



МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АДАПТИВНОЇ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ПЕРСОНАЛІЗОВАНОГО НАВЧАННЯ

Досліджено особливості персоналізації навчального процесу у вищій освіті засобами адаптивних інтелектуальних систем навчання (AICH), що функціонують на основі технологій штучного інтелекту. Проаналізовано наявні підходи до моделювання стану та поведінки студента, формалізації предметної області та механізмів педагогічної адаптації в AICH, зокрема – байєвське відстеження знань BKT (англ. *Bayesian Knowledge Tracing*), теорію відповідей на завдання IRT (англ. *Item Response Theory*), глибоке відстеження знань DKT (англ. *Deep Knowledge Tracing*) на основі LSTM (англ. *Long Short-Term Memory*), графові нейронні мережі GNN (англ. *Graph Neural Networks*), методи навчання з підкріпленням RL (англ. *Reinforcement Learning*) та підхід контекстуальних бандитів. З'ясовано, що наявні підходи до моделювання адаптивного навчання мають обмеженість, зокрема – моделі стану та поведінки студента, предметної області і стратегій педагогічної адаптації до індивідуального темпу засвоєння знань та когнітивного навантаження студента розробляються фрагментарно і не об'єднані в єдину формалізовану структуру; більшість моделей навчального процесу охоплюють тільки окремі виміри студента без формалізації їх як єдиного динамічного вектора; у жодному з аналізованих досліджень не запропоновано інтегральної функції відповідності між профілем студента і характеристиками навчального матеріалу як самостійного математичного об'єкта. Наведено трикомпонентну математичну модель AICH, що містить: динамічний профіль студента у вигляді багатовимірного вектора когнітивних, поведінкових та емоційних характеристик; статичний паспорт контенту з формалізованими педагогічними параметрами; інтегральну функцію подібності, яка визначає взаємодію між станом студента, навчальним матеріалом і логікою адаптивного вибору контенту. Розроблено алгоритм адаптивного замкненого циклу навчання, який забезпечує моніторинг когнітивно-поведінкового стану студента, ітераційне оновлення параметрів його профілю та автоматичне коригування навчальної траєкторії через функцію подібності з урахуванням багатовимірних показників результативності. Застосовано метод рандомізованого контрольованого А/В-експерименту для емпіричної перевірки ефективності запропонованої математичної моделі та реалізованого на її основі алгоритму адаптації на вибірці зі 60 студентів з певної дисципліни. Проведено експериментальне порівняння запропонованого підходу зі статичною стратегією навчання (фіксований силабус для всіх студентів) за п'ятьма показниками: точністю виконання завдань, ретенцією знань, рівнем завершення модулів, залученістю та когнітивним перевантаженням. Унаслідок проведеного експерименту встановлено, що адаптивний підхід до формування індивідуальної траєкторії навчання студента на основі його динамічного профілю статистично значуще перевищує статичний підхід за всіма показниками, зокрема – забезпечує приріст точності навчання на 8 %, покращення ретенції на 11 % та зниження когнітивного перевантаження на 44 %, що підтверджує ефективність запропонованої математичної моделі.

Ключові слова: трикомпонентна модель; динамічний когнітивний профіль; інтегральна функція подібності; векторний простір характеристик; замкнений цикл адаптації; алгоритм персоналізації контенту; зона найближчого розвитку.

Вступ / Introduction

У сучасній освітній практиці дедалі актуальнішою стає проблема персоналізації навчального процесу. Студенти приходять з різним рівнем попередньої підготовки, володіють індивідуальними стилями навчання, демонструють різний темп засвоєння матеріалу та мають унікальні мотиваційні фактори та індивідуальні освітні потреби. Ігнорування цих відмінностей призводить до зниження їхньої залученості, погіршення успішності та зростання відсіву. У відповідь на ці виклики традиційні стандартизовані моделі навчання втрачають ефективність, і дедалі більшого значення набуває

персоналізоване навчання, що фокусується на адаптації освітнього процесу до потреб кожного студента.

У цьому контексті особливу увагу привертають інтелектуальні системи навчання ILS (англ. *Intelligent Learning System*), що ґрунтуються на технологіях штучного інтелекту (ШІ). Завдяки аналізу поведінки та прогресу користувача, прогнозування труднощів навчання, динамічній адаптації навчального контенту та методів подачі матеріалу, складності завдань та форми зворотного зв'язку, інтелектуальні системи навчання (ICH) можуть ефективно виконувати роль індивідуального репетитора і мають потенціал радикально трансформувати освітній процес. Отже, ICH відкривають шлях до ство-

© Copyright 2026 by the author(s)

Ковалюк Тетяна Володимирівна, канд. техн. наук, доцент, кафедра програмних систем і технологій.

Email: tetyana.kovalyuk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0002-1383-1589>

Кобець Наталія Михайлівна, інженер, відділ ручного тестування. Email: nmkobets@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-4266-9741>

Цитування за ДСТУ: Ковалюк Т. В., Кобець Н. М. Математичне моделювання адаптивної інтелектуальної системи для персоналізованого навчання. Науковий вісник НЛТУ України. 2026, т. 36, № 3. С. 104–113.

Citation APA: Kovalyuk, T. V., & Kobets, N. M. (2026). Mathematical modeling of an adaptive intelligent learning system for personalized education. *Scientific Bulletin of UNFU*, 36(3), 104–113. <https://doi.org/10.36930/40360311>

рення персоналізованих навчальних середовищ, здатних реагувати на зміни у знаннях, потребах і мотивації студентів у режимі реального часу.

Попри зростання інтересу до персоналізованого навчання та розвиток інтелектуальних навчальних систем, нині відсутня цілісна математична модель, яка б комплексно описувала адаптивні механізми взаємодії між студентом, навчальним контентом і системою прийняття рішень. Наявні підходи до моделювання процесу навчання та поведінки студента здебільшого фрагментарні, орієнтовані на окремі компоненти, наприклад, моделювання знань студента або рекомендаційні алгоритми, і не забезпечують системного аналізу та прогнозування ефективності процесу навчання чи формалізованого удосконалення освітніх траєкторій.

З огляду на це, постає потреба у розробленні комплексної математичної моделі адаптивної інтелектуальної системи навчання (AICH), яка б об'єднала ключові компоненти персоналізованого навчання – профіль користувача, адаптивну логіку, механізми оцінювання та динамічний контент – у єдину формалізовану структуру, придатну для аналізу поведінки та навчального прогресу здобувача освіти, порівняння ефективності різних педагогічних стратегій та вдосконалення індивідуальних освітніх траєкторій. Саме ця проблема є предметом дослідження у запропонованій статті.

Актуальність дослідження полягає у переході до гнучких освітніх стратегій, що базуються на персоналізації та використанні адаптивних технологій навчання для підвищення якості засвоєння матеріалу здобувачами освіти.

Об'єкт дослідження – моделювання роботи адаптивної інтелектуальної системи для персоналізованого навчання студента.

Предмет дослідження – математичні моделі, методи та алгоритми побудови інтелектуального навчального середовища, які забезпечують гнучку трансформацію навчальної траєкторії студента на основі аналізу його когнітивного профілю, цілей та контексту.

Мета роботи – розробити комплексну математичну модель адаптивної інтелектуальної навчальної системи, яка б об'єднувала динамічний профіль студента, формалізовані характеристики навчального контенту та інтегрований механізм оцінювання їх відповідності в єдину структуру, придатну для аналізу та подальшого вдосконалення навчального процесу.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати наявні підходи до моделювання знань і поведінки студента, предметної області та педагогічних стратегій адаптації в AICH, виявити системні прогалини у наявних дослідженнях, що дасть змогу обґрунтувати необхідність розроблення цілісної математичної моделі та визначити вимоги до її структури;
- розробити багатовимірну динамічну модель профілю студента, що охоплює когнітивні, поведінкові та емоційні його характеристики як єдиний вектор, який еволюціонує в реальному часі, що забезпечить формалізовану основу для точного та контекстуально чутливого підбору навчального контенту відповідно до поточного когнітивно-поведінкового стану студента;
- формалізувати паспорт навчального контенту як багатовимірний статичний вектор ознак, який містить педагогічні характеристики навчального матеріалу, що уможливить структурований опис контенту, придатний для

автоматизованого зіставлення з профілем студента та порівняння альтернативних навчальних ресурсів;

- побудувати інтегральну функцію подібності між профілем студента та паспортом контенту як математичний механізм персоналізованого вибору навчальних матеріалів, що дасть змогу замінити евристичні рішення формалізованим критерієм відповідності, придатним для аналізу взаємодії "студент – контент", налаштування параметрів адаптації та удосконалення логіки вибору навчального контенту;
- розробити алгоритм адаптивного замкненого циклу навчання з формальними умовами його завершення та систему багатовимірних показників індивідуальної результативності, що забезпечить систематичне оновлення профілю студента, коригування навчальної стратегії і вимірювану оцінку ефективності реалізації адаптивного навчання на кожному кроці взаємодії;
- провести експериментальну перевірку ефективності запропонованої моделі порівнянню зі статичним підходом за допомогою рандомізованого А/В-експерименту, що дасть змогу отримати статистично обґрунтовані докази переваг адаптивного підходу за ключовими показниками навчання та когнітивного навантаження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботі [7] систематизовано розвиток класичної "Моделі чотирьох R", що описує базові компоненти інтелектуальних систем навчання (ILS): модель студента, модель предметної області, педагогічну модель та модель інтерфейсу. Ця концепція залишається архітектурним шаблоном для сучасних AICH і визначає термінологічну та структурну основу більшості подальших етапів дослідження у галузі.

У дослідженні [15] визначили потребу в узгодженості між штучним інтелектом в освіті AIED (англ. *Artificial Intelligence in Education*), комп'ютерно-підтримуваним спільним навчанням CSCL (англ. *Computer-supported Collaborative Learning*), інтелектуальним аналізом освітніх даних EDM (англ. *Educational Data Mining*) та аналітикою навчання LA (англ. *Learning Analytics*). Проте цей процес залишився не формалізованим авторами.

Дослідження в галузі AICH розвиваються за трьома взаємопов'язаними напрямками: моделювання стану та поведінки студента, формалізація предметної області та математичні механізми педагогічної адаптації. Розглянемо стан досліджень і виявлені прогалини в кожному з них.

Моделювання стану та поведінки студента в AICH. Модель студента є центральним компонентом будь-якої AICH. У роботі [8] автори дослідили використання методу байєвського відстеження знань ВКТ (англ. *Bayesian Knowledge Tracing*), що моделює рівень засвоєння як приховану змінну марківської моделі та оцінює ймовірність засвоєння конкретного знання з часом, в адаптивних навчальних системах та освітньому дата-майнінгу. Автори зазначили, що попри широке застосування цього підходу в адаптивних системах, ВКТ оперує тільки бінарним станом знання ("засвоєно / не засвоєно") і не враховує множини параметрів, що визначають реальну готовність студента до навчання.

У роботі [4] досліджено теорію відповідей на завдання (англ. *Item Response Theory*, IRT) та її застосування в комп'ютерному адаптивному тестуванні. Автор вказав на те, що хоча адаптивне тестування забезпечує вищі показники надійності, ці покращення не супроводжуються пропорційним зростанням прогностичної валідності результатів. Автор вказує на ризик переоцінювання ефективності функціонування адаптивного тесту-

вання на основі формальних метрик і наголошує на необхідності комплексного оцінювання якості тестування з урахуванням не тільки надійності, а й емпірично підтвердженої валідності. У дослідженні [9] автори довели, що ІІІ радикально трансформує освіту через персоналізацію навчання та автоматизацію адміністрування, що забезпечує здатність інтелектуальних систем адаптувати навчальний шлях під індивідуальні потреби учня, проте успіх такої трансформації залежить від вирішення етичних питань та готовності вчителів до нової ролі фасилітаторів у цифровій екосистемі.

Сучасні підходи до моделювання стану та поведінки студента переходять до нейромережових архітектур. Так, у роботі [21] запропоновано механізм, як зробити навчання не тільки когнітивним (передача знань), а й афективним (врахування емоцій здобувачів освіти). Автори пропонують поєднати глибоке навчання з підкріпленням DRL (англ. *Deep Reinforcement Learning*,) на основі нейронних мереж з теорією оцінювання. Це дає можливість змінювати стратегію навчання (policy) у реальному часі так, щоб максимізувати не тільки оцінку, а й позитивний емоційний стан (наприклад, стан "поток"). У роботі [13] автори дослідили застосування графових нейронних мереж GNN (англ. *Graph Neural Networks*,) в інтелектуальних навчальних системах і показали, що GNN ефективно моделюють концептуальні зв'язки предметної області й дають можливість будувати точніші рекомендації маршрутів. Попри ці досягнення, більшість моделей профілю студента залишаються частковими: вони охоплюють або рівень знань, або емоційний стан, або навчальний стиль, але не їх спільну динаміку.

Формалізація предметної області та контенту. У роботі [2] автори дослідили метод автоматизованої розбудови контекстних графів знань у спосіб поєднання текстового майнінгу та семантичного доповнення графів для покращення персоналізованих рекомендацій. Автори довели, що така архітектура дає змогу перетворювати неструктуровані навчальні матеріали на логічно зв'язані освітні маршрути, які динамічно адаптуються до контексту навчання та індивідуальних потреб користувача, забезпечуючи високу точність освітніх порад. Застосування графових згорткових мереж із механізмом уваги для підбору релевантних концептів у MOOC-платформах дослідили автори у роботі [11]. Запропонована у статті модель розглядає дані MOOCs як гетерогенний інформаційний граф, де вузлами є не тільки студенти та концепти, а й курси, відео, вчителі та самі навчальні матеріали. Водночас у більшості досліджень [2, 11] характеристики навчального контенту редукуються до рівня складності або тематичної приналежності. Педагогічні характеристики матеріалу – фаза навчання, формат, навчальна цінність, відповідність стилю студента – у формальних моделях здебільшого ігноруються або задаються неявно, що істотно обмежує можливість тонкої персоналізації.

Математичні механізми педагогічної адаптації. Цей механізм визначає, як система обирає наступний навчальний елемент. У роботі [17] автори запропонували метод глибокого відстеження знань LC-KT (англ. *Learning Curve based Knowledge Tracing*), який інтегрує теорію кривих навчання в нейронні мережі для врахування індивідуальної динаміки прогресу студентів. Результати дослідження на реальних освітніх даних під-

твердили, що такий метод глибокого відстеження знань значно точніше прогнозує успішність навчання порівняно з класичними моделями, даючи змогу системам адаптувати послідовність викладу матеріалу не тільки до результатів відповідей, а й до індивідуального темпу засвоєння знань кожним учнем.

У роботі [5] проаналізовано методи Q-навчання в контексті марківських процесів прийняття рішень MDP (англ. *Markov Decision Process*,) та показано їх придатність для вдосконалення послідовності подачі навчального матеріалу. У роботі [1] автори застосували алгоритм проксимальної оптимізації політики PPO (англ. *Proximal Policy Optimization*,) у поєднанні з глибинним навчанням з підкріпленням для метакогнітивних інтервенцій в ITS і довели, що адаптивні DRL-стратегії ефективніші за статичні підходи під час навчання метакогнітивним навичкам. У дослідженні [3] автори застосували підхід контекстуальних бандитів (англ. *Contextual Bandits*) для підбору оптимального навчального ресурсу за умов обмеженості даних: контекстом виступає вектор стану студента, дією – вибір конкретного завдання, а винагородою – приріст знань або якість виконання роботи. У систематичному огляді [16] дослідники підтвердили ефективність RL-підходів для вдосконалення педагогічних дій, однак констатували, що у жодному з аналізованих досліджень не запропоновано формалізованої функції відповідності між характеристиками студента та параметрами контенту як самостійного математичного об'єкта.

У роботі [10] автори дослідили інтеграцію великих мовних моделей LLM (англ. *Large Language Model*) в архітектуру ITS та показали можливості LLM для генерування персоналізованих пояснень і реалізації діалогового навчання. Проте, як зазначають автори [12] у систематичному огляді, LLM функціонують як "чорні скриньки" і не забезпечують формалізованого опису стану студента чи логіки вибору контенту, що істотно ускладнює їх поєднання із класичними математичними моделями AICH.

Виявлені прогалини у дослідженнях. Аналіз публікацій виявляє три системні прогалини, які визначають актуальність пропонованого дослідження:

1. Відсутність цілісної математичної моделі AICH. Моделі знань і поведінки студента, предметної області та стратегій педагогічної адаптації до індивідуальних потреб здобувача освіти розробляються ізольовано і не об'єднані в єдину формалізовану структуру, придатну для аналізу та вдосконалення навчального процесу.
2. Фрагментарність профілю студента. Більшість підходів охоплюють тільки окремі виміри студента – без формалізації їх як єдиного динамічного вектора характеристик, що еволюціонує в реальному часі під впливом навчальних взаємодій.
3. Відсутність формалізованої функції відповідності студент – контент. Жодне з аналізованих досліджень не пропонує інтегральної функції подібності між профілем студента і характеристиками навчального матеріалу як самостійного математичного об'єкта.

Отже, незважаючи на істотний прогрес в окремих напрямках моделювання AICH, цілісна математична модель, яка б органічно об'єднала динамічний профіль студента, формалізований паспорт контенту та інтегральний механізм оцінювання їх відповідності в єдину аналізовану структуру, в науковій літературі досі відсутня. Саме ця прогалина визначає предмет і напрям запропонованого дослідження.

Матеріали та методи дослідження. Для досягнення поставленої мети застосовано комплекс методів. Системний підхід до аналізу адаптивного навчання використовується для виявлення структури, компонентів та взаємозв'язків у процесі адаптивного навчання. Методи математичного моделювання забезпечують формалізацію процесу навчання з урахуванням індивідуальних характеристик студента, складності завдань і прогресу навчання. Методи рандомізованого контрольованого експерименту застосовуються для емпіричної перевірки гіпотези про ефективність запропонованої моделі.

Гіпотеза дослідження: впровадження математичної моделі, що описує адаптивну взаємодію між студентом, навчальним контентом і логікою системи на основі інтегральної функції подібності, дає змогу покращити індивідуальну результативність навчання порівняно зі статичними підходами.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discuss

Трикомпонентна модель AICH. Запропонована математична модель AICH містить три взаємопов'язані компоненти: динамічний вектор профілю студента $P(s_i, t)$, що охоплює сім параметрів і оновлюється в реальному часі; статичний паспорт контенту $Q(c_j)$, що формалізує шість характеристик навчального матеріалу, включно з педагогічними параметрами; інтегральна функція подібності Sim , що поєднує ці компоненти в єдиний механізм адаптивного вибору. Разом вони утворюють формалізовану структуру, яка усуває три виявлені раніше прогалини.

Побудова трикомпонентної математичної моделі AICH. Нехай задано p -вимірний метричний простір ознак $[0, 1]^p$, який описує множину параметрів освітнього процесу (точність виконання завдань/формування відповідей, ретенція знань, рівень завершення курсів або модулів, залученість студента до навчального процесу, когнітивне перевантаження тощо). Кожна координата цього простору нормалізована на відрізок $[0, 1]$, що забезпечує уніфікацію різнорідних метрик освітнього процесу (часових, кількісних та якісних показників) і робить усі координати простору ознак рівноправними.

Введемо такі позначення: множина студентів $S = \{s_i \mid i = \overline{1, M}\}$, де $|S| = M$ позначає кількість студентів; множина навчального контенту $C = \{c_j \mid j = \overline{1, N}\}$, де $|C| = N$ позначає обсяг контенту; множина атрибутів (ознак) студента $A = \{a_k \mid k = \overline{1, K}\}$, де $|A| = K$ позначає кількість атрибутів профілю студента (рівень знань, стиль навчання, швидкість сприйняття, інтереси тощо). Задамо множину атрибутів контенту $B = \{b_l \mid l = \overline{1, L}\}$, де $|B| = L$ – кількість атрибутів навчального матеріалу (складність, формат (відео/текст), тривалість, предметна область тощо). Простори ознак узгоджені, тобто кожному атрибуту студента відповідає релевантний атрибут контенту.

Динамічний профіль студента. Для кожного студента $s_i \in S$ у довільний момент часу t (дискретний крок навчального процесу) сформуємо набір кількісних та якісних характеристик і визначимо його профіль як вектор поточного стану $P_i(t)$ i -го студента, що є точкою у просторі $[0, 1]^p$:

$$P_i(t) = (p_{ik}(t), \mid i = \overline{1, N}; k = \overline{1, K}), P_i(t) \in [0, 1]^p,$$

де компоненти вектора відображають: когнітивний підпростір – рівень засвоєння знань $p_1(t)$ (зростає з часом, свідчить про прогрес студента), швидкість навчання $p_2(t)$ (темп засвоєння інформації), стиль навчання $p_3(t)$ (візуальний, аудіальний, читання/писання, кінестетичний, не пов'язаний з часом), історія помилок $p_4(t)$ (акумльований показник типових утруднень); поведінковий підпростір – активність $p_5(t)$ (оцінюється за частотою кліків, переглядів, участі в дискусіях, зменшується під кінець сесії), увага (тривалість фокусування на навчальному об'єкті), інтенсивність взаємодії; емоційний підпростір – емоційний стан $p_6(t)$ (валеологічний показник: втома, стрес, задоволення), мотивація $p_7(t)$ (рівень готовності до подолання когнітивних труднощів), рівень когнітивного навантаження $p_8(t)$. У профіль студента можна додати й інші атрибути, зокрема – історію використаного контенту, рівень стресу, історію успішності, рівень критичного мислення, рівень залученості, інтереси, специфічні навички тощо.

Паспорт контенту. Навчальний контент $c_j \in C, j = \overline{1, N}$ описується як статичний вектор числових і категоріальних атрибутів із множини $B = \{b_l \mid l = \overline{1, L}\} \in [0, 1]^p$, що не змінюється у процесі використання. Він формується на основі фіксованого набору характеристик навчального ресурсу (тематичні розділи, рівень складності, формат подання, ключові компетентності тощо), які не змінюються у процесі його використання. На відміну від динамічних моделей профілю студента, що еволюціонують у часі під впливом взаємодії та накопичення даних, паспорт контенту є інваріантним відносно контексту застосування і відображає тільки властивості самого навчального матеріалу. Контент навчального ресурсу не змінюється, але система переоцінює його відповідність стану студента щоразу, коли змінюється останній. Паспорт контенту $Q(c_j)$ визначимо як статичний вектор числових і категоріальних атрибутів $Q_j = (q_{jk}, k = \overline{1, K}), j = \overline{1, N} \in [0, 1]^p$, де координати q_{jk} визначають властивості контенту, наприклад, тип (текст, відео, інтерактивна вправа тощо), предметну область (математика, інформатика тощо), рівень складності, дидактичне призначення об'єкта контенту (презентація нового матеріалу, тренінг, контроль), навчальну цінність/релевантність (вага, яку задає експерт).

Інтегральна функція подібності. Для оцінювання відповідності контенту c_j поточному стану студента s_i введемо інтегральну функцію подібності $Sim(s_i, c_j, t)$ (англ. *Similarity Function*) як зважену лінійну комбінацію часткових функцій узгодженості k -х ($k = \overline{1, N}$) атрибутів динамічного профілю студента $P_i(t)$ та паспорта контенту $Q(c_j)$, побудовану за методом простого адитивного зважування SAW (англ. *Simple Additive Weighting*):

$$Sim(s_i, c_j, t) = \sum_{k=1}^K w_k f_k(p_{ik}(t), q_{jk}) \in [0, 1]; \quad i = \overline{1, M}; j = \overline{1, N},$$

де: $p_{ik}(t) \in [0, 1]$ – k -й динамічний атрибут профілю i -го студента в момент часу t ; $q_{jk} \in [0, 1]$ – k -й статичний атрибут паспорта j -го контенту, функція $f_k(p_{ik}(t), q_{jk}) \in [0, 1]$ визначає ступінь узгодженості (відповідності) між значенням k -го атрибуту студента s_i у момент часу t та відповідного атрибуту елемента контенту c_j , $w_k > 0$ – вага (важливість) k -го атрибута за умови $\sum_{k \in K} w_k = 1$.

Функції узгодженості. Множинність часткових функцій узгодженості $f_k(p_{ik}(t), q_{jk})$ відображає гетерогенність атрибутів профілю студента і паспорту контенту: оскільки різні пари атрибутів мають різну природу і різні шкали вимірювання, кожна пара описується окремою функцією. Розглянемо деякі з них.

Функція диференційованої (відмінної) узгодженості складності контенту показує, наскільки складність контенту l_j відповідає поточним можливостям i -го студента в момент часу t , враховуючи його знання та прогрес. Функція реалізує принцип "зона найближчого розвитку" ZPD (англ. *Zone Of Proximal Development*): студенту варто давати матеріал трохи складніший за поточний рівень, щоб стимулювати прогрес, але не перевантажувати його. Цю функцію побудовано на основі гаусового радіально-базисного ядра:

$$f_\delta(s_i, c_j, t) = \text{Exp} \left(\frac{(p_i(t) - l_j)^2}{2\sigma^2} \right),$$

де: $p_i(t) \in [0, 1]$ – поточний рівень знань студента; $l_j \in [0, 1]$ – рівень складності контенту; $\sigma > 0$ – параметр чутливості системи, що визначає ширину зони прийнятності контенту: за малих значень σ система добирає тільки контент із рівнем складності, близьким до поточного рівня знань студента (жорстка адаптація); за великих значень σ допускається ширший діапазон складності (м'яка адаптація). Параметр σ не залежить від конкретного студента чи контенту і задається єдиним для всієї системи під час її налаштування. Функція досягає максимуму 1 за повної відповідності рівня знань студента і складності контенту та монотонно спадає в міру зростання відхилення між ними, що математично реалізує педагогічний принцип зони найближчого розвитку (ZPD). Значення 0 означає велику різницю між складністю j -го контенту і можливостями його опанування i -м студентом.

Функцію узгодженості стилю навчання студента та формату контенту f_s визначено на основі косинусної подібності між вектором стилю навчання студента $p_3 \in [0, 1]^4$ та вектором форматів $\tau_j \in [0, 1]^4$ j -го контенту, компоненти яких відповідають чотирьом стилям навчання за моделлю VARK (Visual, Aural, Read/Write, Kinesthetic).

$$f_s(s_i, c_j) = \frac{\langle p_3, \tau_j \rangle}{\|p_3\| \times \|\tau_j\|} \in [0, 1],$$

де $\langle p_3, \tau_j \rangle$ – скалярний добуток; $\|\cdot\|$ – евклідова норма. Функція f_s не залежить від t , оскільки стиль навчання є статичним атрибутом профілю студента, що визначається одноразово за результатами діагностичного тестування.

Студент може поєднувати кілька стилів навчання одночасно, тому кожна компонента вектора p_3 набуває значення 1 за наявності відповідного стилю або 0 – за відсутності; вектор $\tau_j \in [0, 1]^4$ аналогічно описує, які формати подачі матеріалу підтримує j -й контент. Функція f_s дає можливість системі персоналізувати матеріал, підвищуючи комфорт та ефективність засвоєння.

Функція узгодженості стратегії навчання $f_\pi(s_i, c_j, t)$ визначає, наскільки j -й контент відповідає поточному етапу навчання i -го студента. Для визначення функції узгодженості стратегії навчання використано косинусну подібність:

$$f_\pi(s_i, c_j, t) = \frac{\langle \pi_{need}(s_i, t), \pi_j \rangle}{\|\pi_{need}(s_i, t)\| \times \|\pi_j\|},$$

де: $\pi_{need}(s_i, t) \in [0, 1]^4$ – вектор поточної педагогічної потреби студента, відображає міру необхідності кожної з чотирьох фаз навчального процесу (введення, закріплення, практики та контролю) у поточний момент часу t і визначається автоматично на основі динамічного профілю $P(s_i, t)$ студента; $\pi_j \in [0, 1]^4$ – педагогічний профіль контенту, є статичною характеристикою навчального матеріалу, що задається одноразово і описує, для якої педагогічної фази цей матеріал призначений. Функція узгодженості $f_\pi(s_i, c_j, t)$ вимірює косинусну подібність між цими двома векторами, забезпечуючи добір контенту, що відповідає поточній педагогічній потребі студента.

Інші компоненти (знання, швидкість, історія помилок, мотивація) також формалізуються через відповідні функції узгодженості.

Введемо порогове значення відповідності $\theta(t)$, яке для динамічного профілю студента також може змінюватися з часом. Наприклад, якщо студент виснажений, то $\theta(t)$ знижується (система може пропонувати простіший матеріал), якщо студент високо мотивований, то $\theta(t)$ підвищується (система підбирає складніший контент). Вибір $\theta(t)$ можна здійснити експертно або адаптивно, коли система підбиратиме $\theta(t)$ так, щоб зменшити кількість відсіву чи покращити середню результативність.

Формалізація механізму адаптивного вибору контенту. Кожен студент має динамічний профіль, який змінюється під час навчання (рівень знань, мотивація, концентрація, історія помилок). Кожен контент має паспорт ознак (складність, формат, релевантність, вимоги до попередніх знань). Механізм вибору навчального контенту в АІСН ґрунтується на функції подібності $Sim()$ між профілем студента $P(s_i, t)$ та паспортом контенту $Q(c_j)$. Система підбирає такий контент, для якого значення подібності найбільше та перевищує певний поріг $\theta(t)$ для поточного часу t :

$$j^* = \arg \max_{j \in Q} Sim(P(s_i, t), Q(c_j)), \text{ де } Sim(P(s_i, t), Q(c_j)) \geq 0.$$

Цей механізм забезпечує персоналізацію навчання: студент отримує такий матеріал, який відповідає його поточному стану та потребам. Без подібної моделі система ризикує давати такий контент, який може бути надто складним, що демотивує студента, або надто простим, який не розвиває його.

Показники індивідуальної результативності. Результативність навчання не можна вимірювати тільки кількістю правильних відповідей. Потрібні багатовимірні показники, що враховують як когнітивні, так і поведінкові характеристики, що створюють багатовимірний портрет успіху студента. Модель дає можливість відстежувати не тільки результат "правильно/неправильно", а й динаміку розвитку. Розглянемо деякі показники результативності студента. Приріст рівня знань:

$$\Delta K_i = K_i^{out} - K_i^{in},$$

де: K_i^{in} – початковий рівень знань, K_i^{out} – рівень знань після проходження блоку навчання. Швидкість навчання: $V_i = \Delta K_i / T$, де T – витрачений час на отримання приросту знань. Стійкість знань (ретенція): $R_i = K_i^{delayed} / K_i^{out}$, де $K_i^{delayed}$ – рівень знань після певної

паузи (наприклад, через тиждень). Активність та залученість визначає кількість взаємодій із системою, час у фокусі, використання підказок тощо.

Індивідуальний інтегральний коефіцієнт результативності з урахуванням локальних показників:

$$E_i = w_1 \cdot \Delta K_i + w_2 \cdot V_i + w_3 \cdot R_i + w_4 \cdot A_i, i = \overline{1, M},$$

де w_i – вагові коефіцієнти, що визначають пріоритети освітньої системи (знання, швидкість, стійкість, активність).

Алгоритм покращення індивідуальної результативності навчання. Покращення відбувається за принципом замкненого циклу: профіль $\rightarrow$ вибір контенту $\rightarrow$ зворотний зв'язок $\rightarrow$ оновлення профілю $\rightarrow$ корекція стратегії, і складається з сімох кроків.

Крок 1. Ініціалізація: формування початкового профілю студента $P(s_i, 0)$, встановлення вагомостей $w_j, j = \overline{1, n}$ для показників результативності.

Крок 2. Вибір контенту: використовується функція подібності $Sim(P(s_i, t), Q(c_j))$, обирається паспорт j -го контенту $Q(c_j)$, який найкраще відповідає профілю $P(s_i, t)$ i -го студента в момент часу t .

Крок 3. Навчальна взаємодія: студент проходить обраний контент, система фіксує відповіді, час, рівень залучення.

Крок 4. Оцінка результативності: обчислюються показники $\Delta K_i, V_i, R_i, A_i$, формується інтегральний показник E_i .

Крок 5. Адаптація стратегії: якщо $E_i < \theta_E$ (пороговий рівень результативності), система знижує складність контенту, підбирає інший формат (відео замість тексту, приклади замість теорії), додає більше вправ. Якщо $E_i > \theta_E$, це означає, що система ускладнює контент.

Крок 6. Оновлення профілю студента: динамічні атрибути профілю $P(s_i, t)$ оновлюються на основі результатів взаємодії.

Крок 7. Перевірка умов завершення роботи алгоритму. Якщо умови виконані, то завершити роботу алгоритму, інакше цикл повторюється.

Розглянемо умови завершення роботи алгоритму. Вважатимемо, що алгоритм закінчує роботу, коли виконується хоча б одна з умов: студент досяг цільового рівня знань; прогрес зупинився (студент досяг плато); вичерпано релевантний контент; вийшли за часові/ресурсні межі.

Наведемо формальний опис умов завершення роботи алгоритму.

1. Студент досяг достатнього рівня знань для переходу на наступний модуль/курс: $K_i(t) \geq K_{target}$, де: $K_i(t)$ – поточний рівень знань студента, K_{target} – пороговий рівень, заданий викладачем або системою.
2. Навчання перестало давати істотний приріст знань, студент досяг свого "плато" протягом m ітерацій: $K_i(t+1) - K_i(t) < \varepsilon, \varepsilon > 0$, де: ε – заздалегідь визначений поріг (дуже мала величина), $K_i(t+1), K_i(t)$ – показники результативності i -го студента в моменти часу $t+1$ та t .
3. Вичерпання контенту, для поточного рівня студента більше немає релевантного контенту: $Sim(P(s_i, t), Q(c_j)) < 0$ для всіх $Q(c_j)$.
4. Обмеження часу або кількості ітерацій проходження певного курсу: $t > T_{max}$ або $n_{iterations} > N_{max}$, де: T_{max} – максимально допустимий час навчальної взаємодії; N_{max} – максимально допустима кількість ітерацій/циклів вибору контенту.
5. Досягнення цільових показників результативності, зокрема – мотивація $M_i(t) \geq M_{target}$ та темп навчання $V_i(t)$ стабілізувалися, певний відсоток навчальних модулів завершено.

Логічна диз'юнкція кількох критеріїв завершення роботи алгоритму:

$$STOP \Leftrightarrow (K_i(t) \geq K_{target}) \cup (\Delta K_i(t) < \varepsilon) \cup (\text{нема контенту}) \cup (t > T_{max}).$$

Отже, алгоритм реалізує адаптивний цикл навчання, що поєднує добір навчального контенту, аналіз результатів взаємодії і корекцію стратегії задля підвищення індивідуальної результативності. Це дає змогу уникати надмірної складності, підтримувати мотивацію, забезпечувати поступове зростання рівня навантаження та сприяти розвитку когнітивних здібностей.

Порівняння ефективності функціонування адаптивної моделі та статичних підходів. Для перевірки гіпотези використано А/В-експеримент (кількість студентів $n = 60$; по 30 студентів у кожній групі) на базі дисципліни "Основи програмування". Групу А (експериментальну) навчали за адаптивною моделлю, в якій навчальний контент добирався динамічно на основі інтегральної функції подібності Sim між поточним профілем студента $P(s_i, t)$ та паспортом контенту $Q(c_j)$; групу В (контрольну) навчали за статичною моделлю з фіксованим силабусом та єдиною навчальною траєкторією для всіх студентів незалежно від їх індивідуальних характеристик.

Тривалість: 4 тижні. Послідовність: pretest $\rightarrow$ навчальний період $\rightarrow$ posttest $\rightarrow$ відкладений тест (через 2 тижні). Рандомізація 1:1 зі стратифікацією за базовим рівнем знань.

Первинні метрики: приріст знань $\Delta K = K_{post} - K_{pre}$ (у балах або у відсотках), ефективність навчання (англ. *Learning Efficiency*) $LE = \Delta K / T$, де T – час, витрачений на навчання, для визначення швидкості досягнення результату.

Вторинні метрики застосовують як допоміжні показники для комплексного оцінювання ефективності функціонування адаптивної системи. Вони дають можливість відстежувати не тільки результативність виконання завдань, але й поведінкові характеристики студентів (табл. 1) і містять такі показники: точність виконання завдань (Accuracy), ретенція знань (Retention), рівень завершення курсу (Completion rate), показники залученості (Engagement), перевантаження (Overload).

Статистичне порівняння результатів груп А (адаптивний підхід до формування навчальної траєкторії студента) та В (статичний підхід до організації навчання) здійснювалось за допомогою незалежного t -тесту для кожної метрики. Для кожної змінної наведено середні значення ($M \pm SD$), різницю між групами, 95 % довірчий інтервал різниці, t -статистику з $df \approx 58$, p -значення, а також величину ефекту у вигляді *Cohen's d* та еквівалентний коефіцієнт r . Для перевірки стійкості висновків було розглянуто також непараметричний U-тест Манна-Вітні (у разі порушення нормальності розподілу). Результати порівняння адаптивного та статичного підходів до вибору навчального контенту за А/В-експериментом подано в табл. 2 у вигляді описових статистик (середнє значення та стандартне відхилення) і результати інференційної статистики (t -тест, довірчі інтервали, p -значення).

Візуалізація наведених у табл. 2 результатів у вигляді стовпчастих діаграм (рисунок) дає змогу детальніше проаналізувати характер впливу адаптивних алгоритмів на якість навчання. Графічні залежності наочно демонструють стійку тенденцію до переваги групи А (адап-

тивний підхід на базі AICH) за всіма позитивними метриками освітнього процесу. Водночас, діаграма когнітивного навантаження чітко ілюструє головну перевагу

запропонованої математичної моделі – здатність мінімізувати перевтому студента завдяки гнучкій персоналізації навчального треку.

Табл. 1. Вторинні метрики ефективності функціонування адаптивної інтелектуальної навчальної системи /
Secondary performance metrics for an adaptive intelligent learning system

Метрика	Опис	Визначення
Accuracy	Частка правильно виконаних завдань серед усіх спроб	$Accuracy = N_{correct} / N_{total}$, де: $N_{correct}$ – кількість правильно виконаних завдань; N_{total} – загальна кількість завдань.
Retention	Рівень збереження знань у відкладеному тесті після певного часу	$Retention = K_{delayed} / K_{post}$, де: $K_{delayed}$ – результат відкладеного тесту; K_{post} – результат одразу після навчання.
Completion Rate	Частка завершених курсів/модулів від загальної кількості	$CompletionRate = N_{completed} / N_{enrolled}$, де $N_{completed}$ – кількість студентів, які завершили курс/модуль; $N_{enrolled}$ – кількість студентів, які розпочали курс/модуль.
Engagement	Рівень активної взаємодії студента із системою	За часом у фокусі: $Engagement_{time} = T_{focus} / T_{total}$, де: T_{focus} – час активної взаємодії з контентом (у фокусі навчального середовища); T_{total} – загальний час сесії. За частотою входів: $Engagement_{freq} = N_{sessions} / T_{period}$, де: $N_{sessions}$ – кількість входів користувача; T_{period} – тривалість спостереження (наприклад, тиждень).
Overload	Частка сесій, де складність перевищує когнітивний рівень студента	$Overload = N_{over} / N_{sessions}$, де: N_{over} – кількість сесій із перевищенням складності когнітивного порогу студента; $N_{sessions}$ – загальна кількість сесій.

Табл. 2. А/В-експеримент: порівняння адаптивного та статичного підходів до навчання /
A/B experiment: a comparison of adaptive and static approaches to learning

Метрика	Група А (Адаптивний) $M \pm SD$	Група В (Статичний) $M \pm SD$	Різниця (А – В)	95 % CI різниці	$t (df=58)$	p	$n (A/B)$
Accuracy	$0,82 \pm 0,08$	$0,74 \pm 0,09$	+0,08	[0,03; 0,13]	2,95	0,004	30/30
Успішність завдань	$0,79 \pm 0,07$	$0,70 \pm 0,08$	+0,09	[0,04; 0,14]	3,25	0,002	30/30
Retention	$0,76 \pm 0,10$	$0,65 \pm 0,11$	+0,11	[0,05; 0,17]	3,50	0,001	30/30
Completion rate	$0,84 \pm 0,06$	$0,76 \pm 0,08$	+0,08	[0,03; 0,13]	2,80	0,007	30/30
Engagement	$0,80 \pm 0,09$	$0,72 \pm 0,10$	+0,08	[0,02; 0,14]	2,60	0,011	30/30
Overload	$0,15 \pm 0,05$	$0,27 \pm 0,06$	-0,12	[-0,18; -0,06]	-3,80	<0,001	30/30

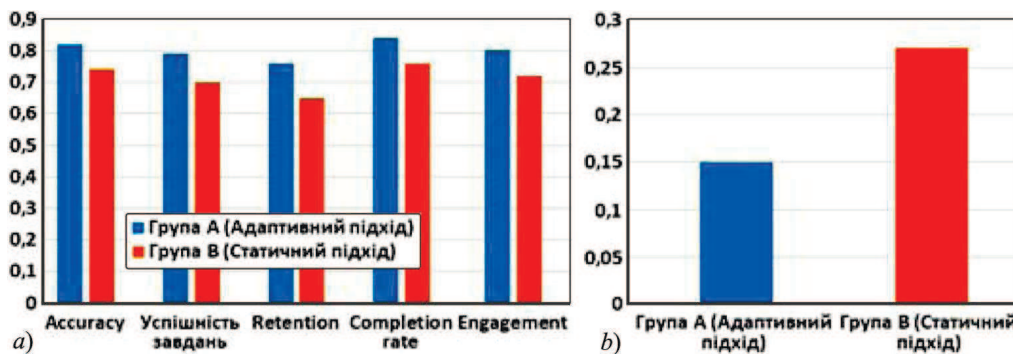


Рисунок. Порівняльний аналіз показників ефективності навчання (а) та когнітивного навантаження (б) для адаптивного та статичного підходів за результатами А/В-експерименту / A comparative analysis of learning effectiveness (a) and cognitive load (b) for adaptive and static approaches based on the results of an A/B test

Отримані результати свідчать, що ефективність адаптивної моделі зумовлена трьома взаємопов'язаними механізмами. По-перше, функція подібності *Sim* реалізує принцип "зони найближчого розвитку": студент отримує матеріал, що відповідає його поточному рівню знань і запобігає як перевантаженню (Overload зменшується на 44 %), так і недостатньому навантаженню. По-друге, динамічне оновлення профілю підтримує релевантність підбору контенту впродовж усього навчання, що пояснює вищі показники Retention (+17 %) та Engagement (+11 %). По-третє, педагогічна фаза у паспорті контенту забезпечує структурованість навчальної траєкторії студента, уникаючи пропусків і надмірного повторення матеріалу.

Порівняння з наявними підходами до навчання. Результати узгоджуються із систематичним оглядом RL-підходів у сфері освіти [16], що підтверджують вищу ефективність адаптивних систем, і, водночас, розширюють ці дані: якщо RL-підходи до побудови освіт-

ніх стратегій оптимізують стратегію педагогічних дій, запропонована модель формалізує саму оцінку відповідності контенту профілю студенту. Порівняно з підходами на основі ВКТ [8], що враховують тільки рівень знань, багатовимірний профіль студента $P(s_i, t)$ забезпечує вищу точність підбору завдяки одночасному врахуванню мотивації, навчального стилю та емоційного стану.

Обмеження дослідження. Дослідження має кілька обмежень, що визначають напрями подальшої роботи. По-перше, вибірка ($n = 60$) є порівняно невеликою; реплікація на ширшій аудиторії потрібна для підтвердження зовнішньої валідності результатів. По-друге, експеримент проведено в межах однієї дисципліни "Основи програмування", що обмежує можливості генералізації на інші предметні області. По-третє, довготривалі ефекти адаптивної моделі (понад 4 тижні) не досліджувались. По-четверте, вагові коефіцієнти w_k у функції *Sim* встановлювались експертно; автоматичне калібрування вагомостей є окремою дослідницькою задачею.

Перспективи розвитку. Пріоритетними напрямками подальших етапів дослідження є: реплікація на більших вибірках і в різних предметних областях; автоматична оптимізація вагомостей w_k методами машинного навчання; інтеграція LLM-агента в педагогічний модуль AICH для генерування персоналізованих пояснень у рамках формалізованої моделі; дослідження гібридних архітектур, що поєднують запропоновану функцію *Sim* з RL-підходами для удосконалення освітніх траєкторій.

Обговорення результатів дослідження. У дослідженні [19] автори проаналізували сучасні підходи до персоналізованого навчання за умов SMART-освіти та встановили, що адаптивні системи забезпечують підвищення ефективності організації навчального процесу завдяки урахуванню індивідуальних характеристик студентів. Отримані в нашій роботі результати узгоджуються з цими висновками, однак розширюють їх формалізацією процесу адаптації через інтегральну функцію подібності.

У роботі [20] автори виявили значний розрив між технічними можливостями систем профілювання студентів, адаптивного навчання та автоматизованого оцінювання і реальним залученням освітян до процесу їх проєктування. На відміну від цього підходу, у нашому дослідженні запропоновано математично формалізований механізм адаптації, що забезпечує не тільки підвищення точності рекомендацій, а й інтерпретованість процесу прийняття рішень.

У дослідженні [6] розглянуто роль освітніх технологій навчання у підвищенні залученості студентів та запропоновано концептуальну модель, яка визначає взаємодію між студентом, викладачем, навчальною програмою та цифровими інструментами. Отримані наші результати узгоджуються з цими висновками, оскільки у проведеному експерименті зафіксовано зростання рівня залученості студентів, що пояснюють адаптивним добром навчального контенту.

У роботі [18] досліджено когнітивне навантаження як ключовий фактор ефективності процесу навчання та обґрунтовано необхідність оптимального балансування складності навчального матеріалу. У нашому дослідженні цей принцип реалізовано через інтегральну функцію подібності та механізм адаптивного порогу, що дало змогу знизити рівень когнітивного перевантаження.

У дослідженні [14] автори здійснили систематичний аналіз застосування методів навчання з підкріпленням в освіті та підтвердили їх ефективність для побудови адаптивних стратегій навчання. Запропонована наша модель доповнює методи навчання з підкріпленням у спосіб введення математичного критерію релевантності контенту характеристикам студента. Це дає змогу використовувати інтегральну функцію подібності як функцію винагороди (англ. *Reward Function*) для оцінювання кожного кроку взаємодії (ітерації адаптації) у межах замкненого циклу навчання.

Отже, результати проведеного дослідження узгоджуються із сучасними науковими підходами до персоналізованого навчання та водночас розширюють їх шляхом введення цілісної математичної моделі адаптивної інтелектуальної навчальної системи. Це підтверджує доцільність проведення дослідження та свідчить про його внесок у розвиток теоретичних і прикладних аспектів адаптивних освітніх технологій навчання.

Отже, внаслідок виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено комплексну трикомпонентну математичну модель адаптивної інтелектуальної навчальної системи, яка базується на інтеграції багатовимірного вектора динамічних характеристик студента, формалізованого паспорта контенту та функції подібності, що у поєднанні з авторським алгоритмом замкненого циклу адаптації та механізмом динамічного порогу забезпечує системне підвищення результативності навчання у спосіб точної синхронізації складності матеріалу з поточним когнітивним станом здобувача освіти.

Практична значущість результатів дослідження – можна використати як математичну основу для проєктування програмної архітектури сучасних адаптивних інтелектуальних навчальних систем, зокрема – під час розроблення модуля динамічного профілювання стану та поведінки студента, механізму автоматизованого добору навчального контенту на основі функції подібності та підсистеми моніторингу результативності навчання, а також можна застосувати в закладах вищої освіти для реалізації персоналізованих освітніх траєкторій у різних предметних областях і впровадити в наявні системи управління навчанням (LMS) як аналітичний модуль адаптації навчального процесу.

Висновки / Conclusions

Розроблено та обґрунтовано комплексну математичну модель адаптивної інтелектуальної навчальної системи (AICH), яка об'єднує динамічний профіль студента, формалізовані характеристики навчального контенту та інтегральний механізм оцінювання їх відповідності в єдину структуру, придатну для аналізу й вдосконалення навчального процесу. За результатами проведеного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проаналізовано наявні підходи до моделювання стану і поведінки студента, формалізації предметної області та стратегій педагогічної адаптації в AICH на основі систематичного аналізу 21 публікації, що дало змогу виявити три системні прогалини: відсутність цілісної математичної моделі, фрагментарність профілю студента та відсутність формалізованої функції відповідності студент – контент.
2. Розроблено та обґрунтовано трикомпонентну математичну модель AICH, яка на основі об'єднання динамічного профілю студента, паспорта контенту та інтегральної функції подібності забезпечує формалізований опис адаптивної взаємодії компонентів системи з логікою вибору контенту студентом, що дає можливість масштабувати персоналізоване навчання у великих освітніх екосистемах, забезпечуючи високу точність адаптації за мінімальних витрат часу викладача.
3. Представлено динамічну модель профілю студента у вигляді багатовимірного вектору, який охоплює когнітивні, поведінкові та емоційні параметри, що на відміну від одновимірних підходів (тільки когнітивний вимір), дає змогу враховувати не тільки рівень їхніх знань, а й динаміку залученості його до освіти та психологічний стан здобувача освіти.
4. Запропоновано та формалізовано інтегральну функцію подібності як самостійний математичний об'єкт, що на підставі оцінювання відповідності між станом студента та характеристиками навчального матеріалу дає змогу замінити евристичні методи підбору контенту (що базуються на суб'єктивних експертних правилах або

жорстко заданих лінійних сценаріях) об'єктивним критерієм "зони найближчого розвитку", який стимулює прогрес студента, не спричиняючи когнітивного перевантаження.

5. Розроблено алгоритм адаптивного замкненого циклу навчання, який забезпечує ітераційне оновлення профілю студента та автоматичне коригування його навчальної траєкторії, що дає змогу підтримувати безперервний моніторинг результативності засвоєння знань та психологічного стану здобувача освіти з використанням формальних критеріїв завершення циклу адаптації.
6. Застосовано метод рандомізованого контрольованого А/В-експерименту для емпіричної перевірки ефективності запропонованої математичної моделі адаптивного добору навчального контенту, результати якого довели, що адаптивний підхід до добору навчального контенту статистично значуще перевищує статичний за всіма п'ятьма метриками ($p < 0,01$ для Accuracy та Retention; $p < 0,001$ для Overload; Cohen's $d = 0,67\text{--}0,98$), забезпечуючи приріст точності на 8 %, покращення ретенції знань на 11 % та зниження когнітивного навантаження на 44 %.

References

1. Abdelshiheed, M., Hostetter, J. W., Barnes, T., & Chi, M. (2023). Leveraging deep reinforcement learning for metacognitive interventions across intelligent tutoring systems. *Artificial Intelligence in Education*, 13916, 291–303. https://doi.org/10.1007/978-3-031-36272-9_24
2. Abu-Rasheed, H., Dornhöfer, M., Weber, C., Kismihók, G., Buchmann, U., & Fathi, M. (2023). Building contextual knowledge graphs for personalized learning recommendations using text mining and semantic graph completion. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies* (pp. 36–40). <https://doi.org/10.1109/ICALT58122.2023.00016>
3. Belfer, R., Kochmar, E., & Serban, I. (2022). Raising student completion rates with adaptive curriculum and contextual bandits. *arXiv preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.14003>
4. Benton, T. (2021). Item response theory, computer adaptive testing and the risk of self-deception. *Research Matters: A Cambridge Assessment Publication*, 32, 82–100. <https://doi.org/10.17863/CAM.100418>
5. Blizzard, C., & Wiktorsson, E. (2024). A review of Q-learning methods for Markov decision processes. KTH Royal Institute of Technology. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1877676/FULLTEXT01.pdf>
6. Bond, M., & Bedenlier, S. (2019). Facilitating student engagement through educational technology: Towards a conceptual framework. *Journal of Interactive Media in Education*, 2019(1), 11, 1–14. <https://doi.org/10.5334/jime.528>
7. Brusilovsky, P. (2004). Adaptive educational hypermedia: From generation to generation. In *Proceedings of the 4th Hellenic Conference on Information and Communication Technologies in Education* (pp. 19–33). URL: https://sites.pitt.edu/~peterb/papers/PB_ETPE_04.pdf
8. Bulut, Ö., Shin, J., Yildirim-Erbaşlı, S. N., Gorgun, G., & Pardos, Z. A. (2023). An introduction to Bayesian knowledge tracing with pyBKT. *Psych*, 5(3), 770–786. <https://doi.org/10.3390/psych5030050>
9. Chen, L., Chen, P., & Lin, Z. (2020). Artificial intelligence in education: A review. *IEEE ACCESS*, 8, 75264–75278. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2988510>
10. Chowdhury, P., S., Zouhar, V., & Sachan, M. (2024). AutoTutor meets large language models: A language model tutor with rich pedagogy and guardrails. In *Proceedings of the ACM Conference on Learning at Scale* (pp. 5–15). <https://doi.org/10.1145/3657604.3662041>
11. Gong, J., Wang, S., Wang, J., Feng, W., Peng, H., Tang, J., & Yu, P. S. (2020). Attentional graph convolutional networks for knowledge concept recommendation in MOOCs in a heterogeneous view. In *Proceedings of the 43rd International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval* (pp. 79–88). <https://doi.org/10.1145/3397271.3401057>
12. Hardaker, G., & Glenn, L. E. (2025). Artificial intelligence for personalized learning: A systematic literature review. *International Journal of Information and Learning Technology*, 42(1), 1–14. <https://doi.org/10.1108/IJILT-07-2024-0160>
13. Pu, J., Li, S., Guo, M., Chen, X., & Xiong, Z. (2024). Graph neural network based intelligent tutoring system: A survey. *Neurocomputing*, 610, article ID 128442. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2024.128442>
14. Riedmann, A., Schaper, P., & Lugin, B. (2025). Reinforcement learning in education: A systematic literature review. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 35, 2669–2723. <https://doi.org/10.1007/s40593-025-00494-6>
15. Rienties, B., Köhler Simonsen, H., & Herodotou, C. (2020). Defining the boundaries between artificial intelligence in education, computer-supported collaborative learning, educational data mining, and learning analytics: A need for coherence. *Frontiers in Education*, 5, article number 128. <https://doi.org/10.3389/fe-duc.2020.00128>
16. Romero, C., & Ventura, S. (2020). Educational data mining and learning analytics: An updated survey. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, 10(3), article ID e1355. <https://doi.org/10.1002/widm.1355>
17. Su, H., Liu, X., Yang, S., & Lu, X. (2023). Deep knowledge tracing with learning curves. *Frontiers in Psychology*, 14, article ID 1150329. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1150329>
18. Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, 31, 261–292. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09465-5>
19. Wu, S., Cao, Y., Li, R., Cui, J., Qian, H., Jiang, B., & Zhang, W. (2024). A comprehensive exploration of personalized learning in smart education. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.01666>
20. Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M., & Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – Where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16, article number 39. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>
21. Zhang, J. E., Broekens, J., & Jokinen, J. P. P. (2025). Modeling cognitive-affective processes with appraisal and reinforcement learning. *IEEE Transactions on Affective Computing*, 16(2), 771–782. <https://doi.org/10.1109/TAFFC.2024.3470555>

T. V. Kovaliuk¹, N. M. Kobets²

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

² UNITY-BARS LLC, Kyiv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING OF AN ADAPTIVE INTELLIGENT LEARNING SYSTEM FOR PERSONALIZED EDUCATION

The features of educational process personalization in higher education were investigated using adaptive intelligent tutoring systems (AILS) operating based on artificial intelligence learning technologies. Existing approaches to modeling student knowledge and behavior, domain formalization, and pedagogical adaptation mechanisms in AITS were analyzed, specifically Bayesian Knowledge Tracing (BKT), Item Response Theory (IRT), LSTM-based (Long Short-Term Memory) Deep Knowledge Tracing (DKT), Graph Neural Networks (GNN), Reinforcement Learning (RL) methods, and the contextual bandits approach. It was found that exis-

ting approaches to modeling adaptive learning have limitations, in particular: models of student state and behavior, the subject domain, and strategies for pedagogical adaptation to the individual pace of knowledge acquisition and student cognitive load are developed fragmentarily and are not integrated into a single formalized structure. Most models of the learning process cover only individual student dimensions without formalizing them as a single dynamic vector; none of the analyzed studies proposed an integral matching function between the student profile and learning material characteristics as an independent mathematical object. A three-component mathematical model of AILS was presented, including: a dynamic student profile in the form of a multidimensional vector of cognitive, behavioral, and emotional characteristics; a static content passport with formalized pedagogical parameters; and an integral similarity function that determines the interaction between the students state, learning material, and the logic of adaptive content selection. An algorithm for an adaptive closed-loop learning cycle was developed, providing monitoring of the students state, iterative updating of their profile parameters, and automatic adjustment of the learning trajectory through a similarity function considering multidimensional performance indicators. A randomized controlled A/B experiment method was applied for empirical verification of the effectiveness of the proposed mathematical model and the adaptation algorithm implemented on its basis, using a sample of 60 students in a specific discipline. An experimental comparison of the proposed approach with a static learning strategy (fixed syllabus for all students) was conducted based on five indicators: task accuracy, knowledge retention, module completion rate, engagement, and cognitive load. As a result of the experiment, it was established that the adaptive approach to forming an individual learning trajectory based on a dynamic student profile statistically significantly outperforms the static one in all indicators. Specifically providing an 8 % increase in accuracy, an 11 % improvement in retention, and a 44 % reduction in cognitive load, which confirms the effectiveness of the proposed mathematical model.

Keywords: three-component model; dynamic cognitive profile; integral similarity function; vector space of characteristics; closed-loop adaptation; content personalization algorithm; zone of proximal development.