



Й. В. Андрашек, Р. Р. Курка, О. М. Петросюк

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ПОЛІВ ВОЛОГОСТІ В ПРОЦЕСІ КОНДИЦІОНУВАННЯ ТЕРМІЧНО МОДИФІКОВАНОЇ ДЕРЕВИНИ ЯСЕНА

Математичне моделювання полів вологості термічно модифікованої деревини під час її кондиціювання є актуальним завданням, вирішення якого має велике значення для забезпечення якісних характеристик готових виробів. Наведено результати експериментальних досліджень розподілу вологості за товщиною термічно модифікованої деревини ясеня після завершення процесу кондиціювання (зволоження) протягом шести, дванадцяти та вісімнадцяти годин. Встановлено, що для практичної реалізації розробленої авторами математичної моделі розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня необхідно ввести певні зміни і уточнення для деяких параметрів математичної моделі. Введено заміну критерію Фур'є на інший, який дасть змогу фізично наблизити показники моделі до емпірично отриманих даних, та введено два параметри для компенсації особливостей зволоження та рівноважної вологості деревини. Запропоновано визначати коефіцієнт вологопровідності (потенціалопровідності) графоаналітичним способом за результатами експериментальних досліджень зміни вологості термічно модифікованої деревини ясеня за товщиною в процесі кондиціювання. Зазначено, що параметри: вологопровідності, відносної вологості, температури, часу, показника компенсації різниці властивостей між процесом сушіння та зволоження, а також показника різниці рівноважної вологості між звичайною деревиною і термічно модифікованою є зафіксовані протягом усього експерименту. У процесі ітерації моделі отримано чотирьохточкові дані, на підставі яких побудовано квадратичні криві із нульовим середньоквадратичним відхиленням. Результати продемонстровано графічно. Проведено порівняння отриманих даних із емпіричним експериментом. Встановлено, що параметри гарантують визначення значень полів вологості з похибкою $\pm 0,6\%$, що є досить хорошим показником для практичного використання впродовж шести та дванадцяти годин експерименту. Однак, середньоквадратичне відхилення впродовж вісімнадцяти годин показує, що максимальне відхилення можливе в межах $\pm 1,6\%$ під час використання моделі. Це пояснюється зафіксованими параметрами моделі, які не дають змоги повною мірою оцінити процеси у камері для кондиціювання. Встановлено, що отриману математичну модель можна практично використовувати для визначення тривалості процесу кондиціювання з метою досягнення необхідної кінцевої вологості термічно модифікованої деревини для різних умов експлуатації. Математичну модель розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня можна використати для інших порід деревини після визначення коефіцієнта потенціалопровідності за результатами експериментальних досліджень для конкретної породи деревини.

Ключові слова: коефіцієнт вологопровідності; рівноважна вологість; відносна вологість; математична модель; метод найменших квадратів; середньоквадратичне відхилення.

Вступ / Introduction

У технологічному процесі виробництва термічно модифікованої деревини математичне моделювання розподілу вологості за товщиною пиломатеріалів під час кондиціювання (зволоження) є актуальним і надзвичайно важливим питанням. Для практичної реалізації розробленої математичної моделі розподілу полів вологості необхідно ввести певні зміни і уточнення для де-

яких параметрів математичної моделі. Також потрібно виконати експериментальні дослідження розподілу полів вологості в процесі кондиціювання для визначення коефіцієнта вологопровідності термічно модифікованої деревини, використовуючи графоаналітичний метод. Необхідно уточнити рівняння для визначення рівноважної вологості в процесі кондиціювання. Реалізація математичної моделі розподілу вологості за товщиною дасть

Інформація про авторів:

Андрашек Йосип Володимирович, канд. техн. наук, доцент, кафедра технологій захисту навколишнього середовища і деревини та безпеки життєдіяльності. Email: joseph.andrashek@nltu.edu.ua; <https://orcid.org/0009-0002-1011-0089>

Курка Роман Романович, аспірант, кафедра автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Email: roman.kurka@nltu.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-3057-1413>

Петросюк Олександр Миколайович, аспірант, кафедра технологій захисту навколишнього середовища і деревини та безпеки життєдіяльності. Email: sashapetrosyk@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-2186-5655>

Цитування за ДСТУ: Андрашек Й. В., Курка Р. Р., Петросюк О. М. Реалізація математичної моделі розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня. Науковий вісник НЛТУ України. 2024, т. 34, № 2. С. 116–123.

Citation APA: Andrashek, J. V., Kurka, R. R., & Petrosiuk, O. M. (2024). Mathematical modelling and numerical simulation of moisture fields distribution due to air conditioning of thermally modified ash wood. *Scientific Bulletin of UNFU*, 34(2), 116–123.

<https://doi.org/10.36930/40340215>

змогу розробити енергоощадні режими кондиціювання для досягнення необхідної кінцевої вологості термічно модифікованої деревини залежно від умов експлуатації та температури термічного модифікування.

Часову еволюцію досягнення гігроскопічної рівноваги поверхнею термічно модифікованої деревини бука, а також властивості перенесення води (дифузію) в термічно модифікованій деревині досліджено в роботі [14]. У зв'язку зі змінами хімічного складу клітинної стінки сорбційні властивості деревини значно змінюються. Зшиті реакції полімерів у поєднанні з відновленням чутливої до води геміцелюлози та аморфної целюлози та, відповідно, зменшення ділянок сорбції для молекул води є причиною зниження сорбційних властивостей термічно модифікованої деревини. Чим вища температура оброблення деревини, тим нижчою стає її рівноважна вологість (ЕМС) [19]. Рівноважна вологість деревини має тенденцію до зниження після циклів замочування водою (подібно до вивітрювання). Як подальший наслідок змін у полімерах клітинної стінки та зниження сорбційних властивостей, термічно модифікована деревина має значно менше всихання та набухання, ніж необроблена деревина. Зміна коефіцієнтів всихання та набухання залежить від породи деревини та умов оброблення. Ці зворотні зміни рівноважної вологості та всихання та набухання можуть бути пояснені або пов'язаним з висиханням відгалом аморфних полімерів в процесі [1, 9], або ефектом об'єму клітинної стінки, викликаним нагромадженням продуктів розпаду [13]. Ці ефекти необхідно враховувати під час вибору теплової модифікації.

На цей момент дослідження системи "термічно модифікована деревина – вода", зазвичай, були обмежені визначенням ізотерм сорбції тільки для кількох рівнів значень відносної вологості повітря. Реалізація математичної моделі розподілу вологості за товщиною дасть змогу розробити енергоощадні режими кондиціювання деревини для досягнення необхідної кінцевої вологості термічно модифікованої деревини залежно від умов експлуатації виробів і температури термічного модифікування. Отже, це дослідження є актуальним і сприяє подальшому розвитку процесів вологоперенесення під час кондиціювання термічно модифікованої деревини.

Об'єкт дослідження – кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня.

Предмет дослідження – чисельна реалізація математичної моделі розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня.

Мета роботи – реалізувати математичну модель розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня, що уможливить розроблення раціональних режимів кондиціювання для досягнення необхідної кінцевої вологості деревини.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

1. Дослідити та виокремити особливості математичної моделі полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня.
2. Виконати експериментальні дослідження щодо розподілу вологості за товщиною термічно модифікованої деревини ясеня в процесі її кондиціювання та визначити коефіцієнт потенціалопровідності графоаналітичним способом.
3. Перетворити математичну модель полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої дере-

вини ясеня в математичну модель, придатну для реалізації простими математичними операторами, зберігаючи фізичний зміст задачі.

4. Зробити порівняння розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня, отриманих за результатами математичної моделі з результатами експериментальних досліджень.
5. Виконати статистичний аналіз отриманих результатів дослідження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Процес перенесення зв'язаної води в термічно модифікованій деревині зазвичай описується законом дифузії Фіка [1, 11]. Розв'язувана задача складається з дифузійного рівняння дифузії з частинними похідними разом з початковими і граничними умовами. Істотні спрощення часто застосовували під час розв'язання задачі дифузії, і часто використовували граничну умову першого виду (умова Діріхле) [1]. Такий підхід піддається критиці, оскільки він не належно враховує передачу пари на межі розділу деревина – вологе повітря [6]. Це пов'язано з тим, що поверхня деревини, яка контактує з вологим повітрям, поступово наближається до рівноважної вологості (її ще називають рівноважною вологістю, тобто вмістом води, за якого деревина не набирає і не втрачає воду з вологого повітря за такої відносної вологості і температури) та гігроскопічна рівновага не досягається миттєво. Цей зовнішній опір масообміну є результатом поєднання двох явищ – масопереносу в прикордонному шарі та зв'язку тепло- і масообміну, що відбувається на поверхні. Адаже на початковому етапі сорбції за нагрівання поверхні відповідає конденсація води. Своєю чергою, цей ефект зменшує рушійну силу дифузії пари через прикордонний шар і уповільнює сорбцію [14].

Феномен уповільнення процесу сорбції термічно модифікованою деревиною на завершальному етапі, який часто не відповідає поведінці закону Фіка, був описаний у багатьох роботах [10]. Цей ефект добре відомий в науці про полімери і пояснюється молекулярною релаксацією. Для пояснення цього ефекту [14], запропонована модифікація конвективної граничної умови, в якій враховували експоненціальне наближення вологості поверхні деревини до рівноваги з вологим повітрям. Застосування модифікованої граничної умови значно підвищило точність дифузійного моделювання деревини бука у радіальному та поздовжньому напрямках.

У роботі [14], для визначення взаємозв'язку між відносною вологістю навколишнього середовища і вологістю термічно модифікованої деревини, було виміряно динамічну сорбцію водяної пари (DVS). Сорбційний аналіз термічних зразків деревини проводили за допомогою динамічної парової сорбції (DVS Intrinsic, Surface Measurement Systems Ltd., Лондон, Великобританія). Попередньо кондиціоновану деревину тріску поміщали в герметичну камеру з термостатичним управлінням. У камері підтримували постійну температуру ($25^{\pm 0.2}$ °C), а відносна вологість змінювалася покроково (20 кроків) від 0 до 95 % для сорбції та десорбції. Ізотерми процесів були отримані шляхом побудови графіка зміни рівноважної вологості залежно від зміни відносної вологості.

За результатами аналізу літературних джерел можна зробити висновок про відсутність публікацій стосовно математичного моделювання розподілу вологості за товщиною пиломатеріалів в процесі кондиціювання (зволоження) термічно модифікованої деревини.

Матеріали та методи дослідження. Для експериментального дослідження розподілу полів вологості в процесі кондиціювання використовували термічно модифіковані ясеневі обрізні дошки з поперечним перетином 30×100 мм. Температура термічної модифікації становила 195 °С. Визначення розподілу вологості за товщиною проводили ваговим методом згідно зі стандартом DIN EN 13 183-1:2002. Для визначення вологості секцій використовували термогравіметричний аналізатор вологості фірми Radwag. Оброблення експериментальних даних проведено методом статистичного аналізу. Для порівняння результатів теоретичних і експериментальних досліджень використовували метод найменших квадратів і середнє квадратичне відхилення.

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Проведення експериментальних досліджень. Після завершення процесу термічної модифікації температура в термокамері знижувалася з 195 до 95 °С. Вологість термічно модифікованих пиломатеріалів близька до нуля (0,3-0,6 %) [2]. Для досягнення необхідної кінцевої вологості організовано процес кондиціювання (зволоження) шляхом подачі в термокамеру вологої насиченої пари. Під час кондиціювання в термокамері температура підтримувалася на рівні 95 °С, а відносна вологість становила 94-98 %. Після завершення кондиціювання термокамера охолоджувалася до температури 35 °С і здійснювали відбір проб з термічно модифікованої деревини для визначення пошарової вологості (розподілу полів вологості за товщиною пиломатеріалів). Визначення вологості секцій проводили ваговим способом з використанням термогравіметричного аналізатора вологості фірми Radwag. Експериментальні дослідження виконували за загальною відомою методикою, деталі якої наведено в роботі [3].

Експериментальні дослідження процесу кондиціювання в термокамері проводили з використанням ясеневих дощок товщиною 30 мм ($2R = 0,03$ м), термічно модифікованих за температури 195 °С. Для визначення розподілу вологості за товщиною дощок після закінчення кондиціювання відбирали три дошки і з кожної випилювали по три секції для визначення вологості. За фактичне значення кінцевої вологості термічно модифікованих ясеневих дощок приймали середнє арифметичне дев'яти значень результатів, одержаних внаслідок експериментальних досліджень.

Під час процесу кондиціювання термічно модифікованої деревини необхідно зважати на температурний режим. Зростання температури в термокамері приводить до збільшення коефіцієнта теплопровідності (інтенсифікації процесу зволоження). Однак він нівелюється зменшенням максимально можливої відносної вологості повітря за температури, більшої 100 °С [5]. Тому в процесі виконання експериментальних досліджень обрано режим, де температура менша 100 °С. В реальних умовах неможливо її зафіксувати. Вона змінювалася від 93 до 98 °С під час кондиціювання. Тому під час дослідження вводимо середню температуру експерименту $t = 95$ °С та відносну вологість повітря кондиціювання $\varphi = 0,95$.

Унаслідок проведення експериментальних досліджень отриманий перелік даних, які дають характеристику поведінки досліджуваного об'єкта у часі: 6, 12 та

18 годин експерименту. Задача розподілу вологості за товщиною є симетричною щодо центрального шару дошки. Необхідно ввести параметр $x \in [-R; R]$. Очевидно, що в центрі досліджуваного об'єкта вологість повинна бути мінімальною, а на поверхні максимальною, що і підтверджено за результатами експериментальних досліджень (табл. 1).

Табл. 1. Розподіл вологості за товщиною термічно модифікованих ясеневих дощок за координатою x після кондиціювання тривалістю 6, 12 та 18 годин / Moisture distribution along the thickness of thermally modified ash boards in the x -coordinate after conditioning for 6, 12 and 18 hours

Номер секції за товщиною	Відстань від центру дощок до центру секції	Розподіл вологості (W) в % за товщиною дощок після кондиціювання тривалістю, год		
		x , м	W_6	W_{12}
1	-0,015		4,82	6,18
2	-0,0075		3,38	5,43
3	0		2,95	4,38
4	0,0075		3,53	5,12
5	0,015		4,77	6,27

Математична модель. В роботі [2] запропоновано математичну модель розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня. Для визначення процесу зволоження достатньо отримати дані в центральній та поверхневій точках вибраного матеріалу. Це дасть змогу отримати всю необхідну інформацію про перебіг процесу зволоження термічно модифікованої деревини. Однак, задане алгебраїчне рівняння – це загальний теоретичний опис поставленої задачі кондиціювання (сушіння), який не можна застосовувати напряму, моделюючи задачу.

Згідно з означенням [2, ст. 94], у поверхневій точці $W = W_p$ в будь-який момент перед початком процесу кондиціювання заготовок ясеня, можна вважати неможливим в реальних умовах. Тому запропоновану математичну модель розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня описуємо рівнянням в центральній точці ясеневих дощок, яке має вигляд:

$$W = W_p \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{1+i} \cdot \text{Exp} \left(\frac{(1+2 \cdot i)^2 \cdot \pi^2}{4} F_0' \right) \right\}, \quad (1)$$

де $F_0' = d^2 \tau / R^2$ – масообмінний критерій Фур'є. Рівняння (1) потребує детального огляду на особливості, котрі не дадуть змоги отримати достовірні результати. Тому потрібно провести математичні перетворення, зберігаючи фізичний зміст задачі, та спростувати (1) на іншу точку вибірки так, щоб забезпечити перетворення математичної моделі полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня, запропоновану в роботі [2], в математичну модель, придатну для числової реалізації.

Для застосування рівняння (1) в інженерних (практичних) розрахунках необхідно мати рівняння для визначення рівноважної вологості деревини і коефіцієнта теплопровідності. Для визначення рівноважної вологості деревини можна використати рівняння, отримані П. В. Білеєм [5]. Для діапазону відносної вологості повітря в межах від 50 до 100 %, коли деревина містить адсорбовану, мікрокапілярну і капілярну вологу, рівноважна вологість буде дорівнювати:

$$W_p = \frac{0.512}{1.21 - \phi} \left(21 - \left(\frac{T}{100} \right)^2 \right), \quad (2)$$

де: $T = 273 + t$ – температура в К; φ – відносна вологість повітря в термокамері в частках одиниці.

Коефіцієнт вологопровідності деревини в умовах конвективного кондиціювання (температура менше 100 °С) основний показник, який характеризує інтенсивність переміщення води в деревині. У процесі кондиціювання термічно обробленої деревини на переміщення води за товщиною дощок здійснює вплив не тільки потенціал вологості, але й потенціал температури. Кінцевим результатом їх дії є рух води [12]. Тому для характеристики переміщення води в деревині запропоновано поняття коефіцієнта потенціалопровідності. Для знаходження коефіцієнта потенціалопровідності можна застосувати методи, які використовують для визначення коефіцієнта вологопровідності: метод стаціонарного току; нестационарного току; дослідного сушіння (зволоження). Перші два методи, назви яких пов'язані з характером перенесення води в дослідних зразках, включають аналіз пошарового вологовмісту в певні моменти часу проходження процесу. Метод дослідного сушіння (зволоження), його графоаналітичний варіант, оснований на використанні рівняння потенціалопровідності [2] за граничних умов третього роду. Для процесу зволоження граничні умови третього роду описуються рівнянням, яке характеризує процес масообміну (вологодобміну) на поверхні дощок:

$$q' = a'p_0 \left[\frac{dU}{dX} \right]_H = a'p_0(U_p - U_H), \quad (3)$$

де: U_p – рівноважна вологість термічно модифікованої деревини; U_H – вологість на поверхні термічно модифікованої дошки.

Коефіцієнт потенціалопровідності можна отримати з експериментальних точкових даних розподілу вологості за товщиною матеріалу у вигляді необмеженої пластини [3, 14]. Рівняння для визначення коефіцієнта вологопровідності має вигляд:

$$a' = R \frac{\Delta W}{\Delta \tau} \bigg/ \frac{\Delta W}{\Delta x}, \quad (4)$$

де: $\Delta W/\Delta \tau$ – швидкості сушіння; $\Delta W/\Delta x$ – градієнта вологості; R – половина товщини матеріалу.

Коефіцієнт вологопровідності (потенціалопровідності) термічно модифікованої деревини ясеня визначаємо, використовуючи дані, отримані впродовж експериментального дослідження за допомогою рівняння (4) при кожній зміні параметра часу для досліджуваного типу деревини. Провівши відповідні обчислення відповідно для шести, дванадцяти та вісімнадцяти годин, можна визначити середнє арифметичне протягом експерименту, яке дорівнює $1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$.

Отримане значення коефіцієнта вологопровідності узгоджується із табличними даними, зображеними в роботі [14], які отримані експериментально, з похибкою на фізичні властивості деревини та процес її насичення.

Побудова числової реалізації математичної моделі. Одні із найбільших проблем теорії кондиціювання деревини вологою – це проблеми, які виникають під час побудови математичної моделі процесу будь-якого експерименту. Переважно напрями досліджень реалізовані щодо сушіння, продемонстрованого формулою (1), що значно ускладнює процес моделювання. Однак можливо провести модифікацію для побудови математичної моделі, яка дасть змогу характеризувати вологісні показники термомодифікованої деревини квадратич-

но, на всій товщині досліджуваного об'єкта, за деяким симетричним, щодо вологості, експоненціальним законом. Для цього потрібно змоделювати її аналітично, виконуючи умови для експериментального дослідження, продемонстрованого в табл. 1, використовуючи усереднені початкові умови. Вибрані характеристики обрано так, щоб нівелювати неточності та технічні особливості в процесі кондиціювання в термокамері термічно модифікованої деревини.

Згідно з даними роботи [2], досліджується рівняння вологості в точці x в будь-який момент часу. Позначимо величину, яку необхідно знайти як функцію від багатьох змінних:

$$W_{\text{mod}}(a'; b; d; t; \tau_h; \varphi; x), \quad (5)$$

де: a' – коефіцієнт вологопровідності деревини; t – температура середовища; τ_h – тривалість оброблення матеріалу в годинах; φ – відносна вологість повітря кондиціювання; x – параметр зміни за товщиною матеріалу; b – параметр властивостей між процесом сушіння і зволоження; d – параметр компенсації різниці процесу насичення вологою для звичайної деревини і термічно модифікованої.

Потрібно зазначити, що масообмінний критерій Фур'є недоречний для моделювання поставленої задачі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня. Сума експоненціальних доданків у виразі (1), які містять критерій Фур'є: $F_0' = a' \tau / R^2$, зростає на відрізку $[0; R]$. Тому проведено заміну просторової функції $1/R^2$ на $b x^{1/2}$, отримаємо в результаті рівняння

$$F_{\text{mod}}' = a' b \tau x^{1/2}, \quad (6)$$

де: a' – коефіцієнт вологопровідності деревини; τ – тривалість кондиціювання термічно модифікованої деревини ясеня; x – осьова координата напрямку переміщення вологісних шарів; b – параметр компенсації процесу кондиціювання термічно модифікованої деревини.

Критерій Фур'є, для задачі (1), безрозмірна величина. Отже, b – параметр компенсації процесу кондиціювання, повинен мати розмірність $\text{м}^{-5/3}$, щоб рівняння (11) виконувало фізико-математичні закони для математичної моделі. Для b існує фізичний зміст: $b = b_0 / R^{5/3}$, де b_0 – певна безрозмірна величина. Вибрана термічно модифікована деревина володіє дещо іншими характеристиками рівноважної вологості деревини [17]. Тому потрібно ввести параметр $d = 2,25$.

Зазначимо, що параметр для компенсації змін вологості деревини вибраний усереднено. Отже, отримуємо оновлене рівняння для визначення рівноважної вологості термічно модифікованої деревини ясеня, використовуючи рівняння (2) та параметр d :

$$W_{\text{mod};p} = \frac{0,512}{1,21 - \varphi} \left(21 - \left(\frac{T}{100} \right)^2 \right) \frac{1}{d}, \quad (7)$$

де: φ – відносна вологість повітря в термокамері; $T = 273 + t$ – температура у градусах Кельвіна.

Часові умови потрібно звести до загальноприйнятої системи визначення одиниць:

$$\tau = 3600 \cdot \tau_h, \quad (8)$$

для відповідних числових параметрів у годинах. Також встановлюємо для математичної моделі, що $x \notin \{0\}$, згідно з властивостями рівняння (6) в (1), то точки на координатній осі будемо визначати за формулою

$$x \in \left\{ -R; -\frac{R}{3\frac{\tau_h}{6}}; \frac{R}{3\frac{\tau_h}{6}}; R \right\}. \quad (9)$$

Множина (9) надає можливість чотириточкового дискретного наближення чисельно отриманих даних із нульовим середньоквадратичним відхиленням від побудованої на їх основі кривої.

Унаслідок проведених перетворень (5-9) отримано математичну модель (10).

$$W_{\text{mod}}(a'; b; d; t; \tau_h; \phi; x) = \frac{0.512}{d(1.21 - \phi)} \left(21 - \left(\frac{T}{100} \right)^2 \right) \times \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^2 \frac{(-1)^i}{1+i} \cdot \text{Exp} \left(\frac{(1+2 \cdot i)^2 \cdot \pi^2 a b x^{1/2}}{4} \right) \right\} \quad (10)$$

$$x \in \left\{ -R; -\frac{R}{3\frac{\tau_h}{6}}; \frac{R}{3\frac{\tau_h}{6}}; R \right\}$$

Для застосування моделі (10) потрібно визначити значення параметра, який компенсує процес кондиціювання термічно модифікованої деревини. Параметр потрібно отримати, чисельно наблизивши значення W_{mod} до W_{exp} в момент часу (6) та значення змінної $x = 0$, при виконанні нерівності

$$|W_{\text{mod}} - W_{\text{exp}}| < 1 \cdot 10^{-4}, \quad (11)$$

де: W_{mod} – показник вологості в чисельному експерименті з використання квадратичної залежності отриманої за допомогою математичної моделі; W_{exp} – показник вологості в експериментальному дослідженні. Отже, зазначимо, що параметр був обраний $b = 220099$.

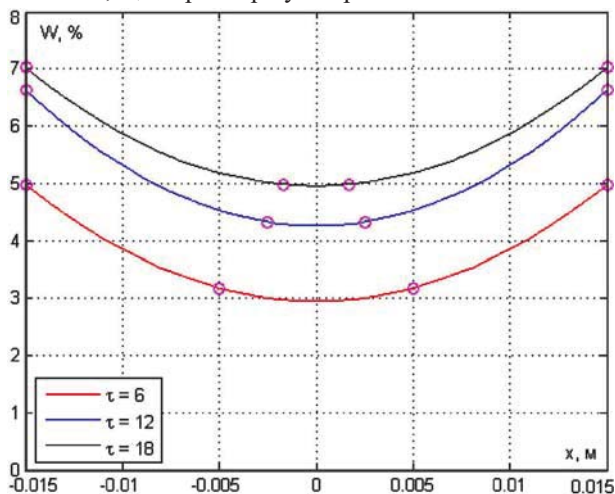


Рис. 1. Квадратичні залежності поведінки вологісного стану термічно модифікованої деревини ясеня під час кондиціювання водяною парою протягом 6, 12 і 18 годин та відповідні їм точкові дані з табл. 2 / Quadratic dependencies of the behaviour of the moisture state of thermally modified ash wood during water vapour conditioning for 6, 12 and 18 hours and their corresponding point data from Table 2

Числовий експеримент. Провівши числовий експеримент, для моделі (10) отримуємо точкові дані в табл. 2 відповідно до 6, 12 та 18 годин. Оскільки, згідно з формулами (6, 9), математична модель (10) є симетричною відносно нуля, тоді значення функції (5) в додатний числовий напрям $0X$ дорівнюють від'ємній числовій прямій з однаковим за модулем значенням.

Отримані результати з табл. 2 є дискретними величинами. Нанесемо їх на рис. 1. Для отримання квадратичної залежності використано метод найменших квад-

ратів [14]. Внаслідок його застосування отримано функції, зображені на рис. 1, які характеризують поведінку вологісного стану термічно модифікованих ясеневих дощок під час кондиціювання в середовищі насиченої водяної пари за часовими показниками 6, 12 та 18 годин.

Табл. 2. Результати розрахунку розподілу вологості за товщиною термічно модифікованих ясеневих дощок з використанням математичної моделі. Тривалість кондиціювання протягом 6, 12 і 18 годин / Results of calculating the moisture distribution over the thickness of thermally modified ash boards using a mathematical model. Duration of conditioning for 6, 12 and 18 hours

x_i	$W_{\text{mod};6}$	$W_{\text{mod};12}$	$W_{\text{mod};18}$
x_{-2}	4,98	6,63	7,02
x_{-1}	3,18	4,33	4,98
x_1	3,18	4,33	4,98
x_2	4,98	6,63	7,02

Графічне порівняння емпіричних та чисельних результатів. Щоб оцінити функціонування математичної моделі поведінки вологісного стану термічно модифікованих ясеневих дощок під час кондиціювання водяною парою (10), зображеного на рис. 1, потрібно порівняти його з результатами експериментальних досліджень, наведених у табл. 1. Порівняння графічно реалізовано на рис. 2.

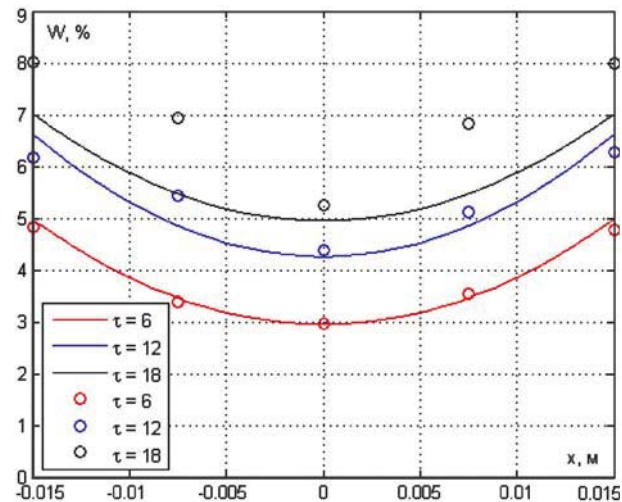


Рис. 2. Порівняння розподілу вологості за товщиною термічно модифікованих ясеневих дощок протягом 6, 12 і 18 годин за результатами експериментальних досліджень та з використанням математичної моделі / Comparison of the moisture distribution over the thickness of thermally modified ash boards for 6, 12 and 18 hours based on the results of experimental studies and using a mathematical model

Результатом проведених дій є отримання величини: відхилення функції від відповідних їм дискретних даних, $W_{\text{exp};\tau_h} - W_{\text{mod};\tau_h}$, зображених на рис. 2, для відповідних часових величин за тривалості: шість, дванадцять та вісімнадцять годин. Отримані числові дані продемонстровано в табл. 3.

Табл. 3. Різниця вологісного стану термічно модифікованих ясеневих дощок протягом 6, 12 і 18 годин за результатами експериментальних досліджень та з використанням математичної моделі / Difference in the moisture content of thermally modified ash boards for 6, 12 and 18 hours according to the results of experimental studies and using a mathematical model

W	$x_{-0,015}$	$x_{-0,0075}$	x_0	$x_{0,0075}$	$x_{0,015}$
$W_{\text{exp};6} - W_{\text{mod};6}$	0,16	0,08	0	-0,07	0,21
$W_{\text{exp};12} - W_{\text{mod};12}$	0,45	-0,58	-0,12	-0,27	0,36
$W_{\text{exp};18} - W_{\text{mod};18}$	-0,99	-1,46	-0,3	-1,37	-0,96

Статистичне порівняння емпіричних та чисельних результатів. Однак отримання дискретних величин відхилення експериментальних дискретних даних, отриманих за допомогою емпіричного дослідження від числових розрахунково отриманих даних, не є ознакою вимірювання для поставленої задачі. Основним апаратом числової характеристики двох величин в математичній статистиці вважають середнє квадратичне відхилення [14], яке характеризує різницю від математичного сподівання вибірки даних. Для запропонованих даних, формула розрахунку запропонованої величини буде мати вигляд:

$$\bar{Y}_{\text{mod}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_{\text{exp}; \tau_{h,i}} - W_{\text{mod}; \tau_{h,i}})^2, \quad (12)$$

де n – кількість точкових даних у вибірці.

Провівши розрахунки для випадків 6, 12 та 18 годин та визначивши, що $n = 5$ з табл. 1, отримуємо значення середньоквадратичного відхилення прогнозованої кривої розподілу вологості термічно модифікованої деревини та отриманих даних із експериментальних досліджень продемонстровано в табл. 4.

Табл. 4. Середньоквадратичні відхилення прогнозованої кривої розподілу вологості термічно модифікованої деревини та отриманих даних з експериментальних досліджень / Standard deviations of the predicted moisture distribution curve of thermally modified wood and the data obtained from experimental research

$\bar{Y}$	τ_6	τ_{12}	τ_{18}
$\bar{Y}_{\text{mod}}$	0,0162	0,1512	1,2

За результатами середньоквадратичного відхилення прогнозованої кривої розподілу полів вологості від даних з експериментальних досліджень, можна зазначити, що квадратична крива після шести та дванадцяти годин кондиціювання є допустимою до практичного використання. Показники гарантують визначення значень полів вологості з похибкою $\pm 1,6\%$, що дає змогу забезпечити досить високу точність для практичного використання. Однак середньоквадратичне відхилення за тривалості кондиціювання вісімнадцяти годин показує, що максимальне відхилення можливе в межах $\pm 1,6\%$. Відмінність цього показника від попередніх пояснюється вибором усереднених параметрів для математичної моделі. Вони обмежують можливості моделі динамічно пристосовуватися до фактичних значень параметрів в процесі кондиціювання.

Обговорення результатів дослідження. Реалізація чисельно математичної моделі розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини за допомогою емпіричного експерименту та її статистична оцінка є передовою задачею, для якої не існує опублікованих наукометричних записів. Наближена та розглянута задача – побудова математичної моделі розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясна.

Аналогічні дослідження переважно зосереджуються на визначенні фізико-механічних властивостей термічно модифікованої деревини (ТМД) в процесі сорбції і десорбції, а також стабільності форми і розмірів в процесі експлуатації виробів з ТМД. Забезпечення стабільності розмірів (зменшення всихання і набухання) пояснюється видаленням ОН-груп, що дає змогу знизити гідрофільність деревини [18]. Це змінює вільну енергію змішування між деревною речовиною і молекулами

проникаючої води, що пов'язано з параметром взаємодії теорії Флорі-Хаггінса. Втрата ОН-груп також пов'язана зі зміною гігроскопічності та поверхневої енергії (змочуванням) і, як наслідок, зменшенням рівноважної вологості термічно модифікованої деревини.

Значно знижене всихання (набухання) термічно модифікованої деревини [21], порівняно з необробленою деревиною, пов'язано з утворенням похідних фурфуролу з вмістом полісахаридів, і ці продукти розпаду здатні брати участь в реакціях з вмістом лігніну і полісахаридів, що спричиняє зшивання структурних елементів клітинної стінки. Це також призводить до зменшення первинних ділянок сорбції, але важливість цього, порівняно зі зміною вільної енергії змішування, є дискусійною.

Посилене зшивання всередині полімерів клітинної стінки, що обмежує здатність матриксу клітинної стінки набухати для розміщення молекул сорбованої води та підвищений модуль пружності клітинної стінки, вимагає більшої внутрішньої сили набухання (пов'язаної з вільною енергією перемішування) для досягнення однакового вмісту вологи [7]. Це зшивання може відбуватися шляхом утворення ковалентних зв'язків внаслідок реакції продуктів розпаду (наприклад, фурфуролів) або внаслідок реорганізації всередині полімерної мережі.

Гігроскопічність термічно обробленої деревини ялини звичайної досліджено в роботі [11], в якій сорбційні ізотерми оцінюються протягом трьох циклів адсорбція-десорбція. За результатами досліджень встановлено, що рівноважне зниження вмісту вологи є частково зворотним. Також було виявлено, що сорбційний гістерезис посилювався після підвищення температури модифікації деревини, що пов'язано з ультраструктурною реорганізацією деревини.

Незважаючи на те, що модифікована деревина існує на ринку вже два десятиліття, комплексні дослідження її моніторингу вологості проводять рідко [10]. Зв'язок між вологістю термічно модифікованої деревини і кліматом визначали в реальних умовах протягом кількох років у різних місцях у межах репрезентативного фасаду будівлі. Трирічний моніторинг довів, що термічно модифікована деревина є відмінним вибором для дерев'яного фасаду, оскільки має значно нижчу експлуатаційну вологість, порівняно зі звичайною деревиною і значно кращі показники стабільності розмірів.

Протягом останнього десятиліття багато досліджень продемонстрували зміни хімічних компонентів термічно модифікованої деревини та подальші зміни гігроскопічності й поведінки сорбції деревини після термічного модифікування. Встановлено, що ТМД зменшує рівноважну вологість за рахунок деградації гідрофільних геміцелюлоз, підвищення кристалічності целюлози та зшитості структури лігніну за підвищеної температури [8]. За результатами вивчення моделі ізотерми сорбції та стану води термічно модифікованої деревини під час сорбційного процесу, запропоновано розуміння механізму сорбції та прогнозування показників гігроскопічності ТМВ для різних умов кінцевого використання.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – вперше розроблено методологію чисельного отримання результатів математичної моделі для розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно

модифікованої деревини ясена та проведено статистичну оцінку.

Практична значущість результатів дослідження – розроблений математичний метод можна застосувати для чисельного прогнозування параметра вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясена.

Висновки / Conclusions

Реалізовано математичну модель розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясена, що дало змогу запропонувати раціональний режим її кондиціювання (зволоження) для досягнення необхідної кінцевої вологості деревини. На підставі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

1. Досліджено та виокремлено особливості математичної моделі полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясена.
2. Представлено експериментальні дослідження з розподілу вологості за товщиною термічно модифікованої деревини ясена в процесі кондиціювання та визначено коефіцієнт потенціалопровідності графо-аналітичним способом. Визначення вологості секцій проводили ваговим способом з використанням термогравіметричного аналізатора вологості фірми Radwag;
3. Проведено перетворення математичної моделі полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясена в математичну модель, придатну для реалізації простими математичними операторами, зберігаючи фізичний зміст задачі;
4. Зроблено порівняння розподілу полів вологості в процесі кондиціювання термічно модифікованої деревини ясена, отриманих за результатами математичної моделі, з результатами експериментальних досліджень.
5. Проведено статистичний аналіз отриманих результатів дослідження.
6. З'ясовано, що запропонована математична модель повністю придатна для виконання поставлених для неї завдань. Вона гнучка та інформативна, що дає змогу з легкістю визначати поля вологості термічно модифікованої деревини ясена після кондиціювання різної тривалості. Також її можна модифікувати до використання в схожих задачах. Отримання більшої кількості емпіричних даних експериментальних досліджень із дискретною зміною параметрів системи допоможе покращити її якісні характеристики. Також можлива побудова спеціалізованої фізико-математичної моделі для визначення необхідної тривалості процесу кондиціювання для досягнення необхідної кінцевої вологості термічно модифікованої деревини ясена залежно від умов подальшої експлуатації виготовлених з неї виробів.

References

1. Altgen, M., & Militz, H. (2016). Influence of process conditions on hygroscopicity and mechanical properties of European beech thermally modified in a high-pressure reactor system. *Holzfor-schung*, 70, 971–979. <https://doi.org/10.1515/hf-2015-0235>
2. Andrashek, J. V., & Petrosyuk, O. M. (2024). Modeling of moisture distribution in the process of conditioning of thermally modified ash wood. *Scientific Bulletin of UNFU*, 34(1), 91–96. <https://doi.org/10.36930/40340113>
3. Andrashek, J. V., Maksymiv, V. M., & Petrosuik, O. M. (2019). Experimental studies of final moisture content of thermally modified ash wood. *Scientific Bulletin of UNFU*, 29(2), 120–123. <https://doi.org/10.15421/40290224>
4. Arnold, M. (2010). Effect of moisture on the bending properties of thermally modified beech and spruce. *Journal of Materials Science*, 45, 669–680. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3984-8>
5. Biley, P. V., (2005). Theoretical foundations of heat treatment and drying of wood. Kolomyia: Vik, 360 p.
6. Biziks, V., Andersons, B., Sansonetti, E., Andersone, I., Militz, H., & Grinins, J. (2015). One-stage thermo-hydro treatment (THT) of hardwoods: an analysis of form stability after five so-aking-drying cycles. *Holzfor-schung*, 69, 563–571. <https://doi.org/10.1515/hf-2014-0083>
7. Borrega, M., & Karenlampi, P. (2010). Hygroscopicity of heat-treated Norway spruce (*Picea abies*) wood. *European Journal of Wood and Wood Products* 68, 233–235. <https://doi.org/10.1007/s00107-009-0371-8>
8. Chenyang, Cai, & Fanding, Zhou. (2022). Sorption Characteristic of Thermally Modified Wood at Varying Relative Humidity. *For-ests*, 13(10). <https://doi.org/10.3390/f13101687>
9. Endo, K., Obataya, E., Zeniya, N., et al. (2016). Effects of heating humidity on the physical properties of hydrothermally treated spruce wood. *Wood Sci Technol*, 50, 1161–1179. <https://doi.org/10.1007/s00226-016-0822-4>
10. Humar, M., Lesar, B., & Kržišnik, D. (2020). Moisture Performance of Façade Elements Made of Thermally Modified Norway Spruce Wood. *Forests*, 11(3). <https://doi.org/10.3390/f11030348>
11. Majka, J., Rogoziński, T., & Olek, W. (2022). Sorption and diffusion properties of untreated and thermally modified beech wood dust. *Wood Science and Technology*, 56, 7–23. <https://doi.org/10.1007/s00226-021-01346-x>
12. Molugaram, K., & Shanker, G. (2017). RaoStatistical techniques for transportation engineering. Butterworth-Heinemann. URL: <https://ndl.ethernet.edu.et/>
13. Obataya, E., & Higashihara, T. (2017). Reversible and irreversible dimensional changes of heat-treated wood during alternate wetting and drying. *Wood Sci Technol*, 51, 739–749. <https://doi.org/10.1007/s00226-017-0918-5>
14. Olek, W., Rémond, R., Weres, J., & Perré, P. (2016). Non-Fickian moisture diffusion in thermally modified beech wood analyzed by the inverse method. *International Journal of Thermal Sciences*, 109, 291–298. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2016.06.023>
15. Ozarkiv, I. M., Petryshak, I. V., & Sokolovskyy, I. A. (2018). Influence of wood drying modes on moisture conductivity potential. *Scientific Bulletin of UNFU*, 27(10), 89–91. <https://doi.org/10.15421/40271016>
16. Rautkari, L., & Hill, C.A.S. (2014). Effect of initial moisture content on the anti-swelling efficiency of thermally modified Scots pine sapwood treated in a high-pressure reactor under saturated steam. *Holzfor-schung*, 68(3), 323–326. <https://doi.org/10.1515/hf-2013-0078>
17. ThermoWood handbook. (2022). International Thermowood Association, Snellmaninkatu, Helsinki, Finland, 56. URL: <https://www.thermowood.fi/>
18. Thybring, E. E., Piqueras, S., Tarmian, A., & Burgert, I. (2020). Water accessibility to hydroxyls confined in solid wood cell walls. *Cellulose*, 27, 5617–5627. <https://doi.org/10.1007/s10570-020-03182-x>
19. Tjeerdsmas, B. F., Boonstra, M., Pizzi, A., et al. (1998). Characterisation of thermally modified wood: molecular reasons for wood performance improvement. *Holz als Roh-und Werkstoff*, 56, 149–153. <https://doi.org/10.1007/s0010700050287>
20. Welzbacher, C., Brischke, C., & Rapp, A. (2007). Influence of treatment temperature and duration on selected biological, mechanical, physical and optical properties of thermally modified timber. *Wood Material Science & Engineering*, 2, 66–76. <https://doi.org/10.1080/17480270701770606>
21. Wentzel, M., Altgen, M., & Militz, H. (2018). Analyzing reversible changes in hygroscopicity of thermally modified eucalypt wood from open and closed reactor systems. *Wood Science and Technology*, 52, 889–907. <https://doi.org/10.1007/s00226-018-1012-3>
22. Zhao, J., & Cai, Y. (2017). A comprehensive mathematical model of heat and moisture transfer for wood convective drying. *Holzfor-schung*, 71(5), 425–435. <https://doi.org/10.1515/hf-2016-0148>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL SIMULATION OF MOISTURE FIELDS DISTRIBUTION DUE TO AIR CONDITIONING OF THERMALLY MODIFIED ASH WOOD

Mathematical modeling of the moisture fields of thermally modified wood during its conditioning is an urgent task, the solution of which is of great importance for ensuring the quality characteristics of finished products. The paper presents the results of experimental studies of the moisture distribution over the thickness of thermally modified ash wood after the completion of the conditioning (moistening) process for six, twelve, and eighteen hours. It has been established that for the practical implementation of the mathematical model of moisture field distribution developed by the authors in the process of conditioning thermally modified ash wood, it is necessary to introduce certain changes and refinements for some parameters of the mathematical model. The Fourier criterion was replaced by some other criterion, which will make it possible to physically approximate the model parameters to the empirically obtained data, and two parameters were introduced to compensate for the peculiarities of moisture and equilibrium moisture content of thermally modified wood. The paper proposes determining the coefficient of moisture conductivity (potential conductivity) by the graph-analytical method based on the results of experimental studies of changes in the moisture content of thermally modified ash wood by thickness during the conditioning process. It is noted that the parameters of moisture conductivity, relative humidity, temperature, the index of compensation for the difference in properties between the drying and moistening processes, as well as the index of the difference in equilibrium moisture content between ordinary wood and thermally modified wood are fixed throughout the experiment. In the process of model iteration, four-point data was obtained, on the basis of which quadratic curves with zero standard deviation were constructed. The results are shown graphically. The obtained data was compared with an empirical experiment. It is established that the parameters guarantee the determination of the values of the humidity fields with an error of $\pm 0.6\%$, which is a fairly good indicator for practical use at six and twelve hours of the experiment. However, the standard deviation at eighteen hours shows that the maximum deviation is possible within $\pm 1.6\%$ when using the model. This is due to the fixed model parameters, which do not allow us to fully evaluate the processes in the thermal chamber during conditioning. It has been established that the obtained mathematical model can be practically used to determine the duration of the conditioning process in order to achieve the required final moisture content of thermally modified wood for different operating conditions. The mathematical model for the distribution of moisture fields during the conditioning of thermally modified ash wood can be used for other wood species after determining the coefficient of potential conductivity based on the results of experimental studies for a particular wood species.

Keywords: moisture conductivity coefficient; equilibrium humidity; relative humidity; mathematical model; least squares method; standard deviation.