Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU
ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)
https://doi.org/10.36930/40350121
Article received 19.02.2025
Article accepted 11.03.2025
UDC 004.[021+023+67+9]:519.6
Correspondence author: P. Yu. Grytsiuk pavlo.y.hrytsiuk@lpnu.ua

П. Ю. Грицюк, Ю. І. Грицюк
Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

МЕТОД ГЕНЕРУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ФІБОНАЧЧІ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ ШИФРУВАННЯ БЛОКОВИХ ДАНИХ

Розроблено метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, який дає можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, придатні для матричного методу шифрування блокових даних. З'ясовано, що навіть за останнє десятиліття надруковано значну кількість публікацій, в кожній з яких обґрунтовано різні підходи як до генерування послідовностей поліноміальних матриць Фібоначчі, так і доведено доцільність їх використання для шифрування даних. Водночас, застосування поліноміальних матриць Фібоначчі як окремої процедури для захисту блокових даних у теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко. Встановлено, що відомий метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі полягає у використанні рекурентного співвідношення, згідно з яким наступний поліном утворюють шляхом множення змінної x послідовно на елементи поточного полінома, після чого групують схожі доданки з доданками попереднього полінома. Розроблено метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, який полягає у використанні рекурентного матричного співвідношення, згідно з яким наступну поліноміальну матрицю утворюють шляхом множення змінної x послідовно на елементи поточної матриці, додавання елементів утвореної матриці до елементів попередньої матриці, після чого в утворених елементах групують усі схожі доданки. Наведено алгоритми утворення послідовності з 8-ми поліноміальних матриць Фібоначчі від 2-го до 5-го порядків, елементами яких стали поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, що дало змогу проаналізувати не тільки особливості їхньої побудови, але й усвідомити процедури знаходження їх визначників і обернених матриць. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати як послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, так і знаходити їхні визначники та обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку. Наведено приклад застосування матричного методу шифрування блокових даних поліноміальною матрицею Фібоначчі, що дає змогу зацікавленому читачу зрозуміти основний принцип шифрування як початкового повідомлення, так і розшифрування зашифрованого повідомлення.

Ключові слова: послідовність поліномів Фібоначчі; рекурентне матричне співвідношення; механізм утворення послідовності; обернена поліноміальна матриця Фібоначчі; зашифроване повідомлення; матричний метод шифрування даних.

Вступ / Introduction

Послідовності чисел Фібоначчі є основою для збагачення багатьох дослідників математичними знаннями, тому вони й здобули таку популярність через можливість широкого використання в різних предметних областях [63]. Водночас, різні дослідження особливостей генерування послідовності поліномів Фібоначчі за останні декілька десятиліть хоча й трапляються часто у відкритому друці, позаяк тісно пов'язані між собою [3], однак вони значно менше досліджені. З розвитком комп'ютерної техніки поліноми Фібоначчі почали застосовувати в різних областях знань [22], враховуючи й для шифрування даних, насамперед матричним методом [35].

Багато науковців у своїх роботах [10, 16, 22, 23, 47, 49, 62] навели результати дослідження властивостей поліномів Фібоначчі та Лукаса і похідних від них. Автори вважають, що такі поліноми є природним розширенням їхніх відповідних послідовностей чисел, тому їм притаманні багато й безпосередніх їхніх властивостей. Також вони наводять похідні від цих поліномів у формі відповідних згорток, що дало їм змогу сформувати сімейство поліноміальних послідовностей. Ними також наведено багато співвідношень для похідних послідовностей поліномів Фібоначчі та Лукаса [24]. Оскільки послідовність поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також золотий переріз почали використовувати в багатьох галузях знань, то наведено відповідні приклади їх застосовування в фізиці високих матерій, криптографії та шифруванні даних [7, 22].

Водночас, чимала кількість досліджень [3, 25, 27, 38, 53, 59, 67, 70] стосується різних підходів до генерування поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також їх використання для шифрування потокових і блокових даних. Однак, як окрема процедура шифрування даних у практиці їх захисту та передачі каналами зв'язку трапляється вкрай рідко, переважно як складова дещо складніших алгоритмів. Тому виникає потреба проведення додаткових досліджень щодо використання наявних і роз-

Інформація про авторів:
Грицюк Павло Юрійович, магістр, аспірант, кафедра автоматизованих систем управління. **Email:** pavlo.y.hrytsiuk@lpnu.ua; https://orcid.org/0009-0003-5409-2043
Грицюк Юрій Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. **Email:** yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0001-8183-3466

Цитування за ДСТУ: Грицюк П. Ю., Грицюк Ю. І. Метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі та особливості їх використання для шифрування блокових даних. Науковий вісник НЛТУ України. 2025, т. 35, № 1. С. 173–191.
Citation APA: Grytsiuk, P. Yu., & Hrytsiuk, Yu. I. (2025). Method for generating a sequence of Fibonacci polynomial matrices and their features for use in block data encryption. *Scientific Bulletin of UNFU*, 35(1), 173–191. https://doi.org/10.36930/40350121

роблення більш ефективних методів генерування як послідовності поліномів Фібоначчі, так і послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, а також встановлення певних особливості їх використання тільки як локального методу для шифрування даних.

Об'єкт дослідження – генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі.

Предмет дослідження – алгоритми і методи генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку як основи для шифрування блокових даних, що дасть можливість здійснювати ефективний їх захист.

Мета роботи – розробити метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, який дасть можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, що сукупно можна було б застосовувати у матричному методі шифрування блокових даних.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні *завдання дослідження*:

- проаналізувати останні дослідження та публікації, а також з'ясувати складність проблеми генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, які стануть основою для шифрування блокових даних, що дасть змогу здійснювати ефективний їх захист;
- навести традиційні способи подання так званих поліномів Фібоначчі, що мають багато корисних властивостей, використати тільки ті із них, які можна застосувати для генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку;
- розробити метод генерування послідовності з n-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, який дасть можливість знаходити не тільки їхні визначники, але й обернені матриці, які можна застосувати у матричному методі шифрування блокових даних;
- навести алгоритми утворення послідовності з 8-ми поліноміальних матриць Фібоначчі 2-го, 3-го, 4-го і 5-го порядків, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$), що дасть змогу проаналізувати не тільки особливості їхньої побудови загалом, але й усвідомити процедури знаходження їх визначників і обернених матриць зокрема;
- навести конкретний приклад застосування матричного методу шифрування блокових даних поліноміальною матрицею Фібоначчі, що дасть змогу зацікавленому читачу зрозуміти основний принцип шифрування як початкового повідомлення, так і розшифрування зашифрованого повідомлення;
- зробити висновки за результатами виконаного дослідження та надати відповідні рекомендації щодо їх практичного використання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботі [23] наведено результати дослідження послідовностей k-чисел Фібоначчі, їхніх поліномів і похідних від них. Автори вважають, що k-поліноми Фібоначчі є природним розширенням k-чисел Фібоначчі, тому багато їхніх властивостей допускають пряме доведення. Також вони наводять похідні від цих поліномів у формі згортки k-поліномів Фібоначчі, що дало їм змогу опосередкованим і прямим способом подати сімейство нових поліноміальних послідовностей. Доведено багато співвідношень для похідних поліномів Фібоначчі. Результати їхнього дослідження отримано внаслідок присутності золотого перерізу в рекурсивному поділі трикутників під час застосування методу скінченних елементів і трикутних уточнень.

У роботі [60] розглянуто узагальнені поліноми Фібоначчі та деякі їхні фундаментальні властивості. Автори вважають, що різні послідовності поліномів під назвами поліномів Фібоначчі та Лукаса трапляються в науковій літературі протягом століття. Узагальнення полінома Фібоначчі зроблено з використанням різних підходів, де зазвичай узагальнення здійснюється шляхом зміни початкових умов. У своєму дослідженні вони вивчають так звані узагальнені поліноми Фібоначчі з будь-яким цілим числом. Далі вони наводять деякі фундаментальні властивості узагальнених поліномів Фібоначчі.

У роботі [61] проаналізовано поліноми Фібоначчі та детерміновані тотожності, пов'язані з ними. Авторами встановлено, що поліноми Фібоначчі та поліноми Лукаса володіють чудовими та дивовижними властивостями, а також відповідними детермінованими тотожностями, які було детально описано. Записи детермінованих тотожностей задовольняють рекурентним співвідношенням поліномів Фібоначчі та поліномів Лукаса.

У роботі [11] проаналізовано так звані відстані між елементами узагальнених поліномів Фібоначчі, наведено пряму формулу, твірну функцію та матричні генератори для утворення цих поліномів. Автори також навели графову інтерпретацію цих поліномів, їх зв'язки з трикутником Паскаля та довели деякі тотожності для них.

У роботі [44] наведено відомості про узагальнені $h(x)$-поліноми Фібоначчі та Лукаса, утворені функцією $h(x)$, яка може бути поліномом як з цілими, так і з дійсними коефіцієнтами. Вони наводять $h(x)$-поліноми Фібоначчі, які узагальнюють як поліноми Фібоначчі-Каталона, так і поліноми Фібоначчі-Берда, а також вказують на їхні відповідні властивості. Автори також наводять $h(x)$-поліноми Лукаса, які узагальнюють поліноми Лукаса та вказують на їхні відповідні властивості. Окрім цього, автори навели $Q_h(x)$-матрицю Фібоначчі, елементами якої є поліноми Фібоначчі n-го степеня, що узагальнює Q-матрицю Фібоначчі, породжену відповідними числами.

У роботі [56] наведено інформацію про згорнуті узагальнені поліноми Фібоначчі та Лукаса. Автори визначають згорнуті $h(x)$-поліноми Фібоначчі як розширення класичних чисел Фібоначчі. Також вони наводять декілька комбінаторних формул, що містять $h(x)$-поліноми Фібоначчі та Лукаса. Окрім цього, автори отримали згорнуті $h(x)$-поліноми Фібоначчі з сімейства матриць Гессенберга (англ. *Hessenberg*) та довели їхні відповідні властивості.

У роботі [13] наведено узагальнений поліном Фібоначчі та доведено його властивості. Автори вважають, що поліноми Фібоначчі та поліноми Лукаса відомі тим, що володіють чудовими й дивовижними властивостями та відповідними тотожностями. Окрім цього, дослідники визначають деякі рекурентні співвідношення та наводять їх для генерування узагальнених поліномів Фібоначчі.

У роботі [66] наведено інформацію про деякі властивості узагальнених поліномів Фібоначчі та Лукаса, отримані шляхом використання матриць та розкладання Лапласа. Дослідники наводять нові сімейства тридіагональних матриць, послідовні детермінанти яких породжують будь-яку підпослідовність цих поліномів.

У роботі [69] наведено деякі результати щодо згорнутих (p,q)-поліномів Фібоначчі. У своєму дослідженні автори на підставі (p,q)-поліномів Фібоначчі $u_n(x)$ та

(p,q)-поліномів Лукаса $v_n(x)$ ввели так звані згорнуті (p,q)-поліноми Фібоначчі $u_n^{(r)}(x)$, які узагальнюють згорнуті числа Фібоначчі, згорнуті поліноми Пелла та поліноми Гегенбауера. Автори навели відповідні вирази, розкладання Лапласа, рекурентні та диференціальні рекурентні співвідношення $u_n^{(r)}(x)$, а також результати встановлення зв'язків між поліномами $u_n^{(r)}(x)$ з поліномами $u_n(x)$ та $v_n(x)$. Окрім цього, вони визначили детермінантні подання поліномів $u_n^{(r)}(x)$ і $v_n(x)$, а також навели алгебричну інтерпретацію поліномів $u_n^{(r)}(x)$.

У роботі [39] наведено деякі замітки про модифіковані поліноми Пелла (англ. *Pell Polynomials*). Автор спочатку наводить доведення твірної функції цих поліномів. Потім він надає доведення формули Біне (англ. *Binet Formula*) для модифікованих поліномів Пелла, який дає модифікований поліном Пелла, а також отримує деяку формулу підведення сум цих поліномів. Окрім цього, він досліджує деякі добре відомі тотожності, враховуючи тотожності Каталана, Кассіні, д'Оканя та Геліна-Чезаро, що містять модифіковані поліноми Пелла.

У роботі [47] розглянуто та визначено 3-поліноми Фібоначчі в сімействі чисел Фібоначчі. Продемонстровано деякі важливі властивості 3-поліномів, які порівнювали з відомими поліномами Фібоначчі. Для 3-полінома Фібоначчі було наведено його вираз і доведено деякі теореми, пов'язані з ним.

У роботі [12] наведено особливості утворення чисел Фібоначчі та ортогональних поліномів. Автор доводить, що послідовність $(1/F_{n+2})_{n\geq 0}$ обернених чисел Фібоначчі є моментною послідовністю певної дискретної ймовірнісної міри, що ідентифікує ортогональні поліноми як маленькі q-поліноми Якобі (англ. *Jacobi*) з $q = (1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})$. Він доводить, що відповідні q-поліноми Якобі мають цілі коефіцієнти, тому обернена до відповідних матриця Ганкеля (англ. *Hankel*) $(1/F_{i+j+2})_{n\geq 0}$ має також цілі зазначення. Наведено аналогічні результати для матриць Гільберта (англ. *Hilbert*) та доведено їхні відповідні властивості.

У роботі [42] наведено деякі властивості (p,q)-поліномів Фібоначчі та Лукаса. Автори вважають, що масиви Ріордана (англ. *Riordan*) корисні для отримання комбінаторних сум за допомогою генерувальних функцій. Вони стверджують, що багато теорем можна легко довести за допомогою масивів Ріордана. Автори розглядають матрицю Паскаля (англ. *Pascal*) та визначають нове узагальнення поліномів Фібоначчі, які називають (p,q)-поліномами Фібоначчі. За допомогою методу Ріордана вони отримують комбінаторні тотожності, а також здійснюють факторизацію матриці Паскаля, що містить (p,q)-поліноми Фібоначчі.

У роботі [52] наведено обнадійливі, як на перший погляд, показники надійності теорії шифрування даних поліномами Фібоначчі. Розроблено новий клас квадратних $Q_{pm}^{n}(x)$-матриць Фібоначчі (n–1)-го степеня та pm-го порядку для шифрування даних, де $p \geq 3$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $x \geq 1$, елементами яких є поліноми Фібоначчі. Запропонований метод дешифрування даних випливає з можливості отримання відповідних обернених $Q_{pm}^{-n}(x)$-матриць Фібоначчі, визначник яких становить ±1. При цьому відзначено як незначні тривалості виконання таких процедур, так і надійність зашифрованих повідомлень, стійких до криптографічних атак [29, 36].

У роботі [22] розроблено метод шифрування будь-яких повідомлень на підставі поліномів Фібоначчі. Для цілих чисел $m \geq 2$, $x \geq 1$ і $n \geq 1$ було розроблено $\overline{\overline{Q}}_m^n$-матрицю Фібоначчі ($n$–1)-го степеня розміром $m \times m$, елементами якої є поліноми Фібоначчі n-го степеня, а визначник матриці становить ±1. Для розшифрування даних автори ввели обернену $\overline{\overline{Q}}_m^{-n}(x)$-матрицю, елементи якої є оберненими поліноми Фібоначчі n-го степеня.

У роботі [8] запропоновано нову теорію шифрування даних з використанням узагальнених n-крокових поліномів Фібоначчі, на підставі яких визначено новий клас квадратної $M_{h,n}(x)$-матриці n-го порядку ($x \geq 1$) та отримано певні співвідношення між елементами цієї матриці. Проаналізовано достовірність застосування цього методу, де показано, що для $n = 2$ його коригувальна здатність становить 93,33 %, тоді як для $n = 3$ вже становить 99,80 %. Цікавою особливістю розробленого методу шифрування даних є те, що його достовірність не залежить від коефіцієнтів полінома Фібоначчі, за винятком коефіцієнта $h_n(x) = 1$, і зростає зі збільшенням порядку квадратної $M_{h,n}(x)$-матриці.

У роботі [5] розглянуто підхід до реалізації криптосистеми з використанням поліномів і чисел Лукаса. Автори навели інноваційний підхід до реалізації криптосистеми, яка використовує поліноми та числа Лукаса. Числа Лукаса, послідовність яких подібна до чисел Фібоначчі, мають унікальні властивості, які часто використовують для шифрування та дешифрування даних. Запропонована поліноміальна криптосистема Лукаса описує процеси генерування ключів, шифрування та дешифрування, вказуючи на питання безпеки та особливості управління ключами. Стійкість системи залежить від складності розкладання великих простих чисел і виклику щодо отримання секретного ключа з відкритого ключа. У своєму дослідженні автори забезпечують всебічне розуміння криптосистеми та досліджують її потенційні можливості застосування в безпечному зв'язку та захисті даних. Також проведено широкий аналіз і криптоаналіз, щоб оцінити безпеку та ефективність запропонованої системи, що робить її перспективним доповненням до криптографічного середовища.

У роботі [10] наведено узагальнену теорію шифрування даних на (m,t)-розширенні поліномів p-числами Фібоначчі. Спочатку автори визначають (m,t)-розширення p-чисел Фібоначчі та золотих (p,m,t)-пропорцій, де $p \geq 0$ є цілим невід'ємним числом, $m > 0$ і $t > 0$. Вони встановили співвідношення між золотою (p,m,t)-пропорцією, між золотою (p,m)-пропорцією та між золотою p-пропорцією, внаслідок чого було визначено квадратну $G_{p,m,t}$-матрицю Фібоначчі. Також автори показали, що, за умови правильного вибору початкових членів полінома для (m,t)-розширення його p-числами Фібоначчі, можна застосувати процедуру шифрування даних з використанням $G_{p,m,t}$-матриці Фібоначчі. Зроблено висновок, що для $t = 1$ зв'язки між елементами матриці шифрування даних для різних значень p і m збігаються з аналогічними початковими членами чисел Фібоначчі [9].

У роботі [4] розглянуто тип загальнодоступної криптосистеми, що використовує поліноми та послідовностей поліномів Пелла. Автори створили своєрідну криптосистему з відкритим ключем за допомогою поліномів і послідовностей поліномів Пелла шляхом використання властивостей як поліномів, так і послідовностей по-

ліномів Пелла через перетворення поліномів у вісімкову та двійкову систему числення. Захист цифрових даних і їх модифікація вони здійснювали за допомогою сучасних криптографічних методів, які відіграють важливу роль у безпеці мережі.

Отже, за результатами проведеного аналізу останніх досліджень та публікацій стосовно наявних підходів до генерування послідовності поліномів Фібоначчі n-го степеня та генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, а також особливостей їх використання для шифрування даних було встановлено, що навіть за останнє десятиліття виконано багато різноманітних досліджень, в кожному з яких тією чи іншою мірою обґрунтовано різні підходи як до генерування послідовностей таких поліномів і поліноміальних матриць, а також доведено доцільність їх використання для шифрування даних. Водночас, застосування поліномів Фібоначчі та поліноміальних матриць Фібоначчі як окремої процедури для захисту відповідно потокових і блокових даних у теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко. Тому проведення додаткового дослідження щодо розроблення ефективного методу генерування послідовності з n-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких будуть поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, а також встановлення певних особливості їхнього використання для шифрування блокових даних тільки як локального методу є актуальним завданням, яке й спробуємо частково вирішити в цьому дослідженні.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

1. Метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі. Для генерування послідовності поліномів Фібоначчі використовують таке рекурентне співвідношення [6]:

$$F^{(n+1)}(x) = xF^{(n)}(x) + F^{(n-1)}(x), \quad (1)$$

де $F^{(n+1)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ і $F^{(n-1)}(x)$ – відповідно наступний, поточний та попередній вигляд полінома Фібоначчі. Для $F^{(0)}(x) = 0$ та $F^{(1)}(x) = 1$ наступний поліном Фібоначчі матиме вигляд $F^{(2)}(x) = x \cdot F^{(1)}(x) + F^{(0)}(x) = x \cdot 1 + 0 = x$.

Застосувавши рекурентне співвідношення (1), послідовність перших декількох і наступних вибіркових поліномів Фібоначчі матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&F^{(0)}(x) = 0;\ F^{(1)}(x) = 1;\ F^{(2)}(x) = x;\\
&F^{(3)}(x) = x^2 + 1;\\
&F^{(4)}(x) = x^3 + 2x;\\
&F^{(5)}(x) = x^4 + 3x^2 + 1;\\
&F^{(6)}(x) = x^5 + 4x^3 + 3x;\\
&F^{(7)}(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1;\\
&F^{(8)}(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x; \quad (2)\\
&F^{(9)}(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1;\\
&F^{(10)}(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x.\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&F^{(15)}(x) = x^{14} + 13x^{12} + 66x^{10} + 165x^8 + 210x^6 + 126x^4 + 28x^2 + 1;\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&F^{(20)}(x) = x^{19} + 18x^{17} + 136x^{15} + 560x^{13} + 1365x^{11} + 2002x^9 +\\
&+1716x^7 + 792x^5 + 165x^3 + 10x.
\end{aligned}$$

Метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі полягає у використанні рекурентного співвідношення (1), згідно з яким наступний поліном утворюють шляхом множення змінної x послідовно на елементи поточного полінома, після чого групують схожі доданки з доданками попереднього полінома. Наприклад, за вхідних поліномів $F^{(6)}(x)$ і $F^{(7)}(x)$ відповідно 5-го і 6-го степенів з послідовності поліномів (2) наступний поліном 7-го степеня матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
F^{(8)}(x) &= xF^{(7)}(x) + F^{(6)}(x) =\\
&= x(x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1) + (x^5 + 4x^3 + 3x) =\\
&= x^7 + 5x^5 + 6x^3 + x + x^5 + 4x^3 + 3x = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x.
\end{aligned}$$

Водночас, в роботі [61] вказано, що твірна функція поліномів Фібоначчі має такий вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x)t^n = t(1 + xt - t^2)^{-1}, \quad (3)$$

а замість рекурентного співвідношення (1) для обчислення складових n-го полінома Фібоначчі можна використати таку формулу:

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k} x^{n-1-2k}, \quad (4)$$

де: $\binom{n}{m}$ – біноміальний коефіцієнт полінома; $\lfloor z \rfloor$ – найбільше ціле число, менше або дорівнює z.

Деякі послідовності поліномів можна визначити за відповідними рекурентними співвідношеннями, подібними до рекурентного співвідношення Фібоначчі (1). Такі послідовності поліномів, під загальною назваою поліноми Фібоначчі (англ. *Fibonacci Polynomials*), досліджували в 1883 р. бельгійський математик Ежен Шарль Каталан (англ. *Eugene Charles Catalan*) і німецький математик Е. Якобсталь (англ. *E. Jacobsthal*). Водночас, поліноми Фібоначчі [41], які досліджував Каталан, визначали за таким рекурентним співвідношенням:

$$K^{(n)}(x) = x \cdot K^{(n-1)}(x) + K^{(n-2)}(x),\ n \geq 3,$$

де $$K^{(1)}(x) = 1,\ K^{(2)}(x) = x. \quad (5)$$

Тут за $x = 1$ отримаємо $K^{(n)}(1) = F_n$, тобто матимемо n-те число Фібоначчі. Поліноми Фібоначчі, досліджені Якобсталем, визначали за таким рекурентним співвідношенням:

$$J^{(n)}(x) = J^{(n-1)}(x) + x \cdot J^{(n-2)}(x),\ n \geq 3,$$

де $$J^{(1)}(x) = J^{(2)}(x) = 1. \quad (6)$$

Поліноми Фібоначчі, досліджені П. Ф. Бердом (англ. *P. F. Byrd*), визначали за таким рекурентним співвідношенням:

$$\varphi^{(n)}(x) = 2x \cdot \varphi^{(n-1)}(x) + \varphi^{(n-2)}(x),\ n \geq 2,$$

де $$\varphi^{(0)}(x) = 0,\ \varphi^{(1)}(x) = 1. \quad (7)$$

Поліноми Лукаса, які у 1970 році вперше дослідив М. Бікнелл-Джонсон (англ. *Marjorie Bicknell-Johnson*), визначали за таким рекурентним співвідношенням:

$$L^{(n)}(x) = x \cdot L^{(n-1)}(x) + L^{(n-2)}(x),\ n \geq 2,$$

де $$L^{(0)}(x) = 2,\ L^{(1)}(x) = x. \quad (8)$$

Відомо [48], що поліноми Фібоначчі та поліноми Лукаса тісно пов'язані між собою. Очевидно, вони мають глибокий зв'язок із відомими послідовностями чисел Фібоначчі та Лукаса. Тобто $F^{(n)}(1) = F_n$ і $L^{(n)}(1) = L_n$, де F_n і L_n – числа Фібоначчі та Лукаса. Узагальнення послідовності поліномів Лукаса наведено в роботі [17].

М. Н. С. Свамі [64] визначив поліноми Фібоначчі та отримав ще декілька для них тотожностей. Водночас, В. Е. Хоггатт і Д. А. Лінд [32] зробили подібну "символьну підстановку" певних послідовностей у поліноми Фібоначчі, після чого вони поширили ці результати на підстановку будь-якої рекурентної послідовності поліномів у будь-яку послідовність поліномів, що піддають-

ся рекурентному співвідношенню з коефіцієнтами полінома. Відтоді багато задач про методи утворення поліномів Фібоначчі було запропоновано в різних випусках журналу "The Fibonacci Quarterly".

В. Е. Хоггатт, Дж. В. Філіпс і Х. Т. Леонард [30, 31, 32] отримали декілька тотожностей, що містять поліноми Фібоначчі та поліноми Лукаса, водночас як А. Лупас [43] наводить багато цікавих їх властивостей. К. Берг [12] дав визначення числам Фібоначчі та відповідним ортогональним поліномам.

С. Фалькон і А. Плаза [23] визначили, що *k*-поліноми Фібоначчі є природним розширенням *k*-чисел Фібоначчі, тому багато їхніх властивостей допускають пряме доведення, а багато співвідношень для похідних від поліномів Фібоначчі доведено. К. Кайгісіз та А. Шахін [40] навели нові узагальнення чисел Лукаса за допомогою їхнього матричного подання, використовуючи узагальнені поліноми Лукаса.

Г. Й. Лі та М. Аскі [42] розглядають матрицю Паскаля та визначають нове узагальнення поліномів Фібоначчі, яке називають (*p*,*q*)-поліномами Фібоначчі. Вони отримують комбінаторні тотожності та за допомогою методу Ріордана (англ. *Riordan Method*) отримують факторизацію матриці Паскаля, що містить (*p*,*q*)-поліноми Фібоначчі.

Отже, послідовності поліномів Фібоначчі [3, 68] є природним розширенням відповідних послідовностей чисел Фібоначчі, тому багато їхніх властивостей допускають пряме доведення [23, 47, 57, 72].

2. Метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі. З роботи [68] відомо, що поліноміальна $\bar{\bar{Q}}_2(x)$-матриця Фібоначчі розміром 2×2 має такий вигляд

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x)=\begin{bmatrix} F^{(n+1)}(x) & F^{(n)}(x) \\ F^{(n)}(x) & F^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \text{ для } \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (9)$$

а її визначник отримують за формулою

$$\det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x)\right)=F^{(n+1)}(x)F^{(n-1)}(x)-(F^{(n)}(x))^2=(-1)^{n+1}, \quad (10)$$

який ще називають тотожністю Кассіні [35]. Наприклад, для 4-ої та 5-ої поліноміальних матриць Фібоначчі їхні визначники матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}\det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x)\right)&=F^{(4)}(x)F^{(2)}(x)-(F^{(3)}(x))^2=\\&=(x^3+2x)x-(x^2+1)^2=-1;\\ \det\left(\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x)\right)&=F^{(5)}(x)F^{(3)}(x)-(F^{(4)}(x))^2=\\&=(x^4+3x^2+1)(x^2+1)-(x^3+2x)^2=1.\end{aligned}$$

З роботи [63] також відомо, що поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)$-матриці Фібоначчі 2-го, 3-го, 4-го, 5-го і *m*-го порядків мають такий вигляд:

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2};\ \bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3};\ \bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5};\ \bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}. \qquad (11)$$

Для генерування послідовності поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(2)}(x)$-матриць Фібоначчі використовують рекурентне матричне співвідношення, аналогічне співвідношенню (1), яке в нашому випадку матиме такий вигляд:

$$\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x)=x\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x)+\bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x), \qquad (12)$$

де $\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x)$, $\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x)$ і $\bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x)$ – відповідно наступний, поточний та попередній вигляд поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі.

Метод генерування послідовності поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриць Фібоначчі *m*-го порядку полягає у використанні рекурентного матричного співвідношення (12), згідно з яким наступну поліноміальну $\bar{\bar{Q}}_m^{(n+1)}(x)$-матрицю утворюють шляхом множення змінної *x* послідовно на елементи поточної $\bar{\bar{Q}}_m^{(n)}(x)$-матриці, якими є відповідні поліноми Фібоначчі, додавання елементів утвореної матриці до елементів попередньої $\bar{\bar{Q}}_m^{(n-1)}(x)$-матриці, після чого у кожному з її утворених елементів групують всі схожі доданки. Наприклад, для $\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ та $\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x))=x\cdot 0-1\cdot 1=-1$, а наступна поліноміальна матриця Фібоначчі матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)&=x\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\\&=\begin{bmatrix} x^2 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix};\\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x))&=(x^2+1)\cdot 1-x\cdot x=1.\end{aligned} \qquad (13)$$

Оскільки поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_m^{(\cdot)}(x)$-матриці Фібоначчі часто використовують для реалізації операцій шифрування даних, то аналогічні оберненні матриці також потрібно мати для зворотного процесу – розшифрування даних. Інтуїтивно зрозуміло, що ці $\bar{\bar{Q}}_m^{-(\cdot)}(x)$-матриці Фібоначчі мають бути оберненими до матриць шифрування даних, які назвемо *оберненими поліноміальними* $\bar{\bar{Q}}_m^{-(\cdot)}(x)$*-матрицями Фібоначчі*. Подібно до поліноміальних матриць шифрування даних, обернені поліноміальні матриці Фібоначчі мають мати також загальний вигляд.

Для знаходження оберненої матриці 2-го порядку використовують такий вираз [26]:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Наприклад, для $\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)=\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ маємо

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x)=\frac{1}{x\cdot 0-1\cdot 1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix},$$

а для матриці (13) отримаємо

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot 1-x\cdot x}\begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix}.$$

Покажемо, що матричний вираз $\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(n)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}$ можна виконати для будь-якого значення *n*, наприклад *n*=2 та *n*=3, де $\bar{\bar{I}}_{2\times 2}$ – одинична матриця *m*=2-го порядку.

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}\Rightarrow&\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}=\\&=\begin{bmatrix} x\cdot 0+1\cdot 1 & x\cdot 1+1\cdot(-x) \\ 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot(-x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\\ \bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x)=\bar{\bar{I}}_{2\times 2}\Rightarrow&\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix}=\\&=\begin{bmatrix} (x^2+1)\cdot 1+x\cdot(-x) & (x^2+1)\cdot(-x)+x\cdot(x^2+1) \\ x\cdot 1+1\cdot(-x) & x\cdot(-x)+1\cdot(x^2+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Нижче буде наведено послідовності декількох перших поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_m^{(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі відповідно 2-го, 3-го, 4-го і 5-го порядків, утворені рекурентним матричним співвідношенням (12), елементами яких будуть відповідні поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, які повністю відповідатимуть поліномам Фібоначчі з послідовності (2).

2.1. ***Механізм утворення послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі 2-го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі 2-го порядку, їхніх визначників і відповідно обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{-(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (16) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі від (n–1)-го до (n–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$).

Для непарної поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_2^{(\bullet)}(x)$-матриці Фібоначчі її визначник становить одиниця, а для парної – мінус одиниця, що повністю відповідає формулі (10). Водночас, всі обернені поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\bullet)}(x)$-матриці Фібоначчі відповідають матричному виразу (14). Правильність отримання як поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_2^{(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі, так і їхніх обернених еквівалентів перевірена матричним виразом (15), однак тепер вже для 4-ої поліноміальної матриці Фібоначчі, внаслідок виконання якого отримано також одиничну матрицю.

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(n+1)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x)) = (-1)^{n+1};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(n)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(n)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x)) = -1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(1)}(x) = x\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x)) = 1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & x^2+1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(2)}(x) = x\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x)) = -1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} -x & x^2+1 \\ x^2+1 & -x^3-2x \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(3)}(x) = x\begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x)) = 1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(5)}(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & -x^3-2x \\ -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(5)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) = x\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x)) = -1; \quad (16)$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(6)}(x) = \begin{bmatrix} -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(6)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(5)}(x) = x\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x)) = 1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{-(7)}(x) = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \\ -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(7)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(8)}(x) = x\bar{\bar{Q}}_2^{(7)}(x) + \bar{\bar{Q}}_2^{(6)}(x) = x\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_2^{(8)}(x)) = -1;\ \bar{\bar{Q}}_2^{-(8)}(x) = \begin{bmatrix} -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ x^6+5x^4+6x^2+1 & -x^7-6x^5-10x^3-4x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_2^{(4)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_2^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 \\ x^2+1 & x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -x & x^2+1 \\ x^2+1 & -x^3-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^3+2x)(-x)+(x^2+1)(x^2+1) & (x^3+2x)(x^2+1)+(x^2+1)(-x^3-2x) \\ (x^2+1)(-x)+x(x^2+1) & (x^2+1)(x^2+1)+x(-x^3-2x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. ***Механізм утворення послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі 3-го порядку***. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі 3-го порядку, їхніх визначників і відповідно обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\bullet)}(x)$-матриць Фібоначчі.

Для знаходження оберненої матриці 3-го порядку використовують такий матричний вираз [26]:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} ek-fh & ch-bk & bf-ce \\ fg-dk & ak-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\text{де } \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{aek+bfg+cdh-ceg-bdk-afh}.$$

Наприклад, для 2-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 3-го порядку $\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)$ (див. матричні вирази (11)) її обернений еквівалент матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{x \cdot x \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot x \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - x \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{1}{x};$$

$$\begin{bmatrix} x \cdot 0 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 - 0 \cdot x \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 & x \cdot 0 - 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 - x \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - x \cdot 0 & 1 \cdot 0 - x \cdot 1 & x \cdot x - 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & -x & x^2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{x}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & -x & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix}.$$

З наведених матричних виразів (19) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі від (n–1)-го до (n–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$). Водночас, для n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)$-матриці Фібоначчі 3-го порядку її визначник можна отримати за такою формулою

$$\det(\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)) = (-1)^{n+1} F^{(n)}(x), \quad (18)$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(n+1)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x))=(-1)^{n+1}F^{(n)}(x);\ \bar{\bar{Q}}_3^{(n)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_3^{-(n)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}x&1&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x))=-x;\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}&0&\frac{-1}{x}\\0&0&1\\0&1&-x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix}x&1&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x))=x^2+1;\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^2+1}&\frac{x^2}{x^2+1}\\0&1&-x\\0&-x&x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)=x\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&1&0\\0&x&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x))=-(x^3+2x);\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(4)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x}{x^2+2}&\frac{x^2}{x^3+2x}\\0&-x&x^2+1\\0&x^2+1&-x^3-2x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(3)}(x)=x\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x))=x^4+3x^2+1;\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(5)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^5-3x^3-2x}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^6+4x^4+4x^2}{x^4+3x^2+1}\\0&x^2+1&-x^3-2x\\0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(4)}(x)=x\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0\\0&x^3+2x&x^2+1\\0&x^2+1&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x))=-(x^5+4x^3+3x);$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(6)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^5+4x^3+3x}&\frac{x^6+5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3}&\frac{-x^8-6x^6-11x^4-6x^2-1}{x^5+4x^3+3x}\\0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&-x^5-4x^3-3x\end{bmatrix};\qquad(19)$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(5)}(x)=x\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x))=x^6+5x^4+6x^2+1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{-(7)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{-x^9-7x^7-16x^5-13x^3-3x}{x^6+5x^4+6x^2+1}&\frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1}\\0&x^4+3x^2+1&-x^5-4x^3-3x\\0&-x^5-4x^3-3x&x^6+5x^4+6x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(8)}(x)=x\cdot\bar{\bar{Q}}_3^{(7)}(x)+\bar{\bar{Q}}_3^{(6)}(x)=x\begin{bmatrix}x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x&0\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1&0\\0&x^7+6x^5+10x^3+4x&x^6+5x^4+6x^2+1\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&x^5+4x^3+3x\end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_3^{(8)}(x))=-(x^7+6x^5+10x^3+4x);\ \bar{\bar{Q}}_3^{-(8)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x}&\frac{x^{10}+9x^8+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4}&\frac{-x^{12}-10x^{10}-37x^8-62x^6-46x^4-12x^2-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x}\\0&-x^5-4x^3-3x&x^6+5x^4+6x^2+1\\0&x^6+5x^4+6x^2+1&-x^7-6x^5-10x^3-4x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_3^{(2)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_3^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix}x^2+1&x&0\\0&x^2+1&x\\0&x&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^2+1}&\frac{x^2}{x^2+1}\\0&1&-x\\0&-x&x^2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(n+1)}(x)=x\cdot\overline{\overline{Q}}_4^{(n)}(x)+\overline{\overline{Q}}_4^{(n-1)}(x);\ \det(\overline{\overline{Q}}_4^{(n)}(x))=(-1)^{n+1}\breve{F}^{(n)}(x);\ \overline{\overline{Q}}_4^{(n)}(x)\times\overline{\overline{Q}}_4^{-(n)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(1)}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix};\ \overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)=\begin{bmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix};\ \det(\overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x))=-x^2;\ \overline{\overline{Q}}_4^{-(2)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}&\frac{-1}{x^2}&0&\frac{1}{x^2}\\0&\frac{1}{x}&0&\frac{-1}{x}\\0&0&0&1\\0&0&1&-x\end{bmatrix};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x)=x\cdot\overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)+\overline{\overline{Q}}_4^{(1)}(x)=x\begin{bmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix};\ \det(\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x))=x^4+2x^2+1;\ \overline{\overline{Q}}_4^{-(3)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^4+2x^2+1}&\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}&\frac{-x^3}{x^4+2x^2+1}\\0&\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^2+1}&\frac{x^2}{x^2+1}\\0&0&1&-x\\0&0&-x&x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(4)}(x)=x\cdot\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x)+\overline{\overline{Q}}_4^{(2)}(x)=x\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix};\ \overline{\overline{Q}}_4^{-(4)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x^2-1}{x^6+4x^4+4x^2}&\frac{-x^4-2x^2-1}{x^5+4x^3+4x}&\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^6+4x^4+4x^2}\\0&\frac{1}{x^3+2x}&\frac{x^2+1}{x^2+2}&\frac{-x^4-2x^2-1}{x^3+2x}\\0&0&-x&x^2+1\\0&0&x^2+1&-x^3-2x\end{bmatrix};$$

$$\det(\overline{\overline{Q}}_4^{(4)}(x))=-(x^6+4x^4+4x^2);$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(5)}(x)=x\cdot\overline{\overline{Q}}_4^{(4)}(x)+\overline{\overline{Q}}_4^{(3)}(x)=x\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^2+1&x&0&0\\0&x^2+1&x&0\\0&0&x^2+1&x\\0&0&x&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix};\ \det(\overline{\overline{Q}}_4^{(5)}(x))=x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1; \tag{20}$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{-(5)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^3-2x}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}&\frac{x^8+5x^6+8x^4+4x^2}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}&\frac{-x^9-6x^7-12x^5-8x^3}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}\\0&\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^5-3x^3-2x}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^6+4x^4+4x^2}{x^4+3x^2+1}\\0&0&x^2+1&-x^3-2x\\0&0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\end{bmatrix};$$

$$\overline{\overline{Q}}_4^{(6)}(x)=x\cdot\overline{\overline{Q}}_4^{(5)}(x)+\overline{\overline{Q}}_4^{(4)}(x)=x\begin{bmatrix}x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\0&0&x^3+2x&x^2+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x^3+2x&x^2+1&0&0\\0&x^3+2x&x^2+1&0\\0&0&x^3+2x&x^2+1\\0&0&x^2+1&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0&0\\0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1&0\\0&0&x^5+4x^3+3x&x^4+3x^2+1\\0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\end{bmatrix};$$

$$\det(\overline{\overline{Q}}_4^{(6)}(x))=-(x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2);\ \overline{\overline{Q}}_4^{-(6)}(x)=\begin{bmatrix}\frac{1}{x^5+4x^3+3x}&\frac{-x^4-3x^2-1}{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}&\frac{-x^{10}-8x^8-23x^6-28x^4-13x^2-2}{x^9+8x^7+22x^5+24x^3+9x}&\frac{x^{12}+9x^9+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1}{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}\\0&\frac{1}{x^5+4x^3+3x}&\frac{x^6-5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3}&\frac{-x^8-6x^6-11x^4-6x^2-1}{x^5+4x^3+3x}\\0&0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1\\0&0&-x^3-2x&-x^5-4x^3-3x\end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x) = x\cdot\bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x) + \bar{\bar{Q}}_4^{(5)}(x) =$$

$$= x\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 \\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x)) = x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(7)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^5-4x^3-3x}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} & \frac{x^{14}+11x^{12}+47x^{10}+98x^8+103x^6+51x^4+9x^2}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} & \frac{-x^{15}-12x^{13}-57x^{11}-136x^9-171x^7-108x^5-27x^3}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^9-7x^7-16x^5-13x^3-3x}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1} \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \\ 0 & 0 & -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(8)}(x) = x\cdot\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x) + \bar{\bar{Q}}_4^{(6)}(x) = x\begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 \\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & x^7+6x^5+10x^3+4x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \end{bmatrix}; \det(\bar{\bar{Q}}_4^{(7)}(x)) = -(x^{14}+12x^{12}+56x^{10}+128x^8+148x^6+80x^4+16x^2); \qquad (20^*)$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{-(8)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{-x^6-5x^4-6x^2-1}{x^{14}+12x^{12}+56x^{10}+128x^8+148x^6+80x^4+16x^2} & \frac{-x^{16}-14x^{14}-80x^{12}-240x^{10}-405x^8-382x^6-187x^4-40x^2-3}{x^{13}+12x^{11}+56x^9+128x^7+148x^5+80x^3+16x} & \frac{x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+399x^6+123x^4+18x^2+1}{x^{14}+12x^{12}+56x^{10}+128x^8+148x^6+80x^4+16x^2} \\ 0 & \frac{1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} & \frac{x^{10}+9x^8+29x^6+40x^4+22x^2+3}{x^6+6x^4+10x^2+4} & \frac{-x^{12}-10x^{10}-37^8-62x^6-46x^4-12x^2-1}{x^7+6x^5+10x^3+4x} \\ 0 & 0 & -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & -x^7-6x^5-10x^3-4x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_4^{(2)}(x)\times\bar{\bar{Q}}_4^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 \\ 0 & x^2+1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & \frac{-x}{x^4+2x^2+1} & \frac{x^2}{x^4+2x^2+1} & \frac{-x^3}{x^4+2x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^2+1} & \frac{-x}{x^2+1} & \frac{x^2}{x^2+1} \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & -x & x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(n+1)}(x) = x \cdot \bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(n-1)}(x);\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x)) = (-1)^{n-1} F_{n+1}(x);\ \bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x) \times \bar{\bar{Q}}_5^{-(n)}(x) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix};\ \bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} x&1&0&0&0\\ 0&x&1&0&0\\ 0&0&x&1&0\\ 0&0&0&x&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x)) = -x^3;\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(2)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x}&\frac{-1}{x^2}&\frac{1}{x^3}&0&\frac{-1}{x^3}\\ 0&\frac{1}{x}&\frac{-1}{x^2}&0&\frac{1}{x^2}\\ 0&0&\frac{1}{x}&0&\frac{-1}{x}\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&-x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x) = x \cdot \bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(1)}(x) = x \begin{bmatrix} x&1&0&0&0\\ 0&x&1&0&0\\ 0&0&x&1&0\\ 0&0&0&x&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1&x&0&0&0\\ 0&x^2+1&x&0&0\\ 0&0&x^2+1&x&0\\ 0&0&0&x^2+1&x\\ 0&0&0&x&1 \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x)) = x^6+3x^4+3x^2+1;\ \bar{\bar{Q}}_5^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^4+2x^2+1}&\frac{x^2}{x^6+3x^4+3x^2+1}&\frac{-x^3}{x^6+3x^4+3x^2+1}&\frac{x^4}{x^6+3x^4+3x^2+1}\\ 0&\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^4+2x^2+1}&\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}&\frac{-x^3}{x^4+2x^2+1}\\ 0&0&\frac{1}{x^2+1}&\frac{-x}{x^2+1}&\frac{x^2}{x^2+1}\\ 0&0&0&1&-x\\ 0&0&0&-x&x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x) = x \cdot \bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(2)}(x) = x \begin{bmatrix} x^2+1&x&0&0&0\\ 0&x^2+1&x&0&0\\ 0&0&x^2+1&x&0\\ 0&0&0&x^2+1&x\\ 0&0&0&x&1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x&1&0&0&0\\ 0&x&1&0&0\\ 0&0&x&1&0\\ 0&0&0&x&1\\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3+2x&x^2+1&0&0&0\\ 0&x^3+2x&x^2+1&0&0\\ 0&0&x^3+2x&x^2+1&0\\ 0&0&0&x^3+2x&x^2+1\\ 0&0&0&x^2+1&x \end{bmatrix};\ \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x)) = -(x^9+6x^7+12x^5+8x^3); \tag{21}$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{-(4)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x^2-1}{x^6+4x^4+4x^2}&\frac{x^4+2x^2+1}{x^9+6x^7+12x^5+8x^3}&\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^8+6x^6+12x^4+8x^2}&\frac{-x^8-4x^6-6x^4-4x^2-1}{x^9+6x^7+12x^5+8x^3}\\ 0&\frac{1}{x^3+2x}&\frac{-x^2-1}{x^6+4x^4+4x^2}&\frac{-x^4-2x^2-1}{x^5+4x^3+4x}&\frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^6+4x^4+4x^2}\\ 0&0&\frac{1}{x^3+2x}&\frac{x^2+1}{x^2+2}&\frac{-x^4-2x^2-1}{x^3+2x}\\ 0&0&0&-x&x^2+1\\ 0&0&0&x^2+1&-x^3-2x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(5)}(x) = x \cdot \bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(3)}(x) = x \begin{bmatrix} x^3+2x&x^2+1&0&0&0\\ 0&x^3+2x&x^2+1&0&0\\ 0&0&x^3+2x&x^2+1&0\\ 0&0&0&x^3+2x&x^2+1\\ 0&0&0&x^2+1&x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2+1&x&0&0&0\\ 0&x^2+1&x&0&0\\ 0&0&x^2+1&x&0\\ 0&0&0&x^2+1&x\\ 0&0&0&x&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0&0\\ 0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0&0\\ 0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x&0\\ 0&0&0&x^4+3x^2+1&x^3+2x\\ 0&0&0&x^3+2x&x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_5^{(5)}(x)) = x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{-(5)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^3-2x}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}&\frac{x^6+4x^4+4x^2}{x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1}&\frac{-x^{11}-7x^9-18x^7-20x^5-8x^3}{x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1}&\frac{x^{12}+8x^{10}+24x^8+32x^6+16x^4}{x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1}\\ 0&\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^3-2x}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}&\frac{x^8+5x^6+8x^4+4x^2}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}&\frac{-x^9-6x^7-12x^5-8x^3}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}\\ 0&0&\frac{1}{x^4+3x^2+1}&\frac{-x^5-3x^3-2x}{x^4+3x^2+1}&\frac{x^6+4x^4+4x^2}{x^4+3x^2+1}\\ 0&0&0&x^2+1&-x^3-2x\\ 0&0&0&-x^3-2x&x^4+3x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(6)}(x) = x\cdot\bar{\bar{Q}}_5^{(5)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(4)}(x) =$$

$$= x\begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2+1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\bar{Q}}_5^{(6)}(x)) = -(x^{15}+12x^{13}+57x^{11}+136x^9+171x^7+108x^5+27x^3);$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{-(6)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-x^4-3x^2-1}{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1} & \frac{x^8+6x^6+11x^4+6x^2+1}{x^{15}+12x^{13}+57x^{11}+136x^9+171x^7+108x^5+27x^3} & \frac{x^{14}+11x^{12}+48x^{10}+105x^8+120x^6+69x^4+19x^2+2}{x^{14}+12x^{12}+57x^{10}+136x^8+171x^6+108x^4+27x^2} & \frac{-x^{16}-12x^{14}-58x^{12}-144x^{10}-195x^8-144x^6-58x^4-12x^2-1}{x^{15}+12x^{13}+57x^{11}+136x^9+171x^7+108x^5+27x^3} \\ 0 & \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{-x^4-3x^2-1}{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2} & \frac{-x^{10}-8x^8-23x^6-28x^4-13x^2-2}{x^9+8x^7+22x^5+24x^3+9x} & \frac{x^{12}+9x^{10}+30x^8+45x^6+30x^4+9x^2+1}{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^5+4x^3+3x} & \frac{x^6+5x^4+7x^2+2}{x^4+4x^2+3} & \frac{-x^8-6x^6-11x^4-6x^2-1}{x^5+4x^3+3x} \\ 0 & 0 & 0 & -x^3-2x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \end{bmatrix};$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{(7)}(x) = x\cdot\bar{\bar{Q}}_5^{(6)}(x) + \bar{\bar{Q}}_5^{(5)}(x) = x\begin{bmatrix} x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & x^3+2x \\ 0 & 0 & 0 & x^3+2x & x^2+1 \end{bmatrix} = \quad (21^*)$$

$$= \begin{bmatrix} x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^6+5x^4+6x^2+1 & x^5+4x^3+3x \\ 0 & 0 & 0 & x^5+4x^3+3x & x^4+3x^2+1 \end{bmatrix}; \det(\bar{\bar{Q}}_5^{(7)}(x)) = x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+399x^6+123x^4+18x^2+1;$$

$$\bar{\bar{Q}}_5^{-(7)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^5-4x^3-3x}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} & \frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}{x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+399x^6+123x^4+18x^2+1} & \frac{-x^{19}-15x^{17}-94x^{15}-319x^{13}-636x^{11}-757x^9-522x^7-189x^5-27x^3}{x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+399x^6+123x^4+18x^2+1} & \frac{x^{20}+16x^{18}+108x^{16}+400x^{14}+886x^{12}+1200x^{10}+972x^8+432x^6+81x^4}{x^{18}+15x^{16}+93x^{14}+308x^{12}+588x^{10}+651x^8+399x^6+123x^4+18x^2+1} \\ 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^5-4x^3-3x}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} & \frac{x^{14}+11x^{12}+47x^{10}+98x^8+103x^6+51x^4+9x^2}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} & \frac{-x^{15}-12x^{13}-57x^{11}-136x^9-171x^7-108x^5-27x^3}{x^{12}+10x^{10}+37x^8+62x^6+46x^4+12x^2+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{-x^9-7x^7-16x^5-13x^3-3x}{x^6+5x^4+6x^2+1} & \frac{x^{10}+8x^8+22x^6+24x^4+9x^2}{x^6+5x^4+6x^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & x^4+3x^2+1 & -x^5-4x^3-3x \\ 0 & 0 & 0 & -x^5-4x^3-3x & x^6+5x^4+6x^2+1 \end{bmatrix};$$

тобто він є відповідним поліномом Фібоначчі (n–1)-го степеня, який враховує знак парності n, що зовсім відрізняється від формули (10). Всі обернені поліноміальні $\bar{\bar{Q}}_3^{-(\cdot)}(x)$ -матриці Фібоначчі відповідають матричному виразу (17). Правильність отримання як поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_3^{(\cdot)}(x)$ -матриць Фібоначчі, так і їхніх обернених еквівалентів перевірена матричним виразом (19) для 2-ої поліноміальної матриці, внаслідок виконання якого отримано одиничну матрицю.

2.3. ***Механізм утворення послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі*** **4-***го порядку*. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_4^{(\cdot)}(x)$ -матриць Фібоначчі 4-го порядку, їхніх визначників і відповідно обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_4^{-(\cdot)}(x)$ -матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (20) і (20*) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_4^{(n)}(x)$ -матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі від (n–1)-го до (n–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$).

Оскільки тут маємо справу з матрицями Фібоначчі 4-го порядку, то для обчислення їхніх визначників доводиться використовувати спеціальні математичні методи [26]. Наприклад, шляхом рекурсивного обчислення визначників через пониження їхнього порядку, який називають розширенням Лапласа, за допомогою алгоритму Барейса (англ. *Bareiss algorithm*) чи формули Лейбніца (англ. *Leibniz formula*). Нагадаємо, алгоритм Е. Барейса – алгоритм обчислення визначника матриці з цілочисельними її елементами шляхом приведення її до ступінчастого вигляду за допомогою винятково цілочисельної арифметики. Тут під цілочисельними елементами розуміють як числові, так і буквені значення елементів матриці, в т.ч. й математичні вирази. Будь-яке ділення, що виконує алгоритм, гарантує точне ділення без залишку. Алгоритм можна використати для обчислення визначника матриці з (приблизними) дійсними елементами, що вилучає помилки округлення, за винятком помилок, що вже присутні у вхідних даних.

Для обчислення оберненої поліноміальної матриці Фібоначчі 4-го і більших порядків також доводиться використовувати відповідні математичні методи [26], такі як метод Монтанте, метод елімінації Гауса-Джордана (англ. *Gauss-Jordan elimination*), а також за допомогою ад'югованої матриці (англ. *Adjugate matrix*). Наприклад, метод Монтанте – метод лінійної алгебри, призначений для розв'язання системи лінійних рівнянь, знаходження обернених матриць та визначників. Метод названо в честь його першовідкривача Рене Маріо Монтанте Пардо (англ. *Rene Mario Montante Pardo*). Його головна особливість – працює, використовуючи винятково цілочисельну арифметику для цілочисельних чи символьних матриць, що дає змогу отримувати точні результати в комп'ютерних реалізаціях.

Всі зазначені вище методи та алгоритми детально описано в мережі Інтернет, тому в цьому дослідженні не будемо на них зосереджувати увагу.

2.4. ***Механізм утворення послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі*** **5-***го порядку*. Розглянемо алгоритм побудови послідовності перших 8-ми поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_5^{(\cdot)}(x)$ -матриць Фібоначчі 5-го порядку, їхніх визначників і відповідно обернених поліноміальних $\bar{\bar{Q}}_5^{-(\cdot)}(x)$ -матриць Фібоначчі. З наведених матричних виразів (21) і (21*) видно, що елементами n-ої поліноміальної $\bar{\bar{Q}}_5^{(n)}(x)$ -матриці Фібоначчі є відповідні поліноми Фібоначчі від (n–1)-го до (n–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$).

Отже, розроблено метод генерування послідовності з n-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі від (n–1)-го до (n–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div m\}$). Оскільки поліноміальні матриці Фібоначчі часто використовують для реалізації операцій шифрування даних, то для розшифрування даних також потрібно мати аналогічні поліноміальні оберненні матриці, для отримання яких потрібно застосувати загальний підхід. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати не тільки послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, але й знаходити їхні визначники та обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку.

Під час розроблення ПЗ виникли проблеми чисто математичного характеру. Справа в тому, що навіть під час генерування 5-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 2-го порядку отримуємо поліноми 4-го степеня, утворені внаслідок множення змінної x на 4-ту поліноміальну матрицю, та додати 3-ту матрицю, де знаходяться поліноми дещо нижчих степенів. Для їх правильного подання доводиться спочатку перемножувати відповідні поліноми нижчих степенів, потім отриманий результат треба додати і спростити. Інша проблема, це обчислення визначників матриць, починаючи з 4-го та вищих порядків, де доводиться використовувати спеціальні математичні методи [26], наприклад алгоритм Барейса (англ. *Bareiss algorithm*) чи формулу Лейбніца (англ. *Leibniz formula*). Наступна математична проблема, це обчислення оберненої матриці, для вирішення якої також доводиться використовувати відповідні математичні методи [26], такі як метод Монтанте (англ. *Montante method*), метод елімінації Гауса-Джордана (англ. *Gauss-Jordan elimination*) та за допомогою ад'югованої матриці (англ. *Adjugate matrix*). І остання проблема – уважність запису n-ої поліноміальної матриці Фібоначчі m-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі не більше (n–1)-го степеня, насамперед тих, які стосуються матриць вищих порядків і поліномів більших степенів. Адже запис не того степеня змінної, неправильного значення коефіцієнта при ній чи його знаку – подальша робота даремна.

3. Матричний метод шифрування блокових даних поліноміальними матрицями Фібоначчі. Розглянемо особливості реалізації матричного методу шифрування даних поліноміальними матрицями Фібоначчі m-го порядку [22, 31, 47]. Щоб використовувати цей метод, початкове повідомлення потрібно подати у вигляді квадратної $\bar{\bar{M}}$ -матриці m-го порядку, яку називають *матрицею повідомлення*. Немає обмежень щодо подання такого повідомлення [8], тому користувачеві залишається визначати розташування елементів повідомлення у матриці – рядками чи стовпцями. Наприклад, вхідне повідомлення "*Kryptokey*" можна подати матрицею 3-го порядку, заповнюючи її поелементно рядками, паралельно вказуючи їхні числові значення згідно з таблицею кодів символів ASCII:

$$\bar{\bar{M}} = \begin{bmatrix} K & r & y \\ p & t & o \\ k & e & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 75 & 114 & 121 \\ 112 & 116 & 111 \\ 107 & 101 & 121 \end{bmatrix}.$$

Після узгодження між відправником і одержувачем цілого числа $x \neq 0$ та n-ої поліноміальної матриці Фібоначчі m-го порядку, відповідну матрицю шифрування даних вибирають з виразів (16), (19), (20) чи (21), наведених вище. Потім цю матрицю потрібно помножити справа на матрицю повідомлення $\overline{\overline{M}}$, щоб отримати матрицю зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$. Наприклад, для $m = 3$, $n = 3$ та $x = 4$ маємо:

$$\overline{\overline{Q}}_3^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 \\ 0 & x^2+1 & x \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}; \overline{\overline{Q}}_3^{(3)}(4) = \begin{bmatrix} 17 & 4 & 0 \\ 0 & 17 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{Q}}_3^{(3)}(4) \times \overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 17 & 4 & 0 \\ 0 & 17 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 75 & 114 & 121 \\ 112 & 116 & 111 \\ 107 & 101 & 121 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1723 & 2402 & 2501 \\ 2332 & 2376 & 2371 \\ 555 & 565 & 565 \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$ надсилають каналом зв'язку рядками в порядку e_1, e_2, ..., e_9, за якими слідує окремо значення її визначника $\det(\overline{\overline{Q}}_3^{(3)}(4) = x^2 + 1 = 17$.

Припускаючи, що передана послідовність чисел отримана без помилок, тоді, шляхом множення оберненої $\overline{\overline{Q}}_3^{-(3)}(x)$-матриці Фібоначчі на матрицю зашифрованого повідомлення $\overline{\overline{E}}$, отримують початкову матрицю повідомлення, а саме:

$$\overline{\overline{Q}}_3^{-(3)}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+1} & \frac{-x}{x^2+1} & \frac{x^2}{x^2+1} \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & -x & x^2+1 \end{bmatrix};$$

$$\overline{\overline{Q}}_3^{-(3)}(4) = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}2353 & 0{,}94118 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{Q}}_3^{-(3)}(4) \times \overline{\overline{E}} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}2353 & 0{,}94118 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1723 & 2402 & 2501 \\ 2332 & 2376 & 2371 \\ 555 & 565 & 565 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 114 & 121 \\ 112 & 116 & 111 \\ 107 & 101 & 121 \end{bmatrix}.$$

З огляду на викладене вище, констатуємо факт наведення матричного методу шифрування даних на підставі поліноміальної матриці Фібоначчі, в якому для матриці вхідного повідомлення над алфавітом {0, 1,..., 255} і для цілого числа $x = 4$ використано $\overline{\overline{Q}}_3^{(3)}(4)$-матрицю Фібоначчі 3-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі від 2-го до 1-го степеня. Для отримання визначника матриці використано формулу Лейбніца, а для знаходження оберненої матриці застосовано метод Монтанте (англ. *Montante method*).

Отже, показана можливість вирішення проблеми генерування n-ої послідовності поліномів Фібоначчі n-го степеня, які є основою для шифрування блокових даних, що дає можливість здійснювати ефективний їх захист. Розроблено метод генерування послідовності з n-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі m-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі від $(n–1)$-го до $(n–3)$-го степеня, який, на відміну від відомих методів, використовує матричне рекурентне співвідношення, аналогічне рекурентному співвідношенню для генеруванню чисел Фібоначі, а за отриманими матрицями можна знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці відповідного порядку. На конкретному прикладі показана особливість застосування матричного методу шифрування блокових даних з використанням 3-ої поліноміальної матриці Фібоначчі 3-го порядку.

Обговорення результатів дослідження. Числа Фібоначчі є популярною темою для збагачення дослідників математичними знаннями і їхньої популяризації серед них [63]. У математиці поліноми Фібоначчі – це поліноміальна послідовність, яку розглядають як узагальнення чисел Фібоначчі [22]. Водночас, різні послідовності поліномів під загальною назваю поліноми Фібоначчі трапляються в науковій літературі хоча і давно, позаяк тісно пов'язані між собою, проте вони не так широко досліджені, як відповідні послідовності чисел Фібоначчі. Зазначені поліноми з'являються в різних областях застосування, в тому числі й для шифрування даних, насамперед матричним методом.

У роботі [19] наведено поліноміальні матриці Фібоначчі–Гессенберга з визначником у вигляді полінома Фібоначчі. Авторами введено поняття двовимірного масиву поліномів Фібоначчі та наведено три класи поліноміальних матриць Фібоначчі–Гессенберга, що задовольняють їхнім властивостям.

У роботі [15] наведено деякі формули для утворення двовимірних поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також відповідний набір тотожностей, використовуючи для цього матричний підхід. Також сформульовано властивості таких двовимірних поліномів, де змінні x та y є їхніми складовими, за допомогою яких можна отримати безліч комбінаторних тотожностей.

У роботі [73] наведено деякі нові результати утворення узагальнених двовимірних поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також відповідні нові тотожності, отримані за допомогою цих поліномів. Для таких поліномів досліджено декілька біноміальних підсумків і наведено відповідні формули для отримання як коефіцієнтів поліномів, так і суми степенів. Також наведено загальні формули для отримання відповідних підсумків, різних твірних функцій та співвідношень між цими поліномами.

У роботі [74] розглянуто спеціальні перетворення узагальнених двовимірних поліномів Фібоначчі та Лукаса. Результати дослідження стосуються біноміальних перетворень Каталана та Ганкеля щодо таких поліномів. Також наведено деякі корисні результати, такі як генерувальні функції, формули Біне, підсумовування результатів перетворень, визначених за допомогою рекурентних співвідношень для цих поліномів. Окрім цього, деякі важливі співвідношення між цими перетвореннями виведено за допомогою нових формул, отриманих авторами, а також виведено відповідні формули Каталана, Кассіні, Вайди та д'Оканя для цих перетворень.

У роботі [58] розглянуто повні однорідні симетричні функції для поліномів Гаусса-Фібоначчі та двовимірних поліномів Пелла. Автори ввели симетричну функцію, щоб отримати нові функції, що утворюють двовимірні поліноми Пелла-Лукаса. Вони визначили повні однорідні симетричні функції та надали генерувальні функції для поліномів Гаусса-Фібоначчі [2], поліномів Гаусса-Лукаса, двовимірних поліномів Фібоначчі, Лукаса, Якобсталя та Якобсталя-Лукаса.

У роботі [14] розглянуто генерувальні функції для модифікованих чисел Пелла та двовимірних комплексних поліномів Фібоначчі. Автори ввели оператор, щоб отримати нові функції, що утворюють модифіковані k-

числа Пелла, а такожмодифіковані числа Пелла за Гауссом. Використовуючи визначений ними оператор, вони надали деякі нові генерувальні функції для двовимірних комплексних поліномів Фібоначчі та Лукаса, модифікованих поліномів Пелла та Пелла за Гауссом.

У роботі [27] наведено тотожності Фібоначчі та Лукаса, отримані з матриць Тепліца–Гессенберга. Автори розглянули визначники для деяких сімейств матриць Тепліца–Гессенберга, що мають різні подання чисел Фібоначчі та Лукаса для ненульових елементів. Формули цих визначників можна також подати як тотожності, що містять суми добутків чисел Фібоначчі та Лукаса, а також їхніх мультиноміальних коефіцієнтів. У дослідженні наведено результат комбінаторного доведення декількох визначників, які використовують знакозмінні інволюції та визначення визначника як суми зі знаком над симетричною групою. Це призвело до загального узагальнення формул Фібоначчі та Лукаса в термінах так званих чисел Гібоначчі.

У роботі [46] проаналізовано 2-поліноми Фібоначчі в сімействі чисел Фібоначчі. Автори визначають нові 2-поліноми Фібоначчі, використовуючи терміни нового сімейства чисел Фібоначчі, наведені в роботі [33]. Вони показали, що існує зв'язок між коефіцієнтом 2-поліномів Фібоначчі та трикутником Паскаля. Наведено деякі тотожності для 2-поліномів Фібоначчі, результати порівняння 2-поліномів з відомими поліномами Фібоначчі. Вони виразили 2-поліноми Фібоначчі через поліноми Фібоначчі, а також довели деякі теореми, пов'язані з поліномами. Окрім цього, автори ввели відповідні похідні від 2-поліномів Фібоначчі.

У роботі [1] наведено нові результати для двох узагальнених класів поліномів Фібоначчі та Лукаса, а також особливості їх використання у скороченні деяких радикалів. Автори вважають, що вони розробили нові формули для обчислення зв'язків між двома узагальненими класами поліномів Фібоначчі та Лукаса. Вказано, що гіпергеометричні функції виду ${}_2F_1(z)$ входять до всіх коефіцієнтів зв'язку для конкретного значення z. Декілька нових формул зв'язку між деякими відомими поліномами, такими як поліноми Фібоначчі, Лукаса, Пелла, Ферма, Пелля–Лукаса та Ферма–Лукаса, вони вивели як окремі випадки похідних формул зв'язку. Деякі з наведених авторами формул також узагальнюють деякі з відомих у наявній літературі. Як можливість застосування двох похідних формул зв'язку наведено деякі нові формули, що зв'язують деякі відомі числа, а також виведено нові формули для певних зважених інтегралів. На підставі використання двох узагальнених класів поліномів Фібоначчі та Лукаса розроблено нові формули зведення деяких парних і непарних радикалів.

У роботі [65] розглянуто алгоритм перетворення Каталона для послідовності *k*-Пелла, послідовності *k*-Пелла–Лукаса та модифікованої послідовності *k*-Пелла, а також досліджено властивості цих послідовностей. Автори застосовували перетворення Ганкеля (англ. *Hankel Transform*) до перетворень Каталана для зазначених послідовностей. Також вони отримали породжувальні функції перетворення Каталана для відповідних послідовностей, а також цікаву характеристику, пов'язану з детермінантом перетворення Ганкеля цих послідовностей.

У роботі [50] наведено ефективний чисельний метод розв'язування дробових диференціальних рівнянь (ДДР), заснований на поліномах Фібоначчі. Встановлено, що послідовність чисел Фібоначчі важлива через так звану золоту пропорцію, яка описує відповідні передбачувані моделі. Водночас, для поліномів Фібоначчі, пов'язаних безпосередньо з числами Фібоначчі, автор розширює можливості їхнього застосування, насамперед для розв'язання дробових диференціальних рівнянь FDE (англ. *Fractional Differential Equations)* та їхніх систем SFDE (англ. *System of Fractional Fractional Differential Equations*). За допомогою дробового інтегрального оператора Рімана–Ліувіля для гібридної функції дробового порядку блочно-імпульсних функцій і поліномів Фібоначчі, розглянутий розв'язок ДДР (FDE та SFDE) зводиться до формування системи алгебричних рівнянь, яку можна розв'язати ітераційним методом Ньютона. Дробовий порядок змінних отримують шляхом їх перетворення з x в x^{α}, де $\alpha > 0$. Порівняно з іншими моделями, запропонований авторами чисельний метод розв'язання ДДР у деяких випадках кращий на 12 порядків. Були ситуації, коли автори отримували дещо точніший розв'язок ДДР порівняно з результатами, отриманими класичними методами. Запропонований авторами чисельний метод розв'язування ДДР виявився простим і ефективним під час розв'язування нелінійних задач із заданими початковими умовами.

У роботі [70] розглянуто узагальнені поліноми Гумберта, отримані через узагальнені поліноми Фібоначчі. Автори визначили узагальнені (p,q)-поліноми Фібоначчі $u_{n,m}(x)$ і узагальнені (p,q)-поліноми Лукаса $v_{n,m}(x)$, а також ввели узагальнені поліноми Гумберта $u_{n,m}^{(r)}(x)$ як окремі згортки $u_{n,m}(x)$. Також дослідники навели багато виразів, їхніх розкладів, рекурентних співвідношень, в т.ч. й диференціальних, що дало їм змогу вивчати матриці та визначники, пов'язані з поліномами $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ та $u_{n,m}^{(r)}(x)$. Автори запропонували алгебричну інтерпретацію для узагальнених поліномів Гумберта $u_{n,m}^{(r)}(x)$, де було вказано, що різні добре відомі поліноми є окремими випадками узагальнених поліномів $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ або $u_{n,m}^{(r)}(x)$. Ввівши узагальнені поліноми $u_{n,m}(x)$, $v_{n,m}(x)$ і $u_{n,m}^{(r)}(x)$, автори отримали єдиний підхід до роботи з багатьма спеціальними поліномами, відомими в наявній літературі.

У роботі [45] наведено новий метод шифрування даних з використанням Q-матриць Фібоначчі, заснований на матрицях заблокованих повідомлень. Головною перевагою такого методу є шифрування кожної матриці вхідного повідомлення ключами різної величини [35, 37]. Як стверджують автори, такий підхід не тільки підвищує безпеку зашифрованих повідомлень від криптографічних атак [29, 36], але й має високу коригувальну здатність, однак не вказують, чим саме чи як саме це забезпечується.

У роботі [9] запропоновано нову теорію шифрування даних з використанням m-розширення p-чисел Фібоначчі. Автори навели квадратну $G_{p,m}$-матрицю Фібоначчі, де $p \geq 0$ є цілим невід'ємним числом і $m>0$. Також описали різні властивості $G_{p,m}$-матриці, яка є основою теорії шифрування даних, встановили зв'язки між елементами цієї матриці для різних значень p і m. Вони показали, що співвідношення між елементами $G_{p,m}$-матриці для різних значень p і $m = 1$ збігаються з відношенням між елементами матриці шифрування для різних значень числа p [7]. Загалом, достовірність запропоно-

ваного методу зростає зі збільшенням цього значення, але вона не залежить від значення m.

У роботі [7] розроблено узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних числами Фібоначчі. Автори розглядали клас квадратної матриці Фібоначчі (p+1)-порядку, елементи якої базуються на p-числах Фібоначчі з визначником, що становить ±1. Вони стверджують, що існує зв'язок між числами Фібоначчі з початковими членами, який відомий як формула Кассіні, а саме: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $n \geq 1$. Було встановлено, що послідовність чисел Фібоначчі та золотий переріз мають важливе значення під час побудови відносно нової теорії простору-часу, яка відома як E-теорія нескінченності. Оригінальний метод шифрування даних числами Фібоначчі випливає з аналогічних матриць, де відомим залишається зв'язок між її елементами для випадку p = 1 [63]. Також автори встановили узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних для різних значень p. Наприклад, для p = 2 достовірність запропонованого методу становить 99,80 % і зростає зі збільшенням цього значення.

У роботі [63] розроблено матрицю Фібоначчі, наведено узагальнення формули Кассіні та нову теорію шифрування даних. Автори розглядали новий клас квадратних матриць розміром (p+1)×(p+1), елементами яких були p-числа Фібоначчі (p = 0, 1, 2, 3, …), а їхній визначник становить ±1. Ця унікальна властивість матриць Фібоначчі приводить до узагальнення формули Кассіні. Запропонований оригінальний метод шифрування даних числами Фібоначчі випливає з аналогічних матриць n-порядку. На відміну від класичних надлишкових кодів основною особливістю запропонованого методу є те, що він дає змогу коригувати зашифровані елементи матриці, які теоретично можуть бути необмеженими цілими числами. Для найпростішого випадку коригувальна здатність цього методу становить 93,33 %, що значно перевищує відомі коригувальні можливості інших методів.

У роботі [21] наведено новий клас кодів з можливістю виправлення помилок на підставі послідовності чисел Фібоначчі. Запропоновано клас квадратних M_p^n-матриць n-го степеня p-го порядку для шифрування даних і запропоновано методику контролю за появою помилок. Це значно розширює результати попередніх досліджень [63] щодо методів коригування помилок, виникнення яких зумовлене передачею каналами зв'язку зашифрованих повідомлень. Автори вважають, що для цілого числа p можна згенерувати двійкову M_p^n-матрицю n-го степеня розміром (p+1)×(p+1), ненульові елементи якої розташовані або на супердіагоналі, або в останньому рядку матриці. Звичайну M_p^n- та обернену M_p^{-n}-матриці n-го ступеня використовують як матриці шифрування та дешифрування даних відповідно. Також вони показали, що для достатньо великих значень n, незалежно від значень елементів матриці повідомлення M_p, між елементами зашифрованої матриці існують зв'язки $E_p = M_p \times M_p^n$. Ці відносини мають важливе значення під час виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях.

У роботі [54] розглянуто узагальнені співвідношення між елементами матриці шифрування даних, запропоновано нову комплексну $H_{p,n}$-матрицю Фібоначчі, елементами якої є відповідні числа. Розроблено метод шифрування даних, що випливає з цієї комплексної $H_{p,n}$-матриці Фібоначчі, а також встановлено зв'язки між її елементами. Запропоновано підхід до виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях, що ґрунтується на потребі розв'язування діофантових рівнянь.

У роботі [22] розроблено метод шифрування даних на підставі поліномів Фібоначчі з можливістю виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях. Для цілих чисел $m \geq 2$, $x \geq 1$ і $n \geq 1$ розроблено Q_m^n-матрицю n-го степеня розміром $m \geq m$, яку названо $Q_m^n(x)$-матрицю шифрування даних, елементами якої є поліноми Фібоначчі. Для дешифрування даних автори наводять обернену $Q_m^{-n}(x)$-матрицю, особливість якої у тому, що їхній визначник становить ±1. Наведено простий критерій виявлення помилок і відповідний метод їх виправлення для цього класу матриць. Також показано, що ймовірність появи помилок у зашифрованих повідомленнях майже нульова за досить великих значень m. Наведено наочні приклади шифрування даних, а також різні випадки виявлення та виправлення помилок у зашифрованих повідомленнях.

У роботі [20] розроблено новий метод шифрування даних на підставі поліномів Фібоначчі з високою швидкістю їх генерування. Для цілих чисел m, n і $x \geq 1$ можна згенерувати квадратну $Q_{2m}^n(x)$-матрицю n-го степеня $2m$-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі, і відповідну обернену $Q_{2m}^{-n}(x)$-матрицю для їх дешифрування [34, 35, 37]. Також показано, що швидкість шифрування даних за допомогою цих матриць значно вища, ніж з оригінальними матрицями на підставі звичайних чисел Фібоначчі.

У роботі [51] запропоновано нову теорію шифрування даних на ($h(x)$, $g(y)$)-розширенні поліномів p-числами Фібоначчі. Визначено також золоті (p, $h(x)$, $g(y)$)-пропорції, де $p \geq 0$ – цілі числа, $h(x) > 0$, $g(y) > 0$ – поліноми з дійсними коефіцієнтами. Встановлено, що співвідношення між елементами квадратної $G_{p,h,g}$-матриці Фібоначчі повністю збігаються зі співвідношеннями між елементами матриці шифрування для різних значень p і поліномів $h(x) = m$ і $g(y) = t$ [10]. Також співвідношення між елементами матриці шифрування для поліномів $h(x) = 1$ і $g(y) = 1$ збігаються з узагальненими співвідношеннями між елементами матриці шифрування числами Фібоначчі [7]. Завдяки відповідному вибору початкових членів у ($h(x)$, $g(y)$)-розширенні поліномів p-числами Фібоначчі квадратну $G_{p,h,g}$-матрицю можна застосувати для шифрування даних різної величини. Під час обговорення результатів дослідження автори стверджують, що достовірність їхнього методу зростає зі збільшенням значення p, але вона не залежить від значень поліномів $h(x)$ і $g(y)$, які значно підвищують криптографічну стійкість зашифрованих повідомлень [28]. Встановлено, що складність цього методу зростає зі збільшенням степеня поліномів $h(x)$ і $g(y)$. Також знайдено зв'язок між золотою (p, $h(x)$, $g(y)$)-пропорцією, між золотою (p, $h(x)$)-пропорцією та між золотою p-пропорцією.

У роботі [55] розглянуто особливості реалізації криптографічних перетворень з використанням узагальнених матриць Фібоначчі з Афінним шифром Хілла.

Автори запропонували криптографію з відкритим ключем із використанням Афінного шифру Хілла та узагальненої матриці Фібоначчі, яку ще називають матрицею мультиначчі (англ. *Multinacci Matrix*). Також запропоновано схему встановлення ключа (обміну матрицею ключів $K = Q_\lambda^k$ порядку λ×λ для шифрування-дешифрування) за допомогою послідовностей матриць мультиначчі під простим модулем. У цій схемі замість обміну матрицею ключів потрібно обмінятися тільки парою чисел (λ, *k*), що зменшує часову складність передачі даних, а також складність простору обміну ключами та забезпечує великий простір їхнього генерування.

У роботі [18] розглянуто особливості супершифрування даних з матрицями та графіками Пелла-Лукаса через перетворення Лапласа. Автори пропонують новий метод шифрування даних під назвою багатофазне шифрування (англ. *Multiphase Encryption*). Цей метод шифрує вхідні дані декілька разів за допомогою різних потужних алгоритмів шифрування на кожному етапі. Метод багатофазного шифрування використовує властивості дерев теорії графів, матриць Пелла-Лукаса та шифру Віженера, що значно підвищує криптографічну стійкість алгоритму шифрування. Нову методику супершифрування даних з використанням перетворень Лапласа через числа Фібоначчі, використовуючи властивості дерев теорії графів за допомогою шифру Бофорта (англ. *Beaufort Cipher*), часто застосовують для шифрування простого тексту, який є більш безпечним, ніж симетрична криптосистема, оскільки звичайний текст можна зашифрувати у багато шарів.

У роботі [71] розглянуто алгоритми симетричного шифрування даних у поліноміальній системі числення залишків. Автори вперше розробили теоретичні положення щодо реалізації симетричних криптографічних алгоритмів на підставі поліноміальної системи числення залишків RNS (англ. *Residue Numeral System*). Основною особливістю запропонованого підходу є те, що при відновленні полінома за методом невизначених коефіцієнтів (англ. *Method of Undetermined Coefficients*) операцію множення виконують не на знайдених базисних числах, а на довільно вибраних поліномах. такі поліноми разом із попарно взаємно простими залишками системи класів залишків (англ. *Residue Class System*) слугують ключами криптографічного алгоритму. Наведено схеми та приклади реалізації розробленого поліноміального симетричного алгоритму шифрування даних. Побудовано аналітичні вирази для оцінювання криптографічної стійкості алгоритму та наведено їх графічну залежність від кількості модулів і степенів полінома. Результати дослідження показують, що криптоаналіз запропонованого алгоритму має комбінаторну складність, що призводить до вирішення NP-повної задачі.

Проаналізовані вище роботи стосовно наявних підходів до процедур генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі, а також можливості їхнього використання для шифрування блокових даних вказали на те, що навіть за останнє десятиліття виконано багато різноманітних досліджень, в кожному з яких тією чи іншою мірою обґрунтовано різні підходи до їхнього генерування, проте не наведено приклади їхнього конкретного вигляду, однак доведено доцільність їх використання для шифрування блокових даних. Водночас було з'ясовано, що як окрема процедура захисту блокових даних поліноміальними матрицями Фібоначчі в теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко. Тому проведене нами дослідження щодо розроблення ефективного методу генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, наведення робочих прикладів їхнього конкретного вигляду, а також встановлення певних особливостей їх використання для шифрування блокових даних тільки як локального методу є частковим вирішенням цієї актуальної проблеми, що й було продемонстровано в цьому дослідженні.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено метод генерування послідовності з *n*-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі від (*n*–1)-го до (*n*–3)-го степеня, який, на відміну від відомих методів, використовує матричне рекурентне співвідношення, аналогічне рекурентному співвідношенню для генеруванню чисел Фібоначі, а за отриманими матрицями Фібоначчі можна знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці відповідного порядку.

Практична значущість результатів дослідження – розроблений метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі, а також запропоновані методи знаходження їх визначників і обернених матриць можна застосовувати в матричному методі шифрування блокових даних, що загалом дасть можливість ефективно передавати каналами зв'язку блокові повідомлення різної величини.

Висновок / Conclusions

Розроблено метод генерування послідовності з *n*-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі від (*n*–1)-го до (*n*–3)-го степеня, який дає можливість знаходити як їхні визначники, так і обернені матриці, придатні для матричного методу шифрування блокових даних. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проаналізовано останні дослідження та публікації, внаслідок чого з'ясовано складність проблеми генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку як основу для шифрування блокових даних, що дасть змогу здійснювати ефективний їх захист. З'ясовано, що навіть за останнє десятиліття надруковано значну кількість публікацій, в кожній з яких обґрунтовано різні підходи як до генерування послідовностей таких поліномів і поліноміальних матриць Фібоначчі, так і доведено доцільність їх використання для шифрування даних. Водночас, застосування поліномів і поліноміальних матриць Фібоначчі як окремої процедури для захисту відповідно потокових і блокових даних у теорії та практиці криптографії трапляється вкрай рідко.

2. Наведено традиційні способи подання так званих поліномів Фібоначчі, що мають багато корисних властивостей, використано тільки ті із них, які можна застосувати для генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку. Встановлено, що метод генерування послідовності поліномів Фібоначчі полягає у використанні рекурентного співвідношення, згідно з яким наступний поліном утворюють шляхом множення змінної *x* послідовно на елементи поточного

полінома, після чого групують схожі доданки з доданками попереднього полінома.

3. Розроблено метод генерування послідовності з *n*-ої кількості поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, елементами яких є поліноми Фібоначчі від (*n*–1)-го до (*n*–3)-го степеня, який дає можливість знаходити не тільки їхні визначники, але й обернені матриці, які можна застосувати у матричному методі шифрування блокових даних. Встановлено, що метод генерування послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі полягає у використанні рекурентного матричного співвідношення, згідно з яким наступну поліноміальну матрицю утворюють шляхом множення змінної *x* послідовно на елементи поточної матриці, якими є відповідні поліноми Фібоначчі, додавання елементів утвореної матриці до елементів попередньої матриці, після чого у кожному з її утворених елементів групують усі схожі доданки.

4. Наведено алгоритми утворення послідовності з 8-ми поліноміальних матриць Фібоначчі 2-го, 3-го, 4-го і 5-го порядків, елементами яких стали поліноми Фібоначчі від (*n*–1)-го до (*n*–3)-го степеня ($\forall n \in \{3 \div 8\}$), що дало змогу проаналізувати не тільки особливості їхньої побудови загалом, але й усвідомити процедури знаходження їх визначників і обернених матриць зокрема. Розроблено ПЗ, яке дає змогу генерувати як послідовності поліноміальних матриць Фібоначчі *m*-го порядку, так і знаходити їхні визначники та обернені поліноміальні матриці аналогічного порядку.

5. Наведено приклад застосування матричного методу шифрування блокових даних поліноміальною матрицею Фібоначчі, що дає змогу зацікавленому читачу зрозуміти основний принцип шифрування як початкового повідомлення, так і розшифрування зашифрованого повідомлення. У наведеному прикладі для матриці вхідного повідомлення над алфавітом {0, 1,..., 255} і для цілого числа $x = 4$ використано 4-ту поліноміальну матрицю Фібоначчі 3-го порядку, елементами якої є поліноми Фібоначчі від 3-го до 1-го степеня. Для отримання визначника матриці використано формулу Лейбніца, а для знаходження оберненої матриці застосовано метод Монтанте (англ. *Montante method*).

6. За результатами виконаного дослідження зроблено обґрунтовані висновки та надано відповідні рекомендації щодо їх практичного використання як основи для шифрування блокових даних, що дає змогу ефективно передавати каналами зв'язку відповідні повідомлення різної величини.

References

1. Abd-Elhameed, Waleed Mohamed, Philippou, Andreas N., & Zeyada, Nasr Anwer. (2022). Novel Results for Two Generalized Classes of Fibonacci and Lucas Polynomials and Their Uses in the Reduction of Some Radicals. *Mathematics*, 10(13), article ID 2342. https://doi.org/10.3390/math10132342
2. Asci, M., & Gurel, E. (2017). Some properties of *k*-order Gaussian Fibonacci and Lucas numbers. *Ars Combinatoria*, 135, 345–356. URI: https://hdl.handle.net/11499/23655
3. Asci, M., & Tasci, D. (2007). On Fibonacci, Lucas and special orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1016/J.CAM.2007.01.026
4. Ashok, G., Ashok Kumar, S., Chaya Kumari, D., & Ramakrishna, M. (2022). A type of public cryptosystem using polynomials and pell sequences. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(7), 1951–1963. https://doi.org/10.1080/09720529.2022.2133237
5. Ashok, Gudela, Sadasivuni, Ashok Kumar, & Kumari, Dushma. (2023, August). An Approach of Cryptosystem using Polynomials and Lucas Numbers. *Journal of Harbin Engineering University*, 44(8), 25–31. URL: https://www.researchgate.net/publication/372991199_An_Approach_of_Cryptosystem_using_Polynomials_and_Lucas_Numbers
6. Basin, S. L. (1963). The Appearance of Fibonacci Numbers and the Q Matrix in Electrical Network Theory. *Mathematics Magazine*, 36(2), 84–97. https://doi.org/10.2307/2688890
7. Basu, M., & Prasad, B. (2009). The Generalized relations among the code elements for Fibonacci coding theory. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 41, issue 5, 2517–2525. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.030
8. Basu, Manjusri, & Das, Monojit. (2017). Coding theory on generalized Fibonacci *n*-step polynomials. *Journal of Information and Optimization Sciences*, Vol. 38, issue 1, 83–131. https://doi.org/10.1080/02522667.2016.1160618
9. Basu, Manjusri, & Prasad, Bandhu. (2009, November). Coding theory on the *m*-extension of the Fibonacci *p*-numbers. *Chaos, Solitons, & Fractals*, Vol. 42, issue 4, 30, 2522–2530. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.197
10. Basu, Manjusri, & Prasad, Bandhu. (2011). Coding theory on the (*m*,*t*)-extension of the Fibonacci *p*-numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 3, 259–267. https://doi.org/10.1142/S1793830911001097
11. Bednar, Urszula, & Wołowiec-Musiał, Małgorzata. (2020). Distance Fibonacci Polynomials. *Symmetry*, 12(9), 1540 p. https://doi.org/10.3390/sym12091540
12. Berg, Christian. (2011). Fibonacci numbers and orthogonal polynomials. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 17, 75–88. https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2011.01.001
13. Bhatnagar, Shikha, & Sikhwal, Omprakash. (2016, October). Generalized Fibonacci Polynomials and its Propertie. *SCIREA Journal of Mathematics*, Vol. 1, issue 1, 161–174. URL: https://article.scirea.org/pdf/11021.pdf
14. Boughaba, Souhila, Boussayoud, Ali, & Boubellouta, Khadidja. (2019, September). Generating Functions of Modified Pell Numbers and Bivariate Complex Fibonacci Polynomials. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 7(4), 113–116. https://doi.org/10.12691/tjant-7-4-3
15. Catalani, M. (2004). Some formulae for Bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. arXiv:math/0406323. Combinatorics. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0406323
16. Chasnov, Jeffrey R. (2008). Fibonacci numbers and the golden ratio. *The Hong Kong University of Science and Technology*, 87 p. URL: https://www.math.hkust.edu.hk/~machas/fibonacci.pdf
17. Cheon, G. S., Kim, H., & Shapiro, L. W. (2009). A generalization of Lucas polynomial sequence. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 157, no. 5, 920–927. https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.03.034
18. Domada, Triveni, Sadasivuni, Ashok Kumar, Ashok, Gudela, & Kumari, Dushma. (2023, August). Super-Encryption with Pell-Lucas Matrices and Graphs via Laplace Transformations. *Journal of Harbin Engineering University*, 44(8), 975–980. URL: https://harbinengineeringjournal.com/index.php/journal/article/view/992
19. Esmaeili, M., & Esmaeili, M. (2009). Polynomial Fibonacci-Hessenberg matrices. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 41, issue 5, 2820–2827. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.10.012
20. Esmaeili, M., Esmaeili, M., & Gulliver, T. A. (2011). High-rate Fibonacci polynomial codes. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings, St. Petersburg, Russia*, pp. 1921–1924. https://doi.org/10.1109/ISIT.2011.6033886
21. Esmaili, M., Moosavi, M., & Gulliver, T. A. (2017, January). A new class of Fibonacci sequence based error correcting codes. *Cryptography and Communications*, Vol. 9, 379–396. https://doi.org/10.1007/s12095-015-0178-x
22. Esmaili, Mostafa, & Esmaeili, Morteza. (2010). A Fibonacci-polynomial based coding method with error detection and correc-

tion. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 60, issue 10, 2738–2752. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.091
23. Falcon, S., & Plaza, A. (2009, February). On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 39, issue 3, 1005–1019. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.03.007
24. Filipponi, P., & Horadam, A. F. (1991). Derivative Sequences of Fibonacci and Lucas Polynomials. In: Bergum, G. E., Philippou, A. N., Horadam, A. F. (Eds). *Applications of Fibonacci Numbers. Springer*, Dordrecht, (pp. 99–108). https://doi.org/10.1007/978-94-011-3586-3_12
25. Flaut, Cristina, & Savin, Diana. (2017, April). Some remarks regarding generalized Fibonacci-Lucas numbers and generalized Fibonacci-Lucas quaternions. arXiv:1705.00361v2 [math.RA]. https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.00361
26. Fox, William P., & West, Richard D. (2024, September). Numerical Methods and Analysis with Mathematical Modelling (Textbooks in Mathematics). Chapman and Hall/CRC, 424 p. URL: https://www.amazon.com/Numerical-Mathematical-Modelling-Textbooks-Mathematics/dp/1032697237
27. Goy, Taras, & Shattuck, Mark. (2019, December). Fibonacci and Lucas Identities from Toeplitz–Hessenberg Matrices. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 14(2), 699–715. URL: https://www.researchgate.net/publication/337906242_Fibonacci_and_Lucas_Identities_from_Toeplitz-Hessenberg_Matrices
28. Gryciuk, Yurij, Grytsyuk, Pavlo. (2015). Perfecting of the matrix Affine cryptosystem information security. Computer Science and Information Technologies: Proceedings of Xth International Scientific and Technical Conference (CSIT2015), 14–17 September, 2015, (pp. 67–69). https://doi.org/10.1109/stc-csit.2015.7325433
29. Grytsiuk, P. Yu., & Hrytsiuk, Yu. I. (2015). Peculiarities of the implementation of the matrix Affine cryptosystem of information protection. *Scientific Bulletin of UNFU*, 25(5), 346–356. URL: https://nv.nltu.edu.ua/index.php/journal/article/view/1092
30. Hoggat, V. E. Jr. (1969). Fibonacci and Lucas numbers. *Palo Alto* (CA): Houghton-Mifflin. URL: https://www.peliti.org/Notes/fibonacciLucas.pdf
31. Hoggat, V. E., Bicknell, Marjorie. (1973). Roots of fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 11, issue 3, 271–274. https://doi.org/10.1080/00150517.1973.12430825
32. Hoggatt, V. E. Jr., & Lind, D. A. (1968). Symbolic Substitutions in to Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 6, no. 5, 55–74. https://doi.org/10.1080/00150517.1968.12431206
33. Hoggatt, V. E. Jr., Leonard, H. T. Jr., & Philips, J. W. (1971). Twenty-four Master Identities. *The Fibonacci Quarterly*, 9(1), 1–17. URL: https://www.fq.math.ca/Scanned/9-1/hoggatt.pdf; https://doi.org/10.1080/00150517.1971.12431028
34. Hrytsiuk, Yu. I., & Grytsiuk, P. Yu. (2015). Methods and means of generating Fibonacci Q_p-matrices – keys for implementing cryptographic transformations. *Scientific Bulletin of UNFU*, 25(6), 334–351. URL: https://nv.nltu.edu.ua/index.php/journal/article/view/974
35. Hrytsiuk, Yu. I., & Grytsiuk, P. Yu. (2016). Features of generating Fibonacci Q_p-matrices – keys for implementing cryptographic transformations. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Series: Computer Science and Information Technology*, Vol. 843, 251–263. URL: https://vlp.com.ua/node/16094
36. Hrytsiuk, Yu. I., & Grytsiuk, P. Yu. (2016). Features of generating Fibonacci $G_p(\lambda)$-matrices for implementation of cryptographic transformations. *Information extraction and processing: interdepartmental collection of scientific papers*, 43(119), 86–95.
37. Hrytsiuk, Yuriy, & Grytsyuk, Pavlo (2016). Generation of Fibonacci $Q_p(\lambda)$-matrices – keys for data encryption. Information protection and security of information systems: materials of the 5th International Scientific and Technical Conference, (pp. 39–40), June 02–03, 2016, Lviv, Ukraine. Lviv: Lviv Polytechnic State University.
38. Jin, Z. (2018). On the Lucas polynomials and some of their new identities. *Adv Differ Equ*, 126 (2018). https://doi.org/10.1186/s13662-018-1527-9
39. Karaaslan, N. (2019). A Note on Modified Pell Polynomials. *Aksaray University Journal of Science and Engineering*, 3(1), 1–7. https://doi.org/10.29002/asujse.511850
40. Kaygisiz, K., & Sahin, A. (2012). New Generalizations of Lucas Numbers. *Gen Mathematics Notes*, Vol. 10, no. 1, 63–77. URL: https://users.dimi.uniud.it/~giacomo.dellariccia/Glossary/Lucas/KaygisizSahin2012b.pdf
41. Koshy, Thomas. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. A Wiley-Interscience Publication. Toronto, New York, NY, USA, 654 p. https://doi.org/10.1002/9781118033067
42. Lee, G. Y., & Asci, M. (2012). Some Properties of the (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas Polynomials. *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2012, article ID 264842, 18 p. https://doi.org/10.1155/2012/264842
43. Lupas, Alexandru. (1999). A Guide of Fibonacci and Lucas Polynomial. *Octagon Mathematics Magazine*, Vol. 7(1), 2–12.
44. Nalli, A Ayse, & Haukkanen, Pentti. (2009, December). On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. Chaos Solitons & Fractals, Vol. 42, issue 5, 3179–3186. https://doi.org/10.1016/J.CHAOS.2009.04.048
45. Nihal Tas, Sumeyra Ucar, Nihal Yilmaz Ozgur, & Oztunc Kaymak. (2018). A new coding/decoding algorithm using Fibonacci numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 10, No. 02, article ID 1850028. https://doi.org/10.1142/S1793830918500283
46. Özkan, E., Taştan, M., & Aydoğdu, A. (2018). 2-Fibonacci polynomials in the family of Fibonacci numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 24(3), 47–55. https://doi.org/10.7546/nntdm.2018.24.3.47-55
47. Özkan, Engin, Taştan, Merve & Aydoğdu, Ali. (2019). Fibonacci Sayılarının Ailesinde 3-Fibonacci Polinomları. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. Cilt: 12 Sayı: 2, 926–933. https://doi.org/10.18185/erzifbed.512100
48. Panwar, Yashwant K., Singh, B., & Gupta, V. K. (2013). Generalized Fibonacci Polynomials. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 1(1), 43–47. https://doi.org/10.12691/tjant-1-1-9
49. Perumali, Sundarayya, & Prasad, M. G. Vara. (2019, October). Coding theory on Pell-Lucas *p*-numbers. *Journal of Physics Conference Series*, 1344(1), article ID 012017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1344/1/012017
50. Postavaru, Octavian. (October 2023). An efficient numerical method based on Fibonacci polynomials to solve fractional differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 212, 406–422. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.04.028
51. Prasad, Bandhu. (2014). Coding theory on $(h(x), g(y))$-extension of Fibonacci *p*-numbers polynomials. *Universal Journal of Computational Mathematics*, Vol. 2(1), 6–10. https://doi.org/10.13189/ujcmj.2014.020102
52. Prasad, Bandhu. (2014). High rates of Fibonacci polynomials coding theory. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 06, No. 04, article ID 1450053. https://doi.org/10.1142/S1793830914500530
53. Prasad, Bandhu. (2016). Coding theory on Lucas *p*-numbers. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 08, No. 04, article ID 1650074. https://doi.org/10.1142/S1793830916500749
54. Prasad, Bandhu. (2019). The generalized relations among the code elements for a new complex Fibonacci matrix. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, Vol. 11, No. 02, article ID 1950026. https://doi.org/10.1142/S1793830919500265
55. Prasad, K., & Mahato, H. (2021). Cryptography using generalized Fibonacci matrices with Affine-Hill cipher. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(8), 2341–2352. Corpus ID: 14098285. https://doi.org/10.1080/09720529.2020.1838744
56. Ramirez, J. L. (2013). On convolved generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 229, 208–213. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.049
57. Robbins, N. (1991). Vieta's triangular array and a related family of polynomials. *International Journal of Mathematics and Mat-*

hematical Sciences, Vol. 14, no. 2, 239–244. https://doi.org/10.1155/S0161171291000261
58. Saba, Nabiha, & Boussayoud, Ali. (2020, June). Complete homogeneous symmetric functions of Gauss Fibonacci polynomials and bivariate Pell polynomials. *Open Journal of Mathematical Sciences*, 4(1), 179–185. https://doi.org/10.30538/oms2020.0108
59. Sentürk, G. Y., Gürses, N., & Yüce, S. (2022). Construction of dual-generalized complex Fibonacci and Lucas quaternions. *Carpathian Mathematical Publications*, 14(2), 406–418. https://doi.org/10.15330/cmp.14.2.406-418
60. Sikhwal, Omprakash, & Vyas, Yashwant. (2016, October). Generalized Fibonacci Polynomials and Some Fundamental Properties. SCIREA Journal of Mathematics, Vol, 1, issue 1, 16–23. URL: https://article.scirea.org/pdf/11002.pdf
61. Sikhwal1, Omprakash, & Vyas, Yashwant. (2014). Fibonacci Polynomials and Determinant Identities. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(5), 189–192. https://doi.org/10.12691/tjant-2-5-6
62. Singh, B., Sikhwal, O., & Panwar, Y. K. (2009). Generalized Determinantal Identities Involving Lucas Polynomials. *Applied Mathematical Sciences*, 3(8), 377–388. URL: https://www.researchgate.net/publication/228526069_Generalized_Determinantal_Identities_Involving_Lucas_Polynomials
63. Stakhov, A. P. (2006, October). Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. *Chaos, Solitons, & Fractals*, Vol. 30, issue 1, 56–66. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.12.054
64. Swamy, M. N. S. (1965). Problem B-74. *The Fibonacci Quarterly*, Vol. 3, no. 3, 236 p. URL: https://www.sciepub.com/reference/152291
65. Taştan, M., & Özkan, E. (2021). Catalan transform of the *k*-Pell, *k*-Pell–Lucas and modified *k*-Pell sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1), 198–207. https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.1.198-207
66. Uçar, S. (2017). On some properties of generalized Fibonacci and Lucas Polynomials. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications* (IJOCTA), 7(2), 216–224. https://doi.org/10.11121/IJOCTA.01.2017.00398
67. Uçar, Sümeyra, Tas, Nihal, & Özgür, Nihal. (2019, May). A New Application to Coding Theory via Fibonacci and Lucas Numbers. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7(1), 62–70. https://doi.org/10.36753/mathenot.559251
68. Vajda, S. (2007, December). Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section. *Theory and Applications* (Dover Books on Mathematics). Dover Publications, 192 p. URL: https://www.amazon.com/Fibonacci-Lucas-Numbers-Golden-Section/dp/0486462765
69. Wang, W., & Wang, H. (2015). Some results on convolved (*p*,*q*)-Fibonacci polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 26(5), 340–356. https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1007502
70. Wang, Weiping, & Wang, Hui. (2017, August). Generalized Humbert polynomials via generalized Fibonacci polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 307, 204–216. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.02.050
71. Yakymenko, I., Karpinski, M., Shevchuk, R., & Kasianchuk, M. (2024, May). Symmetric Encryption Algorithms in a Polynomial Residue Number System. *Journal of Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1155/2024/4894415
72. Yang, Jizhen, & Zhang, Zhizheng. (2018, December). Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 339, 451–458. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.054
73. Yilmaz, N. (2024). Some new results for the generalized bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. Corpus ID: 271426809. *Mathematica Moravica*. https://doi.org/10.5937/matmor2401097y
74. Yılmaz, N., & Aktaş, İ. (2023). Special transforms of the generalized bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 52(3), 640–651. https://doi.org/10.15672/hujms.1110311

P. Yu. Grytsiuk, Yu. I. Hrytsiuk
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

METHOD FOR GENERATING A SEQUENCE OF FIBONACCI POLYNOMIAL MATRICES AND THEIR FEATURES FOR USE IN BLOCK DATA ENCRYPTION

A method for generating a sequence of Fibonacci polynomial matrices of the *m*th order, the elements of which are Fibonacci polynomials of no more (*n*–1)th power, has been developed, which makes it possible to find both their determinants and inverse matrices suitable for the matrix method of block data encryption. It has been found that even over the past decade, a significant number of publications have been published, each of which substantiates different approaches to generating sequences of Fibonacci polynomial matrices and proves the feasibility of their use for data encryption. At the same time, the use of Fibonacci polynomial matrices as a separate procedure for protecting block data in the theory and practice of cryptography is extremely rare. It has been established that a well-known method for generating a sequence of Fibonacci polynomials consists in using a recurrence relation, according to which the next polynomial is formed by multiplying the variable *x* sequentially by the elements of the current polynomial, after which similar terms are grouped with the terms of the previous polynomial. The method of generating a sequence of Fibonacci polynomial matrices consists in using a recurrent matrix relation, according to which the next polynomial matrix is formed by multiplying the variable *x* successively by the elements of the current matrix, adding the elements of the formed matrix to the elements of the previous matrix, after which all similar terms are grouped in the formed elements. Algorithms for forming a sequence of 8th Fibonacci polynomial matrices from the 2nd to the 5th order are given, the elements of which are Fibonacci polynomials of no more (*n*–1)th power, are presented, which made it possible to analyze not only the features of their construction, but also to understand the procedures for finding their determinants and inverse matrices. Software has been developed that allows generating both sequences of Fibonacci polynomial matrices of the *m*th order, and finding their determinants and inverse polynomial matrices of a similar order. An example of using the matrix method of encrypting block data with a Fibonacci polynomial matrix is provided, which allows the interested reader to understand the basic principle of encrypting both the original message and decrypting the encrypted message.

Keywords: sequence of Fibonacci polynomials; recurrent matrix relation; sequence formation mechanism; inverse Fibonacci polynomial matrix; encrypted message; matrix data encryption method.