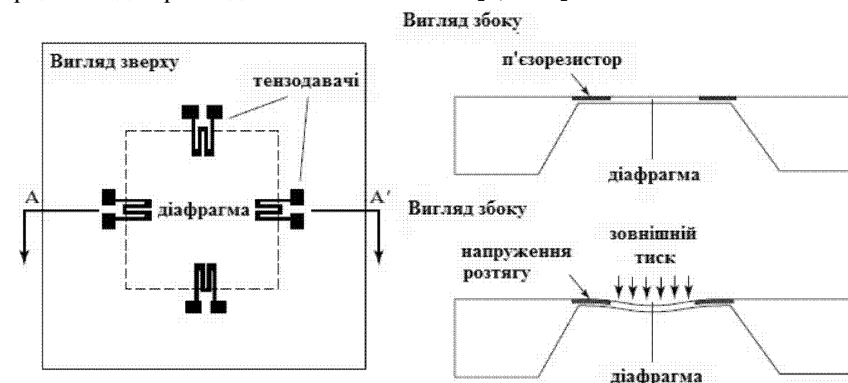


Рис. 1. Схематичне зображення п'єзореzystивного МЕМС давача тиску

Варто зазначити, що максимальний прогин відбувається в центрі діафрагми. Максимальне напруження виникає у центральних точках двох протилежних країв і в центрі мембрани (діафрагми). Напруження вздовж краю і центру мають різні знаки. Положення з максимальними значеннями напруження є найбільш придатні для розміщення п'єзореzystивних давачів і реєстрації деформації мембрани. Аналіз деформації мембрани є складнішим, ніж консольної балки, оскільки мембрана є двовимірною по природі. Тому прогин діафрагми (мембрани) п'єзореzystивного МЕМС давача тиску, спричиненого дією прикладеного тиску P , розпочнемо з такого диференціального рівняння [11, 12]:

¹ Acknowledgement. This research was supported by the FP7-PEOPLE "Marie Curie Actions (IRSES)" Project, entitled "Developing Multidomain MEMS Models for Educational Purposes", acronym: EduMEMS, Number: 269295.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{P}{D}, \quad (1)$$

де: P – тиск прикладений до мембрани товщиною h ; D – жорсткість при згині залежить від властивостей матеріалу $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, де: E – модуль Юнга і ν – коефіцієнт Пуассона.

Оскільки не існує точного розв'язання рівняння, одним із підходів є поліноміальна апроксимація. Цей підхід використовується для аналізу згину і напруженого стану діафрагми (мембрани) різної форми. Моменти і напруження при прогині діафрагми можуть бути визначені за формулами:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (\sigma_{xx})_{\max} = \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2}, \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \frac{6(M_y)_{\max}}{h^2}, \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (\sigma_{xy})_{\max} = \frac{6(M_{xy})_{\max}}{h^2},$$

де: M_x, M_y, M_{xy} – моменти прикладені до прогину мембрани; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – напруження, що діють на мембрану; h – товщина мембрани, відповідно.

Результати дослідження. Розглянемо ізотропну діафрагму круглої форми з радіусом r , яку зображено на рис. 2. Для спрощення обчислення деформації мембрани $w(r)$ будемо вважати, що вона залежить тільки від відстані від її центру r і обчислюється за формулою $w(r) = \frac{Pa^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2$.

Нехай W – результуюча сила, що діє на мембрану, $W = (\pi a)P$ і $m = 1/\nu$. Тоді максимальні напруження визначають з використанням таких формул:

$$(\sigma_{rr})_{\max} = \frac{3W}{4\pi h^2} \quad \text{та} \quad (\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{3\nu W}{4\pi h^2}.$$

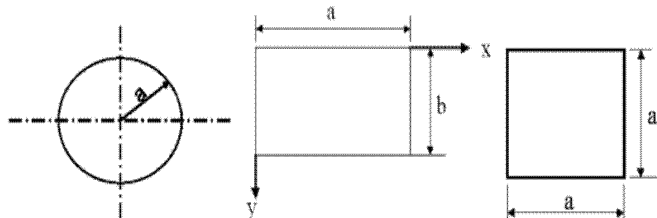


Рис. 2. Схематичне зображення різних форм діафрагми п'єзорезистивного мікродавача тиску

Обидва ці напруження в центрі мембрани можна обчислити за формулою $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{3\nu W}{8\pi h^2}$. Максимальний прогин мембрани виникає в її центрі і може бути обчислений з використанням такого виразу: $w_{\max} = -\frac{3W(m^2-1)a^2}{16\pi E m^2 h^3}$.

Визначимо мінімальну товщину круглої мембрани мікродавача тиску, виготовленого з кремнію. Візьмемо діаметр $d = 600$ мкм; тиск прикладений до діафрагми $P = 20$ МПа; допустима міцність кремнію $\sigma_y = 7000$ МПа і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,25$. Тоді отримуємо:

$$(\sigma_{rr})_{\max} = \frac{3W}{4\pi h^2}, \quad h = \sqrt{\frac{3W}{4\pi(\sigma_{rr})_{\max}}}, \quad (\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{3\nu W}{4\pi h^2}, \quad h = \sqrt{\frac{3W}{4\pi(\sigma_{\theta\theta})_{\max}}}.$$

Використавши умову, що $\sigma_{rr} < \sigma_y = 7000$ МПа і $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_y = 7000$ МПа, $W = (\pi a^2)P = 3,14 \times (300 \times 10^{-6})^2 \times (20 \times 10^6) = 5,7$ Н. Отже, отримуємо мінімальну товщину мембрани $h_{\min} = 13,9$ мкм.

Розв'язком рівняння (1) для квадратної діафрагми є прогин $w(x, y)$, який змінюється під дією рівнорозподіленого тиску P і може бути визначений таким чином: $w(x, y) = \frac{1}{47} \frac{Pa^4}{D} \left(\frac{1-x^2}{\pi a^2}\right)^2 \left(\frac{1-y^2}{\pi a^2}\right)^2$.

Для діафрагми квадратної форми максимальне напруження виникає в середині кожного з її країв:

$$\sigma_{\max} = \frac{0,308Pa^2}{h^2}. \quad (2)$$

Максимальний прогин діафрагми може бути визначений за формулою

$$w_{\max} = -\frac{0,0138Pa^4}{Eh^3}. \quad (3)$$

Стиск і розтяг у центрі діафрагми (мембрани) визначаємо з таких формул: $\sigma = \frac{6P(m+1)a^2}{47mh^2}$ і $\varepsilon = \frac{1-\nu}{E}\sigma$. Тоді визначимо максимальне напруження і прогин квадратної діафрагми, виготовленої з кремнію. При прикладеному тиску $P = 20$ МПа. Діафрагма має довжину країв $a = 600$ мкм, і товщину $h = 14$ мкм. За формулами (2) і (3) обчислюємо максимальне напруження і максимальний прогин діафрагми мікродавача тиску: $\sigma_{\max} = 9040 \times 10^6$ Па і $w_{\max} = -43 \times 10^{-6}$ м.

У випадку діафрагми прямокутної форми (рис. 2), прогин діафрагми може бути спрощено описаний таким рівнянням:

$$w(x, y) = \frac{P(1-\nu^2)}{2Eh^3} \left(\frac{\pi^2 a^2 - x^2}{\frac{\pi^4 a^4}{256} + a^4} \right) (a^2 - y^2)^2.$$

Максимальне напруження і прогин діафрагми прямокутної форми визначимо з використанням таких виразів:

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \beta \frac{Pb^2}{h^2}, \quad w_{\max} = \alpha \frac{Pb^4}{Eh^3}, \quad (4)$$

де коефіцієнти α і β можна отримати з табл. 1.

Табл. 1. Значення коефіцієнтів α і β

a/b	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
α	0,0138	0,0188	0,0226	0,0251	0,0267	0,0277	0,0284
β	0,3078	0,3834	0,4356	0,4680	0,4872	0,4974	0,5000

Нехай прямокутна діафрагма має товщину $h = 14$ мкм, довжину $a = 752$ мкм та ширину $b = 376$ мкм і виготовлена з кремнію. Визначимо максимальне значення напруження і прогин діафрагми, коли прикладений тиск $P = 20$ МПа. Чотири краї діафрагми жорстко закріплені. Спочатку потрібно визначити коефіцієнти α і β із співвідношення $a/b = 752/376 = 2,0$ у заданій таблиці. Отже, з формул (4) отримаємо максимальне напруження і максимальний прогин у центрі діафрагми мікродавача тиску:

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \beta \frac{Pb^2}{h^2} = 7292,8 \times 10^6 \text{ Па}, \quad w_{\max} = -\alpha \frac{Pb^4}{Eh^3} = -21,76 \times 10^{-6} \text{ м}.$$

Для вимірювання вихідної напруги використано мостову схему Вітстона, яку утворюють чотири п'єзореzystори R_1, R_2, R_3, R_4 та схематично зображено на рис. 3. За відсутності прикладеного тиску міст Вітстона збалансований і ΔR дорівнює нулю. Коли прикладено зовні тиск, опір п'єзореzystорів змінюється, що призводить до розбалансування мостової схеми і зміни вихідної напруги. Більший прикладений тиск призводить до більшого навантаження на мембрану і більшої зміни вихідної напруги. Тому вихідна напруги мостової схеми Вітстона є прямим індикатором прикладеного тиску [13, 14].

Опір кремнієвого п'єзореzystора є функцією прикладеного напруження в матеріалі і орієнтації п'єзореzystорів. Зміна опору від напруження можна визначити за формулою $\frac{\Delta R}{R} = \pi_l \sigma_l + \pi_t \sigma_t$, де: π_l і π_t – поздовжній і поперечний п'єзореzystивні коефіцієнти відповідно, σ_l і σ_t – поздовжнє і поперечне механічне напруження.

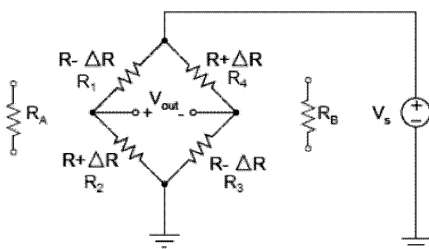


Рис. 3. Мостова схема Вітстона утворена п'єзореzystорами розміщених на діафрагмі мікродавача тиску

П'єзореzystивні коефіцієнти залежать від домішкової концентрації, орієнтації кристалу і температури. Значення п'єзореzystивних коефіцієнтів зменшується із зростанням температури і концентрації домішок. Значення π_l і π_t для відповідного матеріалу залежать від концентрації домішок і їх визначають експериментальним шляхом [15, 16]. У табл. 2 наведено типові значення поздовжнього і поперечного п'єзореzystивних коефіцієнтів для кремнію.

Табл. 2. Поздовжні і поперечні п'єзореzystивні коефіцієнти для кремнієвої підкладки <100> з п'єзореzystорами, орієнтованими вздовж <110>

Тип підкладки	$\pi_l, \times 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$	$\pi_t, \times 10^{-12} \text{ Па}^{-1}$
<i>n</i> -тип	-316	-176
<i>p</i> -тип	718	-663

Оскільки максимальне напруження на п'єзореzystор для діафрагми квадратної форми з стороною $2a$ і товщиною h і при рівнорозподіленому прикладеному тискові $\epsilon \sigma_{\max} = P \left(\frac{a}{h}\right)^2$, то зміна опору $\frac{\Delta R}{R} = \pi_l \left(\frac{a}{h}\right)^2 (1-\nu) P$, де коефіцієнт Пуассона. З рис. 3 і вважаючи, що всі резистори рівні, то вихідну напругу мостової схеми визначимо за такою формулою: $V_{out} = V_s \cdot \left(\frac{R + \Delta R}{2R} - \frac{R - \Delta R}{2R}\right) = V_s \cdot \frac{\Delta R}{R}$, $V_{out} = \frac{\Delta R}{R} V_s$ або для квадратної форми діафрагми вихідна напруга: $V_{out} = \pi_l \left(\frac{a}{h}\right)^2 (1-\nu) P \cdot V_s$, і для діафрагми прямокутоної форми вихідна напруга: $V_{out} = \pi_l \left(\frac{b}{h}\right)^2 (1-\nu) P \cdot V_s$. Оскільки вимірювальні п'єзореzystори сконфігуровані у міст Вітстона, то співвідношення між напругою живлення і вихідною напругою буде такою: $\frac{V_{out}}{V_s} = \frac{\Delta R}{R}$.

Чутливість мікродавача тиску може бути визначена із вихідної напруги і прикладеного тиску: $\text{Чутливість}(S) = \frac{\text{вихідна_напруга}}{\text{прикладений_тиск}} = \frac{V_{out}}{P}$ або ж відносно зміни опору п'єзореzystорів та напруги живлення мостової схеми Вітстона: $S = \frac{V_{out}}{P} = \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{V_s}{P}$.

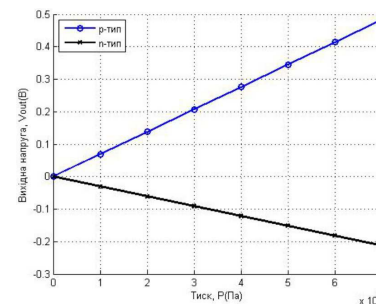


Рис. 4. Залежність вихідної напруги від прикладеного тиску для *p*- і *n*-типів квадратної діафрагми

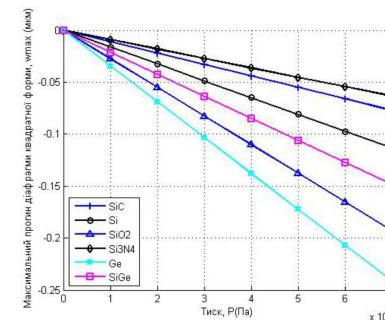


Рис. 5. Залежність прогину квадратної діафрагми від прикладеного тиску для різних матеріалів

На рис. 4 і 5 наведено графіки залежностей вихідної напруги мостової схеми Вітстона для підкладок p - та n -типу, і залежність максимального прогину діафрагми від прикладеного тиску для різних матеріалів. З графіків випливає, що найбільший прогин діафрагми можна спостерігати для германію Ge 0,25 мкм і найменший для нітриду кремнію Si_3N_4 0,05 мкм за дії однакового тиску. З аналізу результатів моделювання найбільш чутливою є діафрагма, виготовлена з германію.

Висновок. Розроблено математичну модель оптимізації конструктивних параметрів п'єзореzystивного мікродавача тиску з його технічними характеристиками. Змодельовано реакцію діафрагми мікродавача, а саме її механічні напруження, спричинені в його діафрагмі, її максимальний прогин та зміну вихідної напруги мостової схеми Вітстона від прикладеного тиску. Досліджено вплив геометричної форми і конструктивних розмірів діафрагми на її максимальний прогин і чутливість мікродавача від прикладеного тиску. З отриманих результатів видно, що діафрагма квадратної форми піддається найбільшому напруженню у всіх трьох випадках і є найбільш придатною для давачів тиску, тому що сильне напруження, спричинене прикладеним тиском, дає високу чутливість.

Література

1. Ventsel E. Thin Plates and Shells / E. Ventsel, T. Krauthammer // Theory, Analysis, and Applications, Marcel Dekker AG, 2001. – 651 p.
2. Suja K.J. Investigation on better Sensitive for High Pressure Measurement / K.J. Suja, E. Surya Raveendran, R. Komaragiri // International Journal of Computer Applications. – Vol. 73, No. 8, May 2013. – Pp. 40-47.
3. Madhavi K.Y. Murthy / K.Y. Madhavi, M. Krishna, C.S. Chandrasekhara // International Journal of Computer Applications. – Vol. 70, No. 3, May 2013. – Pp. 20-26.
4. Shivam Kohli, Anish Saini. MEMS Based Pressure Sensor Simulation For Healthcare And Biomedical Applications // International Journal of Engineering Sciences & Emerging Technologies, Dec. 2013. – Vol. 6, Issue 3. – Pp. 308-315.
5. Teslyuk V., Pereyema M., Denysyuk P., Chimich I. Computer-aided system for MEMS design "ProMIP" // Perspective Technologies and Methods in MEMS Design – Proceeding of the 2nd International Conference of Young Scientists, (MEMSTECH 2006). – 2007. – Pp. 49-52.
6. Zaharyuk R., Teslyuk V., Farmaga I., AlShawabkeh H.A.Y. VHDL-AMS – Model for capacitive interdigital accelerometer // Perspective Technologies and Methods in MEMS Design – Proceeding of the 4th International Conference of Young Scientists, (MEMSTECH 2008). – 2008. – Pp. 134-137.
7. Holovaty A., Teslyuk V., Lobur M. Verilog-AMS model of comb-drive sensitive element of integrated capacitive microaccelerometer for behavioral level of computer-aided design // ECON-TECHMOD. – 2014. – Vol. 3, No. 4. – Pp. 49-53.
8. Shaikh M.Z., Kodad S.F., Jinaga B.C. Performance analysis of piezoresistive mems for pressure measurement // Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2008. – Pp. 227-231.
9. Kattabooman N., Sarath S., Komarigiri R. VLSI Layout Based Design Optimization of a Piezoresistive MEMS Pressure Sensors Using COMSOL // Proceedings of the 2012 COMSOL Conference in Bangalore. – Pp. 5.
10. Suja K.J., Vidva Gopal T.V., Komaragiri R. Optimized Design of Double Diaphragm Based MEMS Pressure Sensor for Wider Range and Better Sensitivity // International Journal of Emerging Science and Engineering (IJESE). – Vol. 2, Issue-1, November 2013. – Pp. 65-70.
11. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М. : Изд-во "Наука", 1976. – 608 с.
12. Geça M., Kociubinski A. Design, modeling and simulation of MEMS pressure sensors // Proc. Of SPIE. – Vol. 8903, 2013. – Pp. 10.
13. Nabiollah Abol Fathi and Zohreh Allah Moradi. Design and Optimization of Piezoresistive MEMS Pressure Sensors Using ABAQUS // Middle East Journal of Scientific Research. – Vol. 21 (12): 2299-2305, 2014. – Pp. 2299-2305.

14. Lung-Jieh Yang, Chen-Chun Lai, Ching-Liang Dai, Pei-Zen Chang. A Piezoresistive Micro Pressure Sensor Fabricated by Commercial DPDM CMOS Process // Tamkang Journal of Science and Engineering. – Vol. 8, No. 1, 2005. – Pp. 67-73.
15. Barlian A. Review: Semiconductor piezoresistance for microsystems / A. Barlian, W.T.Park, J. Mallon, A. Rastegar, B. Pruitt // Proceedings of the IEEE. – Vol. 97(3), 513 (2009).
16. Richter J. Piezoresistance in p-type silicon revisited / J. Richter, J. Pedersen, M. Brandbyge, E.V. Thomsen, O. Hansen // Journal of Applied Physics. – Vol. 104(2), 023715 (2008).

Головатый А.И., Теслюк В.Н., Зелинский А.Я. Математическая модель пьезорезистивного микросенсора давления для компонентного уровня проектирования

Разработана математическая модель пьезорезистивного МЕМС сенсора давления. Смоделирована реакция микросенсора, вызванная действием приложенного давления, а именно механические напряжения в его диафрагме, ее максимальный прогиб, изменения сопротивлений пьезорезисторов, исходное напряжение мостовой схемы Витстона. Исследовано влияние геометрической формы и конструктивных размеров диафрагмы на ее максимальный прогиб и чувствительность микросенсора от приложенного давления. Разработанная модель микросенсора давления может быть использована для анализа его исходных параметров на компонентном уровне проектирования.

Ключевые слова: микроэлектромеханические системы (МЕМС), пьезорезистивный МЕМС сенсор давления, модель, автоматизированное проектирование.

Holovaty A.I., Teslyuk V.M., Zelinsky A. Yu. The Mathematical Model of Piezoresistive Pressure Microsensor for a Component Design Level

A mathematical model of the piezoresistive microelectromechanical systems (MEMS) pressure sensor has been proposed. The proposed model makes possible to simulate the reaction of the microsensor depending on the applied external pressure, induced mechanical stresses in the microsensor diaphragm, changes of the resistances of the sensing piezoresistors, output voltage of the Wheatstone bridge for its construction parameters. The influence of the geometric shapes and constructive parameters of the diaphragm on its maximum deflection and the microsensor sensitivity depending on the applied pressure is investigated. The proposed model can be used to conduct the analysis of the pressure microsensor at the component design level.

Key words: microelectromechanical systems (MEMS), piezoresistive MEMS pressure sensor, model, computer-aided design.

УДК 534.111

Доц. І.І. Верхола, канд. техн. наук –

Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного

ДИНАМІКА ОДНОВИМІРНИХ ГНУЧКИХ СИСТЕМ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНЬОЮ ШВИДКІСТЮ РУХУ, ІЗ ВРАХУВАННЯМ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

Досліджено вплив швидкості руху та зосереджених сил на нелінійні поперечні коливання одновимірних гнучких елементів систем приводу та транспортування. Математичними моделями динаміки вказаного класу систем є крайові задачі для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, незбудені аналоги яких містять мішану похідну лінійної та часової змінних. Вказане не дає змоги для їх аналізу застосувати відомі асимптотичні методи нелінійної механіки. Шляхом узагальнення ідеї описання основних параметрів динаміки процесу на базі хвильової теорії руху [1] отримано співвідношення для визначення амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) коливань гнучких систем для випадку дискретного розподілу сил.

Ключові слова: гнучкий елемент, нелінійні коливання, зосереджена сила.