



В. І. Гавриш¹, С. І. Яцишин^{1,2}, О. Г. Крук¹

¹ Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

² Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЯХ З ТЕРМОЧУТЛИВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а також аналізу температурних режимів в ізотропних просторових середовищах, які піддаються внутрішньому тепловому навантаженню. У разі нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, із використанням якого лінеаризовано нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови і внаслідок цього отримано лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та розривною правою частиною і квазілінійні крайові умови. Для остаточної лінеаризації крайових умов виконано апроксимацію температури за просторовою координатою на межовій поверхні термочутливого середовища сегментно-сталою функцією, що дало змогу унаслідок отримати лінійну крайову задачу. Для розв'язування отриманих крайових задач використано інтегральне перетворення Фур'є, внаслідок чого отримано аналітичні розв'язки. Для термочутливого середовища, як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу структури від температури, яку часто використовують для розв'язування багатьох практичних задач. Як наслідок, отримано аналітичний і аналітично-числовий розв'язки у вигляді невластного інтегралу для визначення розподілу температури у цьому середовищі. Розроблено програмні засоби, з використанням яких виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. На цій основі можна аналізувати теплообмінні процеси, зумовлені внутрішнім нагріванням, зосередженим в об'ємі паралелепіпеда. Розроблені лінійна та нелінійна математичні моделі визначення температурного поля у просторових середовищах із внутрішнім нагріванням дають змогу аналізувати їх термостійкість. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити вихід із ладу не тільки окремих вузлів та їх окремих елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле; ізотропне просторове середовище; теплопровідність матеріалу; конвективний теплообмін; внутрішнє нагрівання; термочутливість матеріалу.

Вступ / Introduction

Розроблення математичних моделей теплопровідності для сучасних електронних пристроїв є важливою сферою досліджень, яка привернула значну увагу як наукової спільноти, так і промисловості. Температурне поле в мікроелектронних пристроях є критичним фактором, який визначає їхню ефективність і надійність. Підвищення температури може знижувати продуктивність, збільшувати енергоспоживання та скорочувати термін служби пристрою. Виникнення тепла зумовлено проходженням електричного струму через компоненти, що призводить до їх нагрівання та формування температурного поля. Зі зростанням складності та мініатюризації електронних пристроїв ефективне розсіювання

тепла є важливим для забезпечення оптимальної продуктивності та надійності. Відносний вплив температури є найвищим (55 %) порівняно з вологістю (19 %), вібрацією (20 %) та пилом (6 %). Різноманітні дослідження були зосереджені на вивченні нових матеріалів, конструкцій та моделей для підвищення теплопровідності та покращення керування тепловими режимами в електронних системах. Експериментальні методи визначення температурного поля, такі як термоімпедансна мікроскопія, інфрачервона мікроскопія чи термометрія, дають змогу отримати дані про розподіл температури у приладах. Однак, кожен із цих методів має свої обмеження та їх застосовують у певних конкретних умовах.

Комп'ютерні симуляції, які ґрунтуються на математичних моделях теплових процесів, дають змогу прог-

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: vasyli.gavrysh@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Яцишин Світлана Іванівна, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення.

Email: yatsyshyn@nltu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-5200-4837>

Крук Олег Григорович, канд. техн. наук, доцент, кафедра програмного забезпечення.

Email: oleh.h.kruk@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-6431-1287>

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Яцишин С. І., Крук О. Г. Математичне моделювання та аналіз температурних режимів у електронних пристроях з термочутливими елементами. Науковий вісник НЛТУ України. 2025, т. 35, № 3. С. 67–74.

Citation APA: Havrysh, V. I., Yatsyshyn, S. I., & Kruk, O. H. (2025). Mathematical modeling and analysis of temperature regimes in electronic devices with thermosensitive elements. *Scientific Bulletin of UNFU*, 35(3), 67–74. <https://doi.org/10.36930/40350307>

нозувати температурні режими роботи пристроїв і визначати оптимальні конструкційні параметри. Важливими факторами, що впливають на температурний режим, є розташування компонентів і їх щільність на платі. Нерівномірне тепловідведення, зокрема для елементів у центрі плати, може призводити до локального перегрівання. Для забезпечення ефективного охолодження застосовують різноманітні технології: матеріали тепловідведення, вентилятори, термічні трубки, термічні пасти тощо. Окрім цього, використання сенсорів температури дає змогу контролювати нагрівання та своєчасно знижувати ризики перегрівання. Актуальність дослідження температурного поля посилюється через значні теплові навантаження на сучасні пристрої. Наявність значних температурних градієнтів у неоднорідних середовищах може спричиняти перегрівання, що призводить до пошкодження вузлів або виходу пристрою з ладу.

Все це дає підстави стверджувати, що доцільним є здійснення дослідження з розроблення вдосконалених математичних моделей теплопровідності для сучасних електронних пристроїв. Такі моделі сприятимуть підвищенню ефективності керування температурними режимами, що забезпечуватиме надійність пристроїв.

Тому розроблення математичних моделей теплопровідності є важливим завданням для прогнозування теплових режимів і забезпечення стабільної роботи електронних пристроїв без потреби виконання дорогавартісних експериментів.

Об'єкт дослідження – моделювання температурних режимів у електронних пристроях з термочутливими елементами.

Предмет дослідження – методи і засоби визначення температурних режимів у електронних пристроях з термочутливими елементами, що дасть змогу отримати аналітичний та аналітично-числовий розв'язки відповідних крайових задач.

Мета роботи – розробити математичну модель для аналізу температурних режимів у електронних пристроях з термочутливими елементами, що дасть змогу підвищити точність визначення температурних полів і вплине на ефективність проектування сучасних електронних пристроїв.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати ключові наукові праці з розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності, що дасть змогу виявити проблему розв'язування відповідних лінійних крайових задач, способи лінеаризації нелінійних крайових задач та труднощі розроблення програмних засобів для числової реалізації отриманих аналітичних та аналітично-числових розв'язків у вигляді невластних збіжних інтегралів;
- навести об'єкт дослідження та його лінійну і нелінійну математичні моделі, що дасть змогу отримати аналітичний та аналітично-числовий розв'язки відповідних крайових задач;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі, що дасть змогу отримати лінійну крайову задачу відносно лінеаризуючої функції, розв'язання якої приводить до визначення аналітично-числового розв'язку нелінійної крайової задачі після виконання певних математичних перетворень;
- отримати аналітичний та аналітично-числовий розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності, на основі яких є можливість розробляти алгоритми і програмні засоби їх числової реалізації;

- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для визначення температурних полів у ізотропних просторових середовищах із внутрішнім тепловим нагріванням джерелами тепла, рівномірно зосередженими в об'ємі паралелепіпеда, що дасть змогу аналізувати теплообмінні процеси та підвищити термостійкість конструкцій.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботі [17] показано, що вдосконалення матеріалів термоінтерфейсу є важливим напрямом для покращення розсіювання тепла та підвищення продуктивності електронних пристроїв. Проте залишаються невирішеними питання щодо ефективності таких матеріалів у складних умовах нагрівання, що виникають через локальність джерел тепла та неоднорідність середовища.

У дослідженні [11] вказано на важливість оптимізації теплових процесів у пористих матеріалах. Однак, внаслідок використання наведеного методу не враховано локальних теплових збурень, що є критично важливими для електронних пристроїв із чужорідними напівнаскрізними включеннями. Це створює обмеження в застосуванні таких моделей для реальних пристроїв.

У роботі [20] запропоновано моделювання теплопередачі у пористих матеріалах із температурно-залежними властивостями, що актуально для конструкцій складної архітектури, зокрема електронних пристроїв із внутрішнім локальним нагріванням. Проте за використання методу не враховано локальних теплових збурень, характерних для таких пристроїв, що обмежує точність отриманих результатів.

Аналітичні розв'язки [19] описують розподіл температури, переміщень і напружень у шаруватих пластинах із простою опорою під термомеханічним навантаженням із врахуванням температурної залежності матеріалів. Однак, вони не відображають локальних навантажень, що звужує їхнє застосування до реальних умов експлуатації.

У роботі [2] наведено сучасну модель теплопровідності, Однак, не досліджено впливу неоднорідності середовища та термочутливості конструкційних матеріалів, що обмежує застосування моделей для прогнозування температурних полів за складних умов.

У роботах [9, 10] досліджено мікроканальні радіатори на основі нанофлюїдів і термоелектричних генераторів з радіаційним охолодженням радіаторів і наголошено на важливості моделювання та оцінювання продуктивності в оптимізації систем керування температурними режимами. Ці дослідження доводять важливість математичного моделювання для розроблення ефективних підходів визначення розсіювання тепла в електронних пристроях.

У роботі [8] наведено ефективні підходи до моделювання теплових процесів, проте в методах лінеаризації задач теплопровідності не враховано впливу термочутливості та їх використання потребує значних обчислювальних ресурсів для забезпечення точності.

Реконструкція температурного поля є важливою для терморегулювання електронного обладнання. У праці [16] запропоновано метод глибинного навчання, що поєднує UNet і багат шаровий перцептрон (MLP) для перетворення задачі реконструкції температурного поля в задачу регресії. UNet відповідає за відтворення загального температурного поля, тоді як MLP прогнозує зони з великими градієнтами температури. Результати

числових експериментів показали похибку менш ніж 1 °K, але метод потребує великого обсягу даних для навчання, що ускладнює його використання за реальних умов.

У роботі [13] досліджено термомеханічні навантаження колон під поздовжнім тепловим нагріванням із різними крайовими умовами. Температурний розподіл визначено методом диференціальних квадратур (DQM), а аналіз прогину виконано на основі теорії Ейлера-Бернуллі. Отримані результати підтверджено FEM і літературними даними. Основним недоліком є спрощення моделі, де не враховано значних температурних градієнтів, що виникають внаслідок критичних теплових навантажень.

У роботі [18] наведено результати досліджень, які свідчать про важливість термоінтерфейсних матеріалів для покращення розсіювання тепла в електронних пристроях. Показано, що такі матеріали відіграють визначальну роль у полегшенні передачі тепла між компонентами пристроїв, що сприяє підвищенню їхньої продуктивності. Однак, залишаються нерозв'язаними задачі, пов'язані з необхідністю розроблення матеріалів із покращеними характеристиками, які могли б забезпечити ефективність функціонування в складних умовах локального нагрівання. Причиною цього є складність експериментальних перевірок і висока вартість розроблення таких матеріалів.

У дослідженні [1] розглянуто концепцію подвійної дифузії Каттанео-Крістова в оптимізованих за ентропією нанофлюїдах зі змінною теплопровідністю. Показано, що використання таких моделей дає змогу враховувати множинні механізми дифузії. Однак, облік складних теплових властивостей рідин і їх вплив на теплообмін залишається недостатнім. Це зумовлено труднощами моделювання поведінки намагнічених рідин за реальних умов.

Автори [14] наводять аналітичну модель для регенеративних систем охолодження, де використано еластичну калорійну гуму. Показано потенціал таких систем для ефективної передачі тепла, проте модель обмежено аналізом теплових процесів для певних сталих умов. Це пов'язано із деякими обмеженнями сучасних технологій моделювання, які не враховують перехідні режими нагрівання.

Варіантом подолання цих труднощів є розроблення комплексних математичних моделей теплопровідності, в яких враховано неоднорідність середовищ, локальність теплового нагрівання та змінність теплових властивостей матеріалів. Саме такий підхід частково застосовано в роботах [1, 14], Однак, результати не відображають усіх аспектів складних теплових процесів.

У роботі [4] наведено динамічні компактні теплові моделі для прогнозування поведінки температури корпусу портативних пристроїв, таких як смартфон і ноутбук, за допомогою методу згортки. Моделі забезпечують швидке визначення температури корпусу з урахуванням реакції кожного джерела тепла, що сприяє оптимізації теплового проєктування та вибору стратегії температурного контролю на ранніх етапах розроблення. Проте їх застосування обмежується двома типами пристроїв і не охоплює широкого спектра дослідження портативної техніки.

У роботах [6, 7] наведено деякі підходи та вдосконалено наявні методи для розроблення математичних мо-

делей теплообміну в сегментно-однорідних середовищах, в яких враховано теплофізичні властивості фаз і геометрію структури. Окреслено методи, які дають змогу отримати аналітичні та аналітично-числові розв'язки відповідних лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності та на цій основі розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби для аналізу теплообміну для покращення термостійкості конструкцій.

Аналіз літературних джерел свідчить про відсутність теоретично обґрунтованих підходів до розроблення математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових термочутливих середовищ. У наявних моделях недостатньо враховано впливу локального теплового нагрівання та термочутливості конструкційних матеріалів, що обмежує їхню ефективність для багатофункціональних електронних систем. Основними причинами цього є складність опису теплових процесів у таких середовищах, висока вартість експериментів і труднощі створення умов для належної верифікації моделей. Усе це свідчить про доцільність проведення досліджень з розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових теплоактивних середовищ. Такі моделі можна використовувати для прогнозування теплових режимів роботи сучасних електронних пристроїв, що сприятиме підвищенню їх ефективності та надійності.

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. Розглянуто ізотропну відносно теплофізичних параметрів пластину завтовшки 2δ з теплоізолюваними лицевими поверхнями $|z| = \delta$, віднесену до декартової прямокутної системи координат $(Oxyz)$, в області $\Omega_0 = \{(x, y, z) : |x| \leq H, 0 \leq y \leq h, |z| \leq \delta\}$ якої зосереджено рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з питомою потужністю $q_0 = \text{const}$. На межовій поверхні шару $L_+ = \{(x, h, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем зі сталою температурою $t_c = \text{const}$ згідно зі законом Ньютона, а на іншій його поверхні $L_- = \{(x, -h, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ задано крайові умови другого роду (рис. 1).

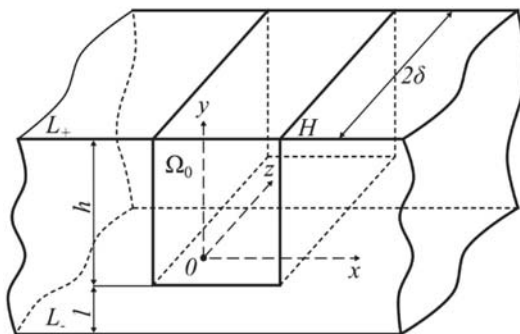


Рис. 1. Ізотропна пластина під впливом внутрішнього нагрівання / Isotropic plate under the influence of internal heating

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримано розв'язанням рівняння теплопровідності

$$\Delta \theta(x, y) = -\frac{q_0}{\lambda} S_-(H - |x|) S_-(y) \quad (1)$$

з такими крайовими умовами:

$$\theta(x, y)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \\ \lambda \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \alpha \theta(x, y)|_{y=h}, \quad \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = 0, \quad (2)$$

де: λ – коефіцієнт теплопровідності пластини; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні L_+ ; $\theta(x, y) = t(x, y) - t_c$; Δ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат; $S_{\pm}(\xi)$ – асиметричні одиничні функції,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad S_{\pm}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \xi = 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Застосовано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (1) та крайових умов (2) і як наслідок отримано неоднорідне звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та розривною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi} \sin H \xi S_{-}(y) \quad (3)$$

з крайовими умовами

$$\frac{d \bar{\theta}(y)}{dy} \Big|_{y=h} = \frac{\alpha}{\lambda} \bar{\theta}(y)|_{y=h}, \quad \frac{d \bar{\theta}(y)}{dy} \Big|_{y=-l} = 0, \quad (4)$$

де: $\bar{\theta}(y)$ – трансформанта функції $\theta(x, y)$, визначають за формулою $\bar{\theta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \theta(x, y) dx$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є, $i^2 = -1$.

Загальний розв'язок рівняння (3) визначено у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi^3} \sin H \xi (ch \xi y - 1) S_{-}(y),$$

де c_1 і c_2 – сталі інтегрування.

Використано крайові умови (4) і на цій основі знайдено сталі інтегрування та отримано частковий розв'язок задачі (3)–(4), а саме:

$$\bar{\theta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi^3} \sin H \xi \left[(1 - ch \xi y) S_{-}(y) + \frac{P(\xi, y)}{P(\xi)} \right], \quad (5)$$

де: $P(\xi, y) = [\alpha(ch \xi h - 1) - \lambda \xi sh \xi h] ch \xi (y + l)$;

$$P(\xi) = \lambda \xi sh \xi (h + l) - \alpha ch \xi (h + l).$$

Застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (5) і внаслідок отримано розв'язок задачі (1)–(2) у такому вигляді:

$$\theta(x, y) = \frac{2q_0}{\pi \lambda} \int_0^{\infty} \frac{\cos x \xi \sin H \xi}{\xi^3} \left[(1 - ch \xi y) S_{-}(y) + \frac{P(\xi, y)}{P(\xi)} \right] d\xi. \quad (6)$$

Унаслідок виконання таких дій шукане температурне поле у пластині, зумовлене внутрішнім нагріванням, виражено формулою (6), з якої отримують значення температури в довільній її точці.

Розглянуто ізотропну відносно теплофізичних параметрів термочутливу (теплофізичні параметри залежать від температури) пластину (див. рис. 1).

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримано розв'язанням нелінійного рівняння теплопровідності

$$\text{div}[\lambda(t) \text{grad} t(x, y)] = -q_0 S_{-}(H - |x|) S_{-}(y) \quad (7)$$

з такими крайовими умовами:

$$t(x, y)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \\ \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = 0, \quad \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \alpha(t|_{y=h-t_c}), \quad (8)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини.

Розглянуто перетворення Кірхгофа

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(x, y)} \lambda(\xi) d\xi, \quad (9)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини.

Продиференційовано вираз (9) за змінними x та y і внаслідок отримано співвідношення

$$\lambda^0 \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial x} = \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial x}, \quad \lambda^0 \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial y} = \lambda(t) \frac{\partial t(x, y)}{\partial y},$$

з урахуванням яких вихідне рівняння (7) та крайові умови (8) перетворено до такого вигляду:

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_{-}(H - |x|) S_{-}(y), \quad (10)$$

$$\mathcal{G}(x, y)|_{|x| \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-l} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\alpha}{\lambda^0} (t(x, y)|_{y=h-t_c}). \quad (12)$$

Унаслідок таких перетворень отримано лінійне диференціальне рівняння з частковими похідними другого порядку відносно функції $\mathcal{G}(x, y)$, лінійні крайові умови (11) та квазілінійну крайову умову (12).

Апроксимовано температуру $t(x, h)$ як функцію просторової координати x сегментно-сталою функцією у вигляді

$$t(x, h) = t_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) S_{-}(x - x_k), \quad (13)$$

де: $x_k \in (0; x^*)$; $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1}$; $t_k (j = \overline{1, m})$ – невідомі апроксимаційні значення температури $t(x, h)$; m – кількість розбиттів інтервалу $(0; x^*)$; x^* – значення абсциси, для якої температура досягає значення t_c (його визначають із відповідної лінійної задачі).

Застосовано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (10) та крайових умов (11), (12) з урахуванням співвідношення (13) і отримано звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та розривною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\mathcal{G}}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\mathcal{G}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi} \sin H \xi S_{-}(y) \quad (14)$$

і лінійні крайові умови зі сингулярною правою частиною

$$\frac{d \bar{\mathcal{G}}(y)}{dy} \Big|_{y=-l} = 0, \quad \frac{d \bar{\mathcal{G}}(y)}{dy} \Big|_{y=h} = \frac{\alpha D(\xi)}{\sqrt{2\pi} \lambda^0 \xi}, \quad (15)$$

де: $\bar{\mathcal{G}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{G}(x, y) dx$ – трансформанта функції

$$\mathcal{G}(x, y); \quad D(\xi) = i \sum_{j=1}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) (e^{i\xi x_j} - e^{i\xi x_{j-1}}).$$

Загальний розв'язок рівняння (14) отримано у вигляді

$$\bar{\mathcal{G}}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi^3} \sin H \xi (ch \xi y - 1) S_{-}(y)$$

та з використанням крайових умов (15) визначено стали інтегрування c_1, c_2 і як наслідок – отримано розв'язок задачі (16)–(17), а саме:

$$\bar{\vartheta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^0\xi^3}} [2q_0 \sin H\xi(D(\xi, y)shh\xi + (1 - ch\xi y)S_-(y)) + \alpha D(\xi, y)D(\xi)], \quad (16)$$

$$\text{де} \quad D(\xi, y) = \frac{ch\xi(l + y)}{sh\xi(l + h)}.$$

Застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (16) та визначено вираз для лінеаризуючої функції $\vartheta(x, y)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{\pi\lambda^0} \int_0^\infty \{2q_0 / \xi^3 \sin H\xi \cos \xi x [D(\xi, y)shh\xi + (1 - ch\xi y)S_-(y)] + \alpha D(\xi, y)D(\xi, x)\} d\xi, \quad (17)$$

$$D(\xi, x) = \sin \xi x \sum_{j=1}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)(\cos \xi x_j - \cos \xi x_{j-1}) - \cos \xi x \sum_{j=1}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)(\sin \xi x_j - \sin \xi x_{j-1}).$$

де

Шукане температурне поле $t(x, y)$ для наведеної структури визначають за допомогою отриманого нелінійного алгебраїчного рівняння з урахуванням температурної залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів пластини у співвідношеннях (9), (17) та виконанням певних математичних перетворень.

Частковий приклад. Наведено залежність коефіцієнта теплопровідності від температури конструкційного матеріалу пластини у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda^0(1 - kt), \quad (18)$$

де λ^0, k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалу пластини.

Із використанням виразів (9), (18) отримано формулу для визначення температури $t(x, y)$

$$t(x, y) = \frac{1}{k} (1 - \sqrt{1 - 2k\vartheta(x, y)}). \quad (19)$$

Числовий експеримент та аналіз отриманих результатів. Матеріалом пластини вибрано германій. В інтервалі температур $[0^\circ\text{C}; 957^\circ\text{C}]$ залежність коефіцієнта теплопровідності германію від температури отримано інтерполяцією у вигляді

$$\lambda(t) = 60,3 \frac{\text{Вт}}{\text{град} \cdot \text{м}} (1 - 0,0008 \frac{1}{\text{град}} t), \quad (20)$$

що є частковим випадком співвідношення (18).

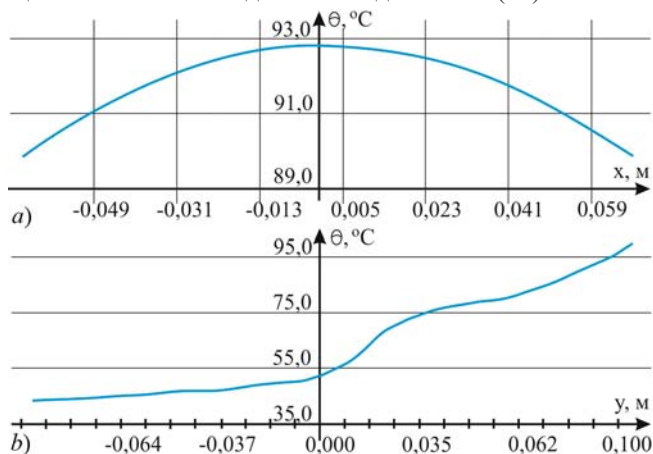


Рис. 2. Залежність температури $t(x, y)$ від просторових координат x (а) та y (б) / Dependence of temperature $t(x, y)$ on spatial x (a) and y (b) coordinates

За формулами (6), (19) виконано числові обчислення розподілу температури за просторовими координатами у пластині для сталого значення коефіцієнта теплопровідності для германію ($\lambda = 60,2$ Вт/(м·град) за температури $t = 27^\circ\text{C}$) та лінійно змінного значення (співвідношення (20)). Вибрано такі значення вхідних даних: $q_0 = 200$ Вт/м³; $l = h = 0,1$ м; $H = 0,05$ м; $\alpha = 17,64$ Вт/(м²·град). Проілюстровано зміну температури залежно від просторових координат x для $y = 0$ (рис. 2, а) та y для $x = 0,05$ (див. рис. 2, б). Із поведінки кривих видно, що температура, як функція просторових координат, є гладкою та монотонною і досягає максимальних значень в області Ω_0 , де зосереджено внутрішні джерела тепла. Числові розрахунки виконано з точністю 10^{-6} .

Отримані результати для вибраного матеріалу середовища (германій) за лінійної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності, відрізняються від результатів, отриманих для сталого коефіцієнта теплопровідності на 2 %. Їх незначну відмінність можна пояснити тим, що значення температурного коефіцієнта теплопровідності для германію, як показує співвідношення (18), є невеликим.

Обговорення результатів дослідження. У роботі [15] наведено методику ефективного визначення та дослідження термічного напруженого стану тіл з тонкими багат шаровими покриттями на основі процедури моделювання цих покриттів оболонками з відповідними геометричними, термічними та термомеханічними властивостями покриття. У цьому підході вплив покриттів на термонапружений стан системи тіло-покриття описано спеціальними узагальненими крайовими умовами. Ефективність такого підходу продемонстровано на аналізі тестових завдань. Подано розв'язки неklasичних лінійних і нелінійних крайових задач термопружності для тіл зі шаруватими тонкими покриттями, що зазнають теплового навантаження. Покриття є тонкими і внаслідок не враховано їх геометричних параметрів, що приводить до похибки отриманих результатів.

У дослідженні [12] запропоновано метод визначення температурних полів, що виникають у пластині, з урахуванням теплового випромінювання, температурної залежності теплових параметрів, густин поверхневих та об'ємних джерел тепла за нерівномірного розподілу початкової температури. Використано перетворення Кірхгофа, функцію Гріна, узагальнені функції та лінійні сплайни і зведено задачі теплопровідності до розв'язування рекурентного нелінійного алгебраїчного рівняння для визначення значень змінної Кірхгофа у вузлах сплайну на відповідній крайовій поверхні. Наведено результати числового аналізу. Дослідження виконано для однорідної пластини, що дало змогу для лінеаризації нелінійної крайової задачі застосувати перетворення Кірхгофа. Наведений підхід не дає змоги проводити дослідження для середовищ шаруватої структури.

У роботі [21] розглянуто частково-граничні елементи як варіант непрямого методу приграничних елементів. На прикладі двовимірних задач теорії потенціалу досліджено точність та ефективність їх використання. Для об'єктів канонічної форми (круг, квадрат, прямокутник, еліпс) та довільних багатокутників показано ефективність частково-граничних елементів. Використання цього методу забезпечує точність розв'язку, співмірну з точністю методу приграничних елементів. Вона також на порядок вища, ніж за використання методу

граничних елементів. При цьому зменшено у 2,0-2,5 раз за час обчислень, ніж коли застосовувати метод приграничних елементів. Програмну реалізацію запропонованого підходу здійснено мовою програмування Python. Наведений підхід апробовано для задач електропрофілювання та вертикального електричного зондування у півплощині з багатокутним включенням. Наведено рекомендації щодо застосування частково-граничних елементів у геофізичних практичних випробуваннях. Дослідження виконано для однорідних середовищ канонічної форми, що є достатньо простої геометричної форми.

У праці [3] розглянуто одновимірний нестационарний тепловий стан у середовищі з температурною залежністю теплопровідності. Для цього випадку відповідне рівняння теплопровідності стає нелінійним і на поверхнях застосовують послаблювальну крайову умову. Ця умова є залежною від часу, яка з перебігом його наближається до певної незалежної від часу умови. Така поведінка на поверхнях середовища виникає природно у деяких фізичних системах. Як приклад, запропоновано просту модельну систему, яка породжує умову Діріхле або конвективну релаксуючу крайову умову. Внаслідок залежності коефіцієнта теплопровідності від температури конвективний стан є нелінійним. Для розв'язування крайової задачі наведено чисельний підхід, який дає змогу дискретизувати рівняння теплопровідності за часом, внаслідок чого отримано послідовність двоточкових крайових задач (TPBVP). Автори використали неявну дискретизацію часу, що забезпечує безумовну стабільність методу. Якщо задано початкову умову, то для цього випадку можна послідовно розв'язувати TPBVP та отримувати наближені значення температури на різних часових рівнях. Для розв'язування TPBVP використано метод скінченних різниць. Системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, які виникають при цьому, розв'язують методом Ньютона. Наведено низку простих модельних задач, які підтверджують ефективність такого підходу.

У більшості портативних електронних пристроїв, окрім температури кількох джерел тепла, тобто температури з'єднання, також потрібно контролювати температуру корпусу, тобто температуру шкіри, щоб захистити роботу користувача. Отже, створення компактної теплової моделі на рівні пристрою для прогнозування температури шкіри не тільки підвищить ефективність теплового проектування на ранній стадії, але й допоможе розробити стратегію контролю температури на основі моделі. У роботі [5] створено на основі методу згортки динамічні компактні теплові моделі двох портативних електронних пристроїв, враховуючи смартфон і ноутбук. Згідно з припущенням про лінійні незмінні в часі системи, температуру шкіри для двох тестових пристроїв можна швидко визначити після того, як буде отримано ступінчасту реакцію кожного джерела тепла. Розроблена модель є експериментальною і не дає змоги визначати температурні режими для більше ніж двох портативних електронних пристроїв.

Оскільки в сучасних мобільних електронних пристроях відбувається нагрівання в окремих локальних областях, то виникає потреба визначення оцінки впливу температурних градієнтів щодо термостійкості конструкції. Як наслідок, виникає потреба у розробленні математичної моделі аналізу температурних режимів як у локальній області нагрівання, так і в цілій конструкції

для запобігання руйнуванню внаслідок температурних збурень. Аналіз наведених літературних джерел свідчить, що використані методи дослідження не дають змоги розв'язувати крайові задачі теплопровідності для конструкцій, які нагріваються локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами.

Отже, внаслідок виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено метод визначення температурного поля та аналізу температурних режимів для ізотропних просторових середовищ, які піддаються внутрішньому тепловому нагріванню рівномірно зосередженими джерелами тепла в об'ємі паралелепіпеда.

Практична значущість результатів дослідження – отримані розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних теплоактивних просторових середовищ застосовано для розроблення обчислювальних алгоритмів і програмних засобів, призначених для аналізу теплообмінних процесів в окремих конструкційних елементах та вузлах електронних пристроїв, що піддаються наведеному тепловому навантаженню, для прогнозування їх режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновки / Conclusions

Розроблено математичну модель для аналізу температурних режимів у електронних пристроях з термочутливими елементами, що дало змогу підвищити точність визначення температурних полів і їхнього впливу на ефективність проектування сучасних електронних пристроїв. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проаналізовано ключові наукові праці з розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності, що дало змогу виявити математичні моделі визначення та аналізу температурних режимів у ізотропних структурах із внутрішнім локальним нагріванням.
2. За допомогою лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів виконано аналіз температурних режимів, зумовлених внутрішнім тепловим нагріванням для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою у вигляді пластини з теплоактивним паралелепіпедом.
3. Наведено спосіб лінеаризації нелінійної крайової задачі теплопровідності та отримано у замкнутому вигляді її аналітично-числовий розв'язок.
4. На підставі отриманих аналітичного та аналітично-числового розв'язків як для лінійної, так і для нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації.
5. Розроблено алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для визначення температурних полів у ізотропних просторових середовищах із внутрішнім тепловим нагріванням джерелами тепла, рівномірно зосередженими в об'ємі паралелепіпеда, що дає змогу аналізувати теплообмінні процеси та підвищити термостійкість конструкцій.
6. Встановлено, що важливо враховувати термочутливість конструкційних матеріалів, що значно ускладнює процес розв'язування відповідних нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач дещо адекватніше до реального фізичного процесу

описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

1. Chu, Yu-Ming, Shah, Faisal, Khan, M. Ijaz, Kadry, Seifedine, Abdelmalek, Zahra, & Khan, Waqar Azeem. (2020). Cattaneo-Christov Double Diffusions (CCDD) in Entropy Optimized Magnetized Second Grade Nanofluid with Variable Thermal Conductivity and Mass Diffusivity. *Journal of Materials Research and Technology*, 9(6), 13977–13987. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.09.101>
2. Filimonenko, N. M., & Filimonenko, K. V. (2020). Analysis of Capability for Improvement of Basic Mathematical Model of Electrode of Ferro-alloy Furnace. *Bulletin of the Volodymyr Dahl Eastern Ukrainian national university*, 7(263), 53–57. <https://doi.org/10.33216/1998-7927-2020-263-7-53-57>
3. Filipov, S. M., Faragó, I., & Avdzhieva, A. (2023). Mathematical Modelling of Nonlinear Heat Conduction with Relaxing Boundary Conditions. *Lecture Notes in Computer Science*, 13858, 146–158. https://doi.org/10.1007/978-3-031-32412-3_13
4. Haoran, L., Jiaqi, Y., & Ruzhu, W. (2023). Dynamic compact thermal models for skin temperature prediction of portable electronic devices based on convolution and fitting methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 210, article ID 124170. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124170>
5. Haoran, L., Jiaqi, Y., & Ruzhu, W. (2023). Dynamic compact thermal models for skin temperature prediction of portable electronic devices based on convolution and fitting methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 210, article ID 124170. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124170>
6. Havrysh, V., Dzhumelia, E., Kachan, S., Maikher, V., & Rabiichuk, I. (2024). Construction of mathematical models of thermal conductivity for modern electronic devices with elements of a layered structure. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(5), 34–44. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.309346>
7. Havrysh, V., Dzhumelia, E., Kachan, S., Serdyuk, P., & Maikher, V. (2024). Constructing mathematical models of thermal conductivity in individual elements and units of electronic devices at local heating considering thermosensitivity. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(5), 25–35. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.304804>
8. Hu, S., Li, C., Zhou, Z., et al. (2023). Nanoparticle-enhanced coolants in machining: mechanism, application, and prospects. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 18, article ID 53. <https://doi.org/10.1007/s11465-023-0769-8>
9. Junwei, Liu, Ying, Zhang, Debao, Zhang, Shifei, Jiao, Zhuofen, Zhang, & Zhihua, Zhou. (2020). Model Development and Performance Evaluation of Thermoelectric Generator with Radiative Cooling Heat Sink. *Energy Conversion and Management*, 216, article ID 112923. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2020.112923>
10. Maher, A. R., Sadiq, Al-Baghdadi, Zainab, M. H., Noor, Aimen, Zeiny, Alan, Burns, & Dongsheng, Wen. (2020). CFD Analysis of a Nanofluid-based Microchannel Heat Sink. *Thermal Science and Engineering Progress*, 20, article ID 100685. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100685>
11. Nattadon, Pannucharoenwong, Phadungsak, Rattanadecho, Snunkhaem, Echaroj, Suwipong, Hemathulin, & Kriengkrai, Nabudda. (2020). The investigation of heat absorber on the efficiency of slanted double-slope solar distillation unit. *International Journal of Heat and Technology*, 38(1), 171–179. <https://doi.org/10.18280/ijht.380119>
12. Protsiuk, B. V. (2023). Nonstationary Problems of Heat Conduction for a Thermosensitive Plate with Nonlinear Boundary Condition on One Surface. *Journal of Mathematical Sciences*, 272, 135–150. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06405-1>
13. Ren, Yongan, Huo, Ruili, Zhou, Ding, & Zhang, Zhong. (2023). Thermo-Mechanical Buckling Analysis of Restrained Columns Under Longitudinal Steady-State Heat Conduction. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 47, 1411–1423. <https://doi.org/10.1007/s40996-022-01020-7>
14. Sebal, Gael, Komiya, Atsuki, Jay, Jacques, Coativy, Gildas, & Lebrun, Laurent. (2020). Regenerative cooling using elastocaloric rubber: Analytical model and experiments. *Journal of Applied Physics*, 127, article ID 094903. <https://doi.org/10.1063/1.5132361>
15. Shevchuk, V. A. (2024). Methodology of Investigations of the Thermal Stressed State of Bodies with Thin Multilayer Coatings. *Journal of Mathematical Sciences*, 278, 780–794. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06961-0>
16. Xingwen, Peng, Xingchen, Li, Zhiqiang, Gong, Xiaoyu, Zhao, & Wen, Yao. (2022). A deep learning method based on partition modeling for reconstructing temperature field. *International Journal of Thermal Sciences*, 182, article ID 107802. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107802>
17. Ying, Cui, Man, Li, & Yongjie, Hu. (2020). Emerging interface materials for electronics thermal management: experiments, modelling, and new opportunities. *Journal of Materials Chemistry*, 8, 10568–10586. <https://doi.org/10.1039/C9TC05415D>
18. Yongcun, Zhou, Siqu, Wu, Yuheng, Long, Pengli, Zhu, Feixiang, Wu, Feng, Liu, Vignesh, Murugadoss, Williams, Winchester, Amit, Nautiyal, Zhe, Wang, & Zhanhu, Guo. (2020). Recent Advances in Thermal Interface Materials. *Engineered Science Materials & Manufacturing*, 7, 4–24. <https://doi.org/10.30919/esmm5f717>
19. Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>
20. Zhang, Zhong, Sun, Ying, Cao, Xiaojian, Xu, Jiajing, & Yao, Lu. (2024). A slice model for thermoelastic analysis of porous functionally graded material sandwich beams with temperature-dependent material properties. *Thin-Walled Structures*, 198, article ID 111700. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111700>
21. Zhuravchak, L. M., & Zabrodska, N. V. (2021). Using of partly-boundary elements as a version of the indirect near-boundary element method for potential field modeling. *Mathematical Modelling and Computing*, 8(1), 1–10. <https://doi.org/10.23939/mmc2021.01.001>

V. I. Havrysh¹, S. I. Yatsyshyn^{1,2}, O. H. Kruk¹

¹ Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

² Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING AND ANALYSIS OF TEMPERATURE REGIMES IN ELECTRONIC DEVICES WITH THERMOSENSITIVE ELEMENTS

Linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field and subsequently for analyzing temperature regimes in isotropic spatial environments subjected to internal thermal loading have been developed in the course of research. In the case of a nonlinear boundary value problem, the Kirchhoff transformation was applied, using which the nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions were linearized, and as a result, a linear second-order differential equation with partial derivatives and a discontinuous right-hand side and quasilinear boundary conditions were obtained. For the final linearization of the boundary conditions, the temperature was approximated by the spatial coordinate on the boundary surface of the thermosensitive environment by a segment-constant function, which made it possible to obtain a linear boundary value problem as a result. The integral

Fourier transform was used to solve the obtained boundary value problems, as a result of which analytical solutions were obtained. For a thermally sensitive medium, as an example, the linear dependence of the coefficient of thermal conductivity of the structural material of the structure on temperature, which is often used to solve many practical problems, was chosen. As a result, analytical and analytical-numerical solutions were obtained in the form of an improper integral to determine the temperature distribution in this medium. Software tools were developed, using which a numerical analysis of the behaviour of temperature as a function of spatial coordinates was performed for given values of geometric and thermophysical parameters. On this basis, it is possible to analyze heat exchange processes caused by internal heating concentrated in the volume of a parallelepiped. The developed linear and nonlinear mathematical models for determining the temperature field in spatial media with internal heating enabled analyzing their thermal resistance. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause failure not only of individual nodes and their individual elements, but also of the entire structure.

Keywords: temperature field; isotropic spatial medium; thermal conductivity of the material; convective heat transfer; internal heating; thermal sensitivity of the material.