



КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ КЛАСУ ФУР'Є У ЗГОРТКОВІ НЕЙРОННІ МЕРЕЖІ

Проаналізовано наявні підходи до інтеграції дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі (ЗНМ) та з'ясовано, що такі підходи описано в літературі фрагментарно і без уніфікованих критеріїв зіставлення. Систематизовано наукові публікації 2014-2025 років за функціональною роллю перетворення у моделі, обчислювальному графі, навчальному процесі або процедурі підготовки даних. Запропоновано класифікаційну схему методів інтеграції дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), дискретного косинусного перетворення (ДКП) та дискретного перетворення Хартлі (ДПХ) у ЗНМ, що поділяє підходи на три парадигми. Виокремлено обчислювальну парадигму, у якій перетворення трактовано як алгоритмічний засіб пришвидшення згортки і зворотного поширення похибки. Описано спектрально-адаптивну парадигму, у якій перетворення класу Фур'є застосовано для керування частотним складом даних, ознак і градієнтів у задачах субдискретизації, регуляризації та доменної адаптації. Введено архітектурну парадигму, у якій перетворення класу Фур'є подано як явний блок мережі, що формує дуальні просторово-частотні або повністю спектральні моделі. Застосовано запропоновану класифікаційну схему методів до ДПФ, ДКП і ДПХ та зіставлено їхні характерні переваги й обмеження. Показано, що ДПФ слугує базовим стандартом інтеграції перетворень класу Фур'є у ЗНМ завдяки розвиненій інфраструктурі швидких алгоритмів; з'ясовано, що ДКП найтісніше пов'язане зі спектрально-адаптивними задачами та областю JPEG; встановлено, що ДПХ перспективне для дійснозначних реалізацій, але залишається нішевим напрямом досліджень через слабку програмно-апаратну підтримку. Виявлено, що застосування спектральних блоків у ЗНМ обмежене проблемами нелінійностей у частотній області, фазової узгодженості, енергетичної стабільності та залежності від програмно-апаратної інфраструктури. Обґрунтовано, що повний перехід ЗНМ у частотну область стикається з методологічною суперечністю між лінійністю спектральних операцій і нелінійною природою функцій активації ЗНМ. Окреслено перспективні напрями подальших етапів дослідження: проєктування нелінійностей, узгоджених із властивостями перетворень; забезпечення енергетичної стабільності спектральних шарів; побудова гібридних моделей, що поєднують елементи різних парадигм.

Ключові слова: спектральний пулінг; доменна адаптація зображень; дуальні просторово-частотні архітектури; навчання у JPEG-домени; спектральні блоки глибокого навчання.

Вступ / Introduction

Поглиблена інтеграція методів цифрового оброблення сигналів (ЦОС, *Digital Signal Processing*, DSP) та машинного навчання (МН, *Machine Learning*, ML) є однією з виразних тенденцій сучасного етапу розвитку інформаційних технологій. Згорткові нейронні мережі (ЗНМ, *Convolutional Neural Networks*, CNN) посідають у цьому процесі особливе місце, оскільки їхня архітектура побудована на операції згортки – фундаментальній процедурі ЦОС – фактично реалізує адаптивний банк фільтрів, параметри якого визначаються у процесі навчання [6]. Природним розширенням цього зв'язку є застосування у ЗНМ дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є, передусім дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), дискретного косинусного перетворення (ДКП) та дискретного перетворення Хартлі (ДПХ).

Інтерес до спектральних методів у ЗНМ зумовлений кількома чинниками. По-перше, теорема про згортку

[11] уможливорює реалізацію згортки як поелементного добутку у спектральній області, що для великих ядер і високих просторових роздільностей може забезпечувати асимптотичну перевагу. По-друге, концентрація енергії природних сигналів у низькочастотних компонентах робить спектральне подання даних, карт ознак і фільтрів зручним для регуляризації, стиснення та контрольованого зменшення розмірності [12]. По-третє, інтеграція перетворень класу Фур'є, зокрема – ДПФ, ДКП і ДПХ, в архітектуру мережі дає змогу будувати спектральні та дуальні просторово-частотні шари, що розширюють рецептивне поле моделі без зростання глибини мережі [2].

Однак значна кількість і різномірність наявних підходів до інтеграції дискретних перетворень у ЗНМ – від використання ШПФ як прихованого алгоритму обчислення згортки до повністю спектральних мереж – створює труднощі для системного порівняння таких методів та обґрунтованого вибору способу інтеграції перетво-

© Copyright 2026 by the author(s)

Рикмас Роман Володимирович, аспірант, кафедра автоматизованих систем управління.

Email: roman.v.rykmas@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-1118-2036>

Процько Ігор Омелянович, д-р техн. наук, професор, кафедра автоматизованих систем управління.

Email: ihor.o.protsko@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0002-3514-9265>

Цитування за ДСТУ: Рикмас Р. В., Процько І. О. Класифікація методів інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі. Науковий вісник НЛТУ України. 2026, т. 36, № 4. С. 98–105.

Citation APA: Rykmas, R. V., & Protsko, I. O. (2026). Classification of approaches to integrating Fourier-class discrete transforms into convolutional neural networks. *Scientific Bulletin of UNFU*, 36(4), 98–105. <https://doi.org/10.36930/40360411>

рення для конкретної прикладної задачі. Наявні дослідження здебільшого мають частковий характер, оскільки зосереджені на одному типі перетворення або одній групі застосувань, без уніфікованої класифікаційної схеми методів, яка дала би змогу зіставити різні підходи за єдиними критеріями.

Об'єкт дослідження – інтеграція дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі.

Предмет дослідження – методи і засоби класифікації підходів до інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі, які визначають можливості й обмеження їх інтеграції в обчислювальний граф такої мережі.

Мета роботи – запропонувати уніфіковану класифікаційну схему методів інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі та послідовно застосувати її до ДПФ, ДКП і ДПХ, що дасть змогу здійснити системне зіставлення їхніх можливостей і обмежень.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- узагальнити теоретичні основи дискретних перетворень класу Фур'є з позицій єдиної матричної схеми методів, що дасть змогу виявити спільне математичне підґрунтя ДПФ, ДКП і ДПХ та властивості цих перетворень (унітарність, сепарабельність, наявність швидких алгоритмів), які визначають можливості й обмеження їх інтеграції в обчислювальний граф нейронної мережі;
- виокремити критерії, за якими різні підходи до інтеграції перетворень у ЗНМ якісно розрізняються, що становитиме методологічну основу системного порівняння, а також дасть змогу однозначно розмежувати функціонально різні групи методів незалежно від конкретного типу перетворення чи прикладної області застосування;
- сформулювати тривірну класифікаційну схему методів за функціональною роллю перетворення класу Фур'є, що впорядкує наявні роботи в єдиному аналітичному форматі, забезпечить однозначне віднесення нових методів до відповідної парадигми та сприятиме виявленню недостатньо досліджених напрямів у межах кожної з них;
- застосувати схему методів до ДПФ, ДКП і ДПХ та зіставити характерні переваги, обмеження і сфери ефективного використання кожного перетворення, що підтвердить аналітичну спроможність запропонованої схеми методів, обґрунтує рекомендації щодо вибору перетворення під заданий клас задач та окреслить перспективні напрями подальших етапів дослідження у сфері спектральних методів глибокого навчання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідження інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у ЗНМ розвивається з 2014 р., коли в роботі [11] було продемонстровано застосовність швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) для пришвидшення прямого і зворотного проходів згорткових мереж. Ця робота стала відправною точкою для напрямку, який згодом виокремився у самостійну парадигму обчислювальної інтеграції перетворень. У наступних роках з'явилися реалізації, орієнтовані на тензорні пришвидшувачі, серед яких FlashFFTConv [5] забезпечує оптимізований ШПФ-конвеєр зі злиттям суміжних операцій.

Паралельно сформувався напрям спектрально-адаптивного використання перетворень. Науковці [13] увеличили поняття спектрального пулінгу через низькочастотне обрізання двовимірного ДПФ-спектра; пізніше автори у роботі [7] запропонували згладжені віконні модифікації

типу FrequencyLowCut Pooling для усунення артефактів Гіббса. Метод Fourier Domain Adaptation [18] використовує амплітудно-фазову декомпозицію для зменшення доменного зсуву. У роботах [8, 14] показано перспективність навчання безпосередньо у JPEG-області – на тензорах ДКП-коефіцієнтів.

Архітектурна гілка досліджень бере початок із роботи [2], у якій уведено Fast Fourier Convolution (FFC) – блок з паралельними локальною і глобальною (спектральною) гілками. На основі FFC побудовано низку прикладних архітектур, серед яких особливе місце посідає LaMa [15] для заповнення великих масок зображень.

Автори у роботі [3] виявили систематичні спектральні спотворення у класичній FFC і запропонували Unbiased FFC з механізмами спектрального згладжування. Окреме архітектурне русло сформоване ДКП-орієнтованими блоками: гармонічними згортковими мережами Ulicny [16] та дійснозначною DCT-SpCNN [1].

Серед перетворень класу Фур'є найменш представленим у ЗНМ-літературі є ДПХ. У роботі [20] запропоновано модифікацію спектрального пулінгу на основі ДПХ, що завдяки інволютивності перетворення не потребує комплексної арифметики, однак значного поширення ДПХ-блоки не набули через обмежену програмно-апаратну підтримку.

Проведений аналіз останніх досліджень та публікацій вказує переважно на їхню частковість, позаяк вони зосереджуються або на одному типі перетворення (наприклад, тільки на ШПФ-пришвидшенні), або на одній прикладній області (наприклад, JPEG-домени, надроздільній здатності, заповненні зображень). Узагальнюваної схеми методів, що дала би змогу зіставити різні підходи до інтеграції дискретних перетворень у ЗНМ за єдиними критеріями, у вивченій літературі не виявлено. Це визначає потребу у запропонованій у дослідженні функціонально-рольовій класифікації методів інтеграції дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі.

Матеріали та методи дослідження. Матеріалом дослідження є корпус наукових публікацій з використання дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є у згорткових нейронних мережах. Корпус сформовано шляхом пошуку у наукометричних базах Google Scholar, IEEE Xplore, ACM Digital Library, SpringerLink, ScienceDirect, а також у відкритих архівах препринтів і матеріалах провідних конференцій з машинного навчання та комп'ютерного зору (NeurIPS, ICML, ICLR, CVPR, ICCV, ECCV, IJCNN). Пошук здійснювали за ключовими словами: Fourier convolution, FFT convolutional neural networks, spectral pooling, DCT CNN, JPEG-domain learning, Hartley transform neural network, frequency-domain CNN, spectral neural networks. Часові межі добору – переважно 2014-2025 pp.; додатково залучено фундаментальні джерела з теорії дискретних перетворень.

До основного аналізу основних джерел інформації залучали тільки ті роботи, у яких дискретне перетворення відігравало функціональну роль у моделі, обчислювальному графі, навчальному процесі або процедурі підготовки даних. Інженерно-описові публікації без явної методологічної новизни вилучали.

Методика дослідження є якісно-аналітичною. У роботі застосовано загальнонаукові методи аналізу та синтезу, метод систематизації, а також метод порівняльного аналізу для зіставлення підходів за єдиними

критеріями. Як інструмент аналізу розроблено власну функціонально-рольову класифікаційну схему методів, що поділяє підходи на парадигми залежно від місця перетворення в обчислювальному графі мережі. Подальший виклад послідовно застосовує цю схему методів до трьох перетворень класу Фур'є – ДПФ, ДКП і ДПХ.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Теоретичні основи: єдина матрична схема ортогональних перетворень. Розглянемо дійсну або комплексну послідовність скінченної довжини. Лінійне перетворення задається невиродженою матрицею ядра F : $X = Fx$, де X – вектор спектральних коефіцієнтів. Перетворення є унітарним (для дійсних – ортогональним), якщо матриця F задовольняє умову $F \cdot F^{-1} = I$, що еквівалентно оберненості без втрати інформації та збереженню норми (рівність Парсеваля). Це створює фундамент для інтеграції перетворень у нейронні мережі як лінійних шарів без породження накопичувальних похибок масштабу.

Для гармонічних перетворень класу Фур'є коефіцієнти матриці F мають єдину загальну форму, у якій базисна функція $\psi(\cdot)$ набуває вигляду комплексної експоненти для ДПФ, косинуса для ДКП та функції sas (сума косинуса і синуса) для ДПХ; нормувальні множники забезпечують ортогональність базисів. Вибір базисної функції та нормування визначає тип перетворення, його властивості симетрії, тип граничних умов і ступінь концентрації енергії [12].

Зокрема, ДПФ працює над комплексними коефіцієнтами, ДКП і ДПХ – над дійсними. Для ДКП характерна найсильніша концентрація енергії природних зображень у низькочастотних компонентах, що зумовило його використання у стандарті JPEG. ДПХ має властивість інволютивності – обернене перетворення збігається із прямим з точністю до нормування. Спільною властивістю усіх трьох перетворень є наявність швидких алгоритмів зі складністю $O(N \log N)$ – швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), швидкого ДКП та швидкого ДПХ. Для двовимірних і багатовимірних сигналів усі ці перетворення мають сепарабельні ядра, що дає змогу реалізувати 2D-перетворення як послідовне застосування одновимірного до рядків і стовпців матриці.

Саме комбінація унітарності (енергетична коректність), сепарабельності (паралелізм і модульність) і наявності швидких алгоритмів (придатність до інтеграції у графі обчислень глибокого навчання) утворює технічну основу для застосування цих перетворень у ЗНМ. Однак конкретні способи інтеграції істотно розрізняються залежно від того, де і з якою метою перетворення вводяться у мережу.

Класифікаційна схема трьох парадигм. Аналіз сучасних робіт з інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у ЗНМ дає змогу виокремити три якісно різні парадигми, що визначаються функціональною роллю перетворення в обчислювальному графі мережі. Ключовим розрізнявальним критерієм є місце перетворення: чи воно є зовнішнім алгоритмом, чи інструментом контролю властивостей моделі, чи власне навчальним блоком.

Обчислювальна парадигма. Перетворення розглядають як зовнішній обчислювальний прийом для пришвидшення стандартних операцій ЗНМ без зміни їхньої архітектури. Класичним прикладом є реалізація згортки

через теорему про згортку: пряме перетворення карти ознак і ядра, поелементне множення спектрів та обернене перетворення. Для двовимірного випадку складність становить $O(N^2 \log N)$ проти $O(M^2 N^2)$ для прямої згортки, що дає вигоду на великих N і M . Перетворення є прозорим для архітектури: модель залишається тією самою, змінюється тільки спосіб обчислення згортки. Аналогічно ДПФ застосовується у зворотному поширенні похибки, оскільки і градієнт за вхідними даними, і градієнт за вагами є згортками [11]. Сюди ж належать сучасні апаратно-орієнтовані реалізації типу FlashFFTConv [5], які оптимізують ШПФ-конвеєр під тензорні пришвидшувачі.

Спектрально-адаптивна парадигма. Перетворення використовують як інструмент контролю частотних властивостей моделі на різних етапах її життєвого циклу – підготовки даних, пулінгу, регуляризації, аналізу динаміки навчання. Перетворення не входить безпосередньо в обчислювальний граф навчання у вигляді нового шару, але формує спектрально вмотивовані операції над даними або параметрами. До цієї парадигми належать частотна адаптація домену (Fourier Domain Adaptation, FDA) [18], спектральний пулінг через низькочастотне обрізання спектра [13], частотно-обмежені режими навчання та частотно-адаптивні механізми регуляризації, що використовують частотний склад градієнтів для контролю динаміки оптимізації.

Архітектурна парадигма. Перетворення інтегроване безпосередньо в обчислювальний граф мережі як власне функціональний блок зі своїми параметрами, які можуть навчатись. Перетворення перестає бути прихованим алгоритмом і стає видимою архітектурною одиницею, що визначає спосіб формування ознак. До цієї парадигми належать дуальні просторово-частотні архітектури типу Fast Fourier Convolution (FFC) [2] та її модифікацій, гармонічні блоки на основі фіксованих базисів ДКП [16], а також повністю спектральні ЗНМ, у яких згортка, активація і пулінг виконуються безпосередньо у частотній області [1].

Запропоновані парадигми не є взаємовиключними: реальні системи можуть поєднувати елементи кількох парадигм (наприклад, дуальну архітектуру з обчислювальною оптимізацією ШПФ-шарів). Однак кожна парадигма має власні характерні переваги, обмеження і сферу ефективного застосування, що робить їх корисним аналітичним інструментом. Зведене порівняння парадигм наведено у табл. 1 та на рисунку.

Застосування схеми методів до конкретних перетворень. Дискретне перетворення Фур'є. В обчислювальній парадигмі ДПФ традиційно розглядають як стандартний інструмент пришвидшення згортки через теорему згортки. Mathieu, Henaff і LeCun [11] продемонстрували застосовність ШПФ для пришвидшення прямого і зворотного проходів ЗНМ, а також показали вигоду від повторного використання перетворених спектрів фільтрів. У сучасних бібліотеках глибокого навчання (cuDNN, oneDNN) ШПФ-алгоритми інтегровані як один із варіантів автоматичного вибору залежно від геометрії тензорів та апаратних можливостей. Подальші роботи зосереджені на кращій інтеграції ШПФ-обчислень з тензорними пришвидшувачами. FlashFFTConv [5] реалізує ШПФ-згортку зі злиттям суміжних операцій та мінімізацією обмінів між рівнями пам'яті, що забезпечує пришвидшення до 7,93 рази для спектральної

реалізації згортки. Однак для типових малих ядер (3×3) да та прямим методам через значні накладні витрати на ШПФ-згортки часто поступаються алгоритмам Віногра-



Рисунок. Запропоновані парадигми використання перетворень у ЗНМ / Proposed paradigms for using transforms in CNNs

Табл. 1. Порівняльна характеристика парадигм інтеграції дискретних перетворень у ЗНМ / Comparative characteristics of paradigms for integrating discrete transforms into CNNs

Критерій	Обчислювальна парадигма	Спектрально-адаптивна парадигма	Архітектурна парадигма
Функціональна роль перетворення	Прихований алгоритм виконання згортки або зворотного поширення похибки	Засіб керування частотними властивостями даних, ознак, градієнтів або фільтрів	Явний шар або блок мережі, що бере участь у прямому проході
Місце в конвеєрі	Рівень реалізації операції: бібліотека, ядро, апаратно-орієнтований алгоритм	Попереднє оброблення, пулінг, регуляризація, доменна адаптація, режим навчання	Архітектура моделі: спектральна гілка, дуальний блок, частотний шар
Чи змінює модель?	Ні. Математична модель згортки зберігається	Частково. Змінюється спосіб подання або обмеження сигналу/ознак	Так. Перетворення стає частиною обчислювального графа
Основний очікуваний ефект	Пришвидження обчислень для великих ядер, високих роздільностей, 3D або довгих послідовностей	Стабільне зменшення розмірності, антиаліасинг, доменна стійкість, спектральна регуляризація	Глобальне рецептивне поле, моделювання далеких залежностей, нові індуктивні упередження
Типові ризики	Накладні витрати на перетворення; слабкий вигравш для малих ядер; залежність від бібліотек і апаратної платформи	Артефакти обрізання спектра; вибір маски або вікна; можливе погіршення локальних деталей	Нелінійності у частотній області; фазова узгодженість; енергетична стабільність; часткова втрата локальності
Коли доцільна	Коли головна мета – швидкодія без зміни архітектури	Коли потрібні регуляризація, пулінг, доменна адаптація або робота з JPEG/частотним поданням	Коли потрібне глобальне поле зору або явне поєднання просторових і частотних ознак
Репрезентативні приклади	ШПФ-згортки; FlashFFTConv ; бібліотечні ШПФ/ Winograd -евристики	FDA; спектральний пулінг; FLC; частотно-обмежене навчання; навчання у JPEG-області	FFC/ LaMa / UFFC ; гармонічні згорткові мережі; DCT-SpCNN

У спектрально-адаптивній парадигмі ДПФ використовують для розв'язання задач, не пов'язаних безпосередньо з обчисленням згортки. Метод [Fourier Domain Adaptation](#) [18] застосовує розкладання сигналу на амплітудну і фазову складові: фаза визначає геометричну структуру сигналу, тоді як амплітуда тісніше пов'язана з низькочастотними статистиками зображення. Перенесення низькочастотної частини амплітудного спектра з цільового домену на навчальний за збереження фази дає змогу зменшити зсув розподілу. Спектральний пулінг [Ripplet](#) та ін. [13] виконує субдискретизацію через низькочастотне обрізання двовимірного ДПФ-спектра, що забезпечує більшу інформативність зменшення розмірності порівняно з макс- і усереднювальним пулінгом. Однак жорстке прямокутне обрізання породжує артефакти Гіббса; для їх усунення автори роботи [7] запропонували схеми методів [Frequency Low Cut Pooling](#) (FLC) та [Aliasing and Sinc Artifact-free Pooling](#) (ASAP), що використовують згладжені вікна типу Хеннінга. Окрему лінію становлять частотно-обмежені режими навчання, у яких частотна маска у прямому та зворотному проходах фактично проектує сигнал помилки на підпростір дозволених частот.

В архітектурній парадигмі ДПФ інтегроване як власне обчислювальний блок мережі. Серед найбільш цитованих прикладів варто виокремити [Fast Fourier Convolution](#) (FFC) [2], що поділяє канали на локальну та

глобальну підмножини: локальна обробляється звичайними згортками, а глобальна проходить через ШПФ, оновлюється у частотній області і повертається у простір через обернене ШПФ. Така архітектура забезпечує глобальне рецептивне поле вже на ранніх шарах. На основі FFC побудовано низку прикладних архітектур: [LaMa](#) для заповнення великих масок зображень [15]. Автори роботи [3] запропонували [Unbiased FFC](#) (UFFC), що додає механізми спектрального згладжування перед нелінійністю та контролю енергетичного балансу для усунення систематичних спотворень. Спроби побудувати повністю спектральні ЗНМ, що працюють у частотній області без зворотних перетворень, стикаються з фундаментальним обмеженням: точкові просторові нелінійності типу ReLU у частотному поданні стають глобально зв'язаними операторами, що перерозподіляють енергію між частотами і ускладнюють контроль фази.

Дискретне косинусне перетворення. В обчислювальній парадигмі ДКП реалізує згортку через теорему симетричної згортки, яка пов'язує згортку у просторі з поелементним множенням у частотній області з урахуванням симетрії граничних умов. Перевага перед ДПФ-реалізацією – робота з дійсними числами: поелементне множення дійсних коефіцієнтів потребує n^2 операцій, тоді як комплекснозначне множення у ДПФ-варіанті – $4n^2$. Обмеженням є симетрія розширеного ядра, що зменшує кількість ступенів свободи; для часткового усунення свободи цього ефекту запропоновано "подвійну"

ДКП-згортку та частотне випадкове занулення компонент спектра.

У *спектрально-адаптивній парадигмі* ДКП відіграє особливо істотну роль завдяки концентрації енергії природних зображень у низькочастотних компонентах і прямому зв'язку зі стандартом JPEG. Автори роботи [8] показали, що мережі можна навчати безпосередньо на тензорах ДКП-коефіцієнтів, отриманих частковим декодуванням JPEG без відновлення RGB; такий підхід дає пришвидшення завантаження даних до 2,6 рази за збереження точності. Фреймворк JPEG-DL [14] інтегрує JPEG-конверсер як навчуваний вхідний шар із диференційовним м'яким квантизатором, що дає змогу спільно оптимізувати таблиці квантування і ваги мережі. Спектральний пулінг на основі ДКП забезпечує дійсне обрізання спектра без комплексної арифметики і демонструє вищу точність та швидшу збіжність порівняно з ДПФ-пулінгом за однакового зменшення розмірності.

В *архітектурній парадигмі* ДКП виступає основою кількох архітектурних рішень. Гармонічні блоки [16] замінюють стандартні згортки на лінійні комбінації фіксованих ДКП-базисів з навчуваними коефіцієнтами змішування; завдяки концентрації енергії у низьких частотах високочастотні компоненти можна відсікати, формуючи природний механізм стиснення моделі. DCT-SpCNN [1] виконує згортку, активацію та пулінг безпосередньо в області ДКП, повністю уникаючи зворотних перетворень, що особливо корисно для крайових обчислень (edge computing) з обмеженим енергетичним бюджетом.

Дискретне перетворення Хартілі. В обчислювальній парадигмі ДПХ дає змогу реалізувати згортку повністю над дійсними коефіцієнтами завдяки інволютивності перетворення (прямий і зворотний оператори збігаються з точністю до нормування). Згортка в області ДПХ може бути виражена через комбінації спектральних коефіцієнтів симетричних і антисиметричних частот, що відкриває можливість апаратної оптимізації. Однак на практиці перевага від відмови від комплексної арифметики часто компенсується тим, що високопродуктивні реалізації ДПХ представлені у меншій кількості у бібліотеках глибокого навчання порівняно зі стандартними

ШПФ-примітивами, а спектральна алгебра ДПХ для згортки потребує попарних комбінацій коефіцієнтів замість одного комплексного скалярного множення.

У *спектрально-адаптивній парадигмі* ДПХ слугує дійсною альтернативою для спектрального пулінгу. Автори роботи [20] запропонували модифікацію спектрального пулінгу на основі ДПХ, що не потребує комплексної арифметики та операцій забезпечення спряженої симетрії спектра дійсних сигналів. У дослідженні проведено експерименти на наборах MNIST, Fashion-MNIST і CIFAR-10. За заміни макс-пулінгу в неглибокій ЗНМ та згортку з кроком децимації в модифікованих ResNet на ДПХ-пулінг спостерігали швидшу збіжність на ранніх етапах навчання. Порівняння з ДКП-пулінгом виявляє типовий компроміс: ДКП дає дещо вищу точність завдяки сильнішій концентрації енергії, тоді як ДПХ-пулінг є простішим у реалізації.

В *архітектурній парадигмі* ДПХ застосовують значно рідше за ДПФ і ДКП. Поодинокі реалізації для задачі надроздільної здатності зображень замінюють класичні просторові згортки операціями в області ДПХ у залишковій постановці. Однак заміна точкової просторової нелінійності на згортку в частотній області породжує глобальний лінійний оператор, що не відтворює локальну активаційну природу ReLU і відповідні індуктивні упередження сучасних згорткових мереж. Інженерною стримувальною обставиною є відсутність зрілої екосистеми оптимізованих реалізацій ДПХ у популярних фреймворках, що ускладнює пряме перенесення ШПФ-блоків у відповідні варіанти на основі ДПХ. Внаслідок цього ДПХ в архітектурній парадигмі залишається переважно нішевим напрямом.

Систематичне застосування класифікаційної схеми методів дає змогу виокремити кілька проблемних аспектів, спільних для всіх трьох перетворень, але порізно виявлених у різних парадигмах. Це означає, що використання єдиної класифікації методів допомагає виявити кілька спільних проблемних аспектів для трьох конкретних перетворень (трансформацій), причому характер цих проблем змінюється залежно від обраної наукової, методологічної чи технологічної парадигми.

Табл. 2. Зведене застосування класифікаційної схеми методів до ДПФ, ДКП і ДПХ /
Summary application of the classification scheme to DFT, DCT, and DHT

Перетворення	Обчислювальна парадигма	Спектрально-адаптивна парадигма	Архітектурна парадигма
ДПФ	ШПФ-згортки та зворотне поширення похибки; бібліотечні реалізації; FlashFFTConv для довгих послідовностей і великих тензорів	FDA; спектральний пулінг; FLC/ASAP; частотно-обмежене навчання; спектральні маски для контролю частот	FFC та похідні моделі: LaMa, UFFC; повністю спектральні CNN; просторово-частотні блоки
ДКП	Дійснозначна реалізація частотної згортки через симетричні граничні умови	Оброблення у JPEG-області; JPEG-DL; ДКП-спектральний пулінг; ДКП-параметризація фільтрів	Гармонічні блоки; DCT-SpCNN усуває необхідність у зворотних перетвореннях і складній комплексній арифметиці
ДПХ	Дійсна згортка через комбінації спектральних коефіцієнтів; обмежено через слабку інфраструктуру	ДПХ-пулінг без комплексної арифметики; інволютивність спрощує реалізацію	Поодинокі застосування (надроздільна здатність); конфлікт глобальних спектральних операцій з локальністю

Нелінійності у частотній області. Однією з фундаментальних проблем архітектурної парадигми є те, що локальні у просторі нелінійності (ReLU, GELU тощо) у спектрі стають глобально зв'язаними операторами і породжують нові гармоніки, що руйнує лінійну структуру спектральних блоків. Запропоновані часткові розв'язки – модифіковані активаційні функції типу FReLU [1], апроксимовані маски – пом'якшують проблему, але не усувають її повністю. Це створює істотні перешкоди для побудови "чистих" повністю спектральних

ЗНМ, конкурентних з просторовими аналогами на природних зображеннях, і виступає однією з ключових причин поширення дуальних архітектур.

Енергетична стабільність і фазова коректність. Під час каскадування спектральних шарів накопичуються чисельні похибки масштабування, спричинені квантуванням, нормалізаціями, неточністю подання чисел з рухомою комою. У задачах низького рівня (реконструкція, надроздільна здатність, заповнення зображень) це проявляється як видимі просторові артефакти.

Особливо чутливою є фазова інформація: модифікації амплітуди в архітектурних блоках можуть порушувати фазову узгодженість і породжувати "дзвінкові" осциляції. UFFC [3] і споріднені модифікації демонструють, що ця проблема не є суто теоретичною. Систематичні принципи проектування спектральних блоків, що гарантували би енергетичний баланс, поки що відсутні.

Спектральні артефакти усічення. У спектрально-адаптивній парадигмі жорстке прямокутне обрізання спектра у пулінгу породжує ефект Гіббса, накопичення якого за глибокого каскадування шарів призводить до помітного зниження якості. Згладжені віконні функції (Хеннінга, Хемінга) та схеми методів типу FLC/ASAP [7] частково усувають цю проблему, проте системного підходу до вибору вікна під конкретну архітектуру поки що не сформовано.

Залежність від екосистеми реалізацій. Перевага від парадигми істотно залежить від наявності зрілих оптимізованих реалізацій перетворення на цільовій апаратній платформі. Це найвиразніше проявляється для ДПХ, який поступається ДПФ не з математичних, а з інженерних причин: відсутність високопродуктивних бібліотек, сумісних з автодиференціюванням, знецінює перевагу від відмови від комплексної арифметики. Цей чинник часто недооцінюють у теоретичних роботах, проте він істотно позначається на практичному впровадженні.

Зв'язок зі спектральною упередженістю. Усі три парадигми оперують припущенням про важливість частотного подання сигналу, тоді як спектральна упередженість показує, що навчання ЗНМ саме по собі має нетривіальну частотну динаміку. Це створює потенціал для нової генерації методів, які цілеспрямовано контролюватимуть частотний вміст засвоєваних залежностей через комбінацію елементів усіх трьох парадигм – наприклад, частотно-адаптивну ініціалізацію (елемент архітектурної), спектральну регуляризацію (елемент адаптивної) та апаратно-оптимізоване виконання (елемент обчислювальної).

Обговорення результатів дослідження. У дослідженні [17] автори проаналізували, які частотні характеристики засвоюють згорткові нейронні мережі у задачах класифікації зображень, і виявили явище частотних "скорочених шляхів". Отриманий результат узгоджується з висновком запропонованої класифікації щодо центральної ролі спектрального аналізу для розуміння поведінки ЗНМ та обґрунтовує доцільність спектрально-адаптивної парадигми.

У дослідженні [10] автори розвинули метод Fourier Domain Adaptation у напрямі прогресивної змагальної доменної адаптації для задач класифікації та пошуку об'єктів. Запропонована в цій роботі схема підтверджує висновок щодо центральної ролі амплітудно-фазового розкладу ДПФ у спектрально-адаптивній парадигмі та свідчить про розвиток базового методу FDA в напрямі складніших стратегій.

У роботі [4] автори розвинули підхід Гегена та ін. [8] до навчання згорткових нейронних мереж безпосередньо в JPEG-області з вибіркоким використанням тільки істотних ДКП-коефіцієнтів. Це підкріплює висновок щодо особливої практичної цінності ДКП у спектрально-адаптивній парадигмі для роботи зі стисненими поданнями зображень.

У дослідженні [19] запропоновано мережу зливання просторово-частотних ознак для покращення зображень

дистанційного зондування за умов слабкого освітлення. Підхід є показовим прикладом дуальної архітектури, що поєднує просторові та частотні модулі, і підтверджує практичну перевагу архітектурної парадигми у її гібридній формі.

У роботі [21] запропоновано схему методів дрібнозернистих ШПФ-обчислень для підвищення ефективності згорткових нейронних мереж. Це дає змогу значно знизити обчислювальну складність алгоритмів згортки, особливо для ядер середнього та великого розміру. На відміну від класичного ШПФ, дрібнозернистий (fine-grained) підхід адаптує обчислення під конкретні розміри тензорів та апаратну архітектуру (GPU, FPGA, ASIC). Автори роботи розширюють обчислювальну парадигму у напрямі тонко налаштованих апаратно-орієнтованих ШПФ-конверсів і доповнює підхід FlashFFTConv [5] на рівні гранулярності обчислювальних блоків.

У дослідженні [22] автори впровадили швидку згортку Фур'є у задачу виявлення аномалій і показали покращення стійкості детектування за рахунок глобального рецептивного поля спектральної гілки. Результат ілюструє поширення архітектурної парадигми ДПФ за межі класичних задач комп'ютерного зору і підкреслює універсальність дуальних просторово-частотних блоків.

У роботі [9] запропоновано спектрально-адаптивний dropout як механізм частотної регуляризації для покращення узагальнювальної здатності глибоких моделей. Запропонована стратегія є виразним прикладом спектрально-адаптивної парадигми, у якій ДПФ-спектр використовують для контрольованої модифікації навчального процесу через частотно-вибіркове відкидання потенційних активацій.

Зіставлення наведених робіт із запропонованою класифікаційною схемою методів підтверджує доцільність проведеного дослідження. Проаналізовані праці охоплюють окремі аспекти застосування ДПФ і ДКП у згорткових нейронних мережах, однак залишаються фрагментованими за типом перетворення, функціональним призначенням і прикладною областю. На відміну від них, запропонована у цій роботі функціонально-рольова класифікація забезпечує єдиний аналітичний формат для зіставлення спектральних методів за їхньою роллю в обчислювальному графі мережі.

Отже, внаслідок виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено методику функціонально-рольової класифікації методів інтеграції дискретних ортогональних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі, яка передбачає розмежування обчислювальної, спектрально-адаптивної та архітектурної парадигм за функціональною роллю перетворення в обчислювальному графі мережі та дає змогу в єдиному аналітичному форматі зіставити методи на основі ДПФ, ДКП і ДПХ за їхнім призначенням, перевагами, обмеженнями і сферами ефективного використання.

Практична значущість результатів дослідження – можна застосовувати як методичний орієнтир для обґрунтованого вибору способу інтеграції спектральних методів у згорткові нейромережеві моделі під час розв'язання задач пришвидшення обчислень, керування частотними властивостями моделей, побудови просторово-частотних архітектур і формування нових індуктивних

упереджень з урахуванням обмежень щодо швидкодії, узагальнювальної здатності та доменної стійкості.

Висновки / Conclusions

Розроблено уніфіковану класифікаційну схему методів інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі та застосовано її до ДПФ, ДКП і ДПХ для системного зіставлення їхніх можливостей і обмежень. За результатами проведеного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проаналізовано наукові публікації 2014-2025 рр., з інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі, та встановлено, що наявні підходи описані фрагментарно і не мають єдиної системи критеріїв для їх зіставлення.
2. Виокремлено основні критерії порівняння методів інтеграції перетворень у згорткові нейронні мережі, зокрема – функціональну роль перетворення у моделі, місце в обчислювальному конвеєрі, ступінь модифікації обчислювального графа, очікуваний ефект і характерні обмеження.
3. Запропоновано функціонально-рольову класифікаційну схему методів інтеграції дискретних перетворень класу Фур'є у згорткові нейронні мережі, яка поділяє наявні підходи на три парадигми: обчислювальну, спектрально-адаптивну та архітектурну. Такий поділ дає змогу зіставляти різні методи за єдиними критеріями та визначати місце нових підходів у загальній системі спектральних методів.
4. Застосовано запропоновану класифікаційну схему методів до дискретного перетворення Фур'є, дискретного косинусного перетворення та дискретного перетворення Хартлі. Встановлено, що ДПФ є базовим стандартом завдяки розвиненій інфраструктурі швидких алгоритмів; ДКП найтісніше пов'язане зі спектрально-адаптивними задачами та JPEG-поданням зображень; ДПХ є перспективним для дійснозначних реалізацій, однак залишається нішевим напрямом через обмежену програмно-апаратну підтримку.
5. Виявлено основні обмеження застосування спектральних блоків у згорткових нейронних мережах, пов'язані з нелінійностями у частотній області, фазовою узгодженістю, енергетичною стабільністю та залежністю від наявної програмно-апаратної інфраструктури. Обґрунтовано, що повний перехід згорткових нейронних мереж у частотну область ускладнюється методологічною суперечністю між лінійністю спектральних операцій і нелінійною природою глибокого навчання.
6. Окреслено перспективні напрями подальших етапів дослідження, серед яких проектування нелінійностей і нормалізацій, узгоджених із властивостями спектральних перетворень; забезпечення енергетичної стабільності та фазової коректності за каскадування спектральних шарів; розроблення гібридних моделей, що поєднують елементи обчислювальної, спектрально-адаптивної та архітектурної парадигм.

Декларація про використання засобів ШІ. Програмні засоби ChatGPT та Grammarly було використано авторами виправдано і винятково для лінгвістичного редагування, стилістичного коригування та перефразування окремих фрагментів тексту. Автори критично перевірили, систематизували й остаточно затвердили зміст роботи, беручи на себе повну відповідальність за поданий матеріал.

References

1. Alshareef, I. Y., Ab Rahman, A. A.-H., Hassan, M. K., Rusli, M. S., Khan, N., Manzak, A., & Marsono, M. N. (2025). A real-valued DCT-based spectral CNN architecture for efficient edge deep

learning. *Array*, 28, article ID 100594.

<https://doi.org/10.1016/j.array.2025.100594>

2. Chi, L., Jiang, B., & Mu, Y. (2020). Fast Fourier Convolution. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33, 4479–4488. URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2020/hash/2fd5d41ec6cfab47e32164d5624269b1-Abstract.html>
3. Chu, T., Chen, J., Sun, J., Lian, S., Wang, Z., Zuo, Z., Zhao, L., Xing, W., & Lu, D. (2023). Rethinking Fast Fourier Convolution in Image Inpainting. *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 23195–23205. <https://doi.org/10.1109/ICCV51070.2023.02120>
4. dos Santos, S. F., & Almeida, J. (2021). Less Is More: Accelerating Faster Neural Networks Straight from JPEG. In *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications (CIARP 2021)*, Lecture Notes in Computer Science (Vol. 12702, pp. 237–247). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-93420-0_23
5. Fu, D. Y., Kumbong, H., Nguyen, E., & Ré, C. (2024). FlashFFTConv: Efficient Convolutions for Long Sequences with Tensor Cores. *Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR)*. URL: <https://openreview.net/forum?id=gPKTTAfyBp>
6. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press. URL: <https://www.deeplearningbook.org>
7. Grabinski, J., Jung, S., Keuper, J., & Keuper, M. (2022). FrequencyLowCut Pooling – Plug and Play against Catastrophic Overfitting. *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pp. 36–57. https://doi.org/10.1007/978-3-031-19778-9_3
8. Gueguen, L., Sergeev, A., Kadlec, B., Liu, R., & Yosinski, J. (2018). Faster Neural Networks Straight from JPEG. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31. URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2018/hash/7af6266cc52234b5aa339b16695f7fc4-Abstract.html>
9. Huang, Z., Chen, M., & Zheng, S. (2025). Spectral Adaptive Dropout: Frequency-Based Regularization for Improved Generalization. *Information*, 16(6), article ID 475. <https://doi.org/10.3390/info16060475>
10. Li, T.-B., Su, Y.-T., Song, D., Li, W.-H., Wei, Z.-Q., & Liu, A.-A. (2024). Progressive Fourier Adversarial Domain Adaptation for Object Classification and Retrieval. *IEEE Transactions on Multimedia*, 26, 4540–4553. <https://doi.org/10.1109/TMM.2023.3323862>
11. Mathieu, M., Henaff, M., & LeCun, Y. (2014). Fast Training of Convolutional Networks through FFTs. *Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.5851>
12. Ochoa-Dominguez, H., & Rao, K. R. (2019). *Discrete Cosine Transform* (2nd ed.). CRC Press, 358 p. <https://doi.org/10.1201/9780203729854>
13. Rippel, O., Snoek, J., & Adams, R. P. (2015). Spectral Representations for Convolutional Neural Networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 28, 2449–2457. URL: <https://proceedings.neurips.cc/paper/2015/hash/536a76f94cf7535158f66cfbd4b113b6-Abstract.html>
14. Salamah, A. H., Zheng, K., Liu, Y., & Yang, E.-H. (2025). JPEG Inspired Deep Learning. *Proceedings of the International Conference on Learning Representations (ICLR)*, pp. 16586–16609. URL: <https://openreview.net/forum?id=te2IdORaBL>
15. Suvorov, R., Logacheva, E., Mashikhin, A., Remizova, A., Ashukha, A., Silvestrov, A., Kong, N., Goka, H., Park, K., & Lepitsky, V. (2022). Resolution-robust Large Mask Inpainting with Fourier Convolutions. *Proceedings of the IEEE/CVF Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV)*, pp. 2149–2159. <https://doi.org/10.1109/WACV51458.2022.00323>
16. Ulicny, M., Krylov, V. A., & Dahyot, R. (2022). Harmonic Convolutional Networks based on Discrete Cosine Transform. *Pattern Recognition*, 129, article ID 108707. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2022.108707>
17. Wang, S., Veldhuis, R., Brune, C., & Strisciuglio, N. (2023). What do neural networks learn in image classification? A freq-

- uency shortcut perspective. *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 1433–1442. <https://doi.org/10.1109/ICCV51070.2023.00138>
18. Yang, Y., & Soatto, S. (2020). FDA: Fourier Domain Adaptation for Semantic Segmentation. *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 4085–4095. <https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00414>
 19. Yao, Z., Fan, G., Fan, J., Gan, M., & Chen, C. L. P. (2024). Spatial – Frequency Dual-Domain Feature Fusion Network for Low-Light Remote Sensing Image Enhancement. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 62, article ID 4706516. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2024.3434416>
 20. Zhang, H., & Ma, J. (2020). Hartley Spectral Pooling for Deep Learning. *CSIAM Transactions on Applied Mathematics*, 1(3), 518–529. <https://doi.org/10.4208/csiam-am.2020-0018>
 21. Zhang, Y., Li, F., Xu, H., Li, X., & Jiang, S. (2024). Efficient Convolutional Neural Networks Utilizing Fine-Grained Fast Fourier Transforms. *Electronics*, 13(18), article ID 3765. <https://doi.org/10.3390/electronics13183765>
 22. Zhao, Z., & Zhou, J. (2025). Introducing Fast Fourier Convolutions into Anomaly Detection. *Sensors*, 25(16), article ID 5196. <https://doi.org/10.3390/s25165196>

R. V. Rykmas, I. O. Protsko

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine,

CLASSIFICATION OF APPROACHES TO INTEGRATING FOURIER-CLASS DISCRETE TRANSFORMS INTO CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS

The existing approaches to integrating Fourier-class discrete orthogonal transforms into convolutional neural networks (CNNs) have been analysed, and it has been ascertained that these approaches are described fragmentarily in the literature and lack unified comparison criteria. Scientific publications from 2014 to 2025 have been systematised according to the functional role of the transform in the model, computational graph, training process, or data preparation procedure. A classification scheme has been proposed for methods of integrating the discrete Fourier transform (DFT), the discrete cosine transform (DCT), and the discrete Hartley transform (DHT) into CNNs; the scheme divides the approaches into three paradigms. The computational paradigm has been singled out, in which the transform is treated as an algorithmic means of accelerating convolutions and backpropagation. The spectrally adaptive paradigm has been described, in which DFT-, DCT-, and DHT-based operations are applied to control the frequency composition of data, features, and gradients in subsampling, regularisation, and domain adaptation tasks. The architectural paradigm has been introduced, in which DFT-, DCT-, and DHT-based operations are represented as explicit network blocks that form dual spatial-frequency or fully spectral models. The proposed classification scheme has been applied to DFT, DCT, and DHT, and their characteristic advantages and limitations have been compared. It has been shown that DFT serves as a baseline standard for integrating Fourier-class transforms into CNNs owing to the mature infrastructure of fast algorithms; it has been ascertained that DCT is most closely associated with spectrally adaptive tasks and the JPEG domain; it has been established that DHT is promising for real-valued implementations but remains a niche research direction owing to weaker software and hardware support. It has been revealed that the use of spectral blocks in CNNs is constrained by nonlinearities in the frequency domain, phase consistency, energy stability, and dependence on software and hardware infrastructure. It has been substantiated that a full transition of CNNs into the frequency domain encounters a methodological contradiction between the linearity of spectral operations and the nonlinear nature of CNN activation functions. Promising directions for further research have been outlined: designing nonlinearities consistent with the properties of the transforms; ensuring the energy stability of spectral layers; and constructing hybrid models that combine elements of different paradigms.

Keywords: spectral pooling; image domain adaptation; dual spatial-frequency architectures; JPEG-domain learning; spectral blocks in deep learning.