



В. І. Гавриш, Р. Р. Шкраб

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ЕЛЕМЕНТАХ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ З ЛОКАЛЬНИМ ЗОВНІШНІМ НАГРІВАННЯМ ТА ІЗ УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а надалі й аналізу температурних режимів в ізотропних просторових середовищах, які піддаються зовнішньому локальному тепловому навантаженню. Для розв'язання нелінійної крайової задачі застосовано перетворення Кірхгофа, із використанням якого лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови і внаслідку отримано лінеаризоване диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та крайові умови з розривною правою частиною. Для розв'язування лінійної крайової задачі, а також отриманої лінеаризованої крайової задачі відносно перетворення Кірхгофа використано метод інтегрального перетворення Генкеля, внаслідок чого отримано аналітичні розв'язки цих задач. Для термочутливого середовища, як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. У результаті отримано аналітичне співвідношення для визначення розподілу температури у цьому середовищі. Виконано числовий аналіз поведінки температури як функції просторових координат для заданих значень геометричних і теплофізичних параметрів. Досліджено вплив потужності зовнішніх джерел тепла, теплофізичних та геометричних параметрів середовища на розподіл температури. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також на основі цього і аналізу теплообмінних процесів в середині цих конструкцій, зумовлених зовнішнім тепловим навантаженням, розроблено програмні засоби, із використанням яких виконано геометричне зображення розподілу температури залежно від просторових координат. Розроблені лінійна та нелінійна математичні моделі для визначення температурного поля у просторових середовищах із зовнішнім нагріванням свідчать про їх адекватність реальному фізичному процесу. Вони дають змогу аналізувати такі середовища щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих вузлів і їх елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле; ізотропне просторове середовище; теплопровідність; конвективний теплообмін; локальне зовнішнє нагрівання; термочутливість; тепловий потік.

Вступ / Introduction

У сучасному машинобудуванні, радіоелектроніці, автомобілебудуванні, зокрема для механізмів автоматизованого управління виробничими процесами, широко використовують деякі конструкції та їх елементів у вигляді просторових теплоактивних структур із внутрішнім локальним нагріванням. Проектування та розроблення таких механізмів, де окремі елементи та вузли є теплоактивними та функціонують в умовах постійного нагрівання або охолодження, передбачає не тільки розширення їх можливостей та покращення експлуатаційних характеристик, але й забезпечення стійкої роботи, високої надійності та теплової стабільності. Зростання потужностей таких механізмів і їх інтеграція в систему значно ускладнює проблему термостійкості до

теплових навантажень їх конструкцій, які частково або повністю виходять із ладу внаслідок теплових перевантажень.

Насамперед для аналізу температурних режимів потрібно визначити теплову потужність пристрою. Теплова потужність відображає кількість енергії, яку пристрій випромінює або віддає навколишньому середовищу, що досягають вимірюванням струму та напруги, які проходять через пристрій, а також із використанням програмних засобів для моделювання теплових процесів. По-друге, визначають тепловий опір пристрою, який він чинить. Цього досягають за допомогою вимірювання температурних градієнтів в різних точках пристрою. По-третє, визначають температурний режим пристрою. Температурний режим відображає температуру пристрою після деякого періоду роботи. Цього до-

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: gavryshvasyl@gmail.com;

<https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Шкраб Роман Романович, асистент, кафедра програмного забезпечення. Email: roman.r.shkrab@lpnu.ua;

<https://orcid.org/0000-0002-0112-8466>

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Шкраб Р. Р. Математичні моделі визначення температурних полів у елементах цифрових пристроїв з локальним зовнішнім нагріванням та із урахуванням термочутливості. Науковий вісник НЛТУ України. 2023, т. 33, № 5. С. 84–92.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Shkrab, R. R. (2023). Mathematical models for the determination of temperature fields in elements of digital devices with local external heating and taking thermo sensitivity into account. *Scientific Bulletin of UNFU*, 33(5), 84–92.

<https://doi.org/10.36930/40330511>

сягають вимірюванням температури пристрою після тривалого часу роботи або за допомогою програмних засобів для моделювання теплових процесів. На основі результатів аналізу теплових режимів приймають рішення щодо встановлення додаткових заходів для запобігання перегріванню пристрою. Одним із способів зниження температури пристрою є використання вентиляторів або теплових радіаторів для відведення тепла від його окремих вузлів і елементів. Також використовують матеріали з високою теплопровідністю для зниження температури пристрою. Важливим аспектом аналізу температурних режимів є врахування чинників навколишнього середовища, таких як температура, вологість і тиск в атмосфері. Ці чинники можуть впливати на температурний режим пристрою та необхідність застосування додаткових заходів для зниження температури. У сучасних цифрових пристроях температурні режими відіграють важливе значення у забезпеченні їх стабільної та надійної роботи. Як наслідок, під час проектування та виробництва цифрових пристроїв відповідним особам потрібно враховувати температурні умови роботи, щоб запобігати їх перегріванню.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових середовищах, які піддаються зовнішньому локальному нагріванню.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових середовищ із зовнішнім локальним нагріванням.

Мета роботи – розробити лінійну та нелінійну математичні моделі теплопровідності для ізотропних просторових середовищ, які піддаються зовнішньому локальному нагріванню, внаслідок чого можна підвищити точність визначення температурних полів, що надалі вплине на ефективність методів проектування сучасних електронних пристроїв.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела щодо розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- дослідити лінійні та нелінійні математичні моделі;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- розв'язати лінійні та нелінійні крайові задачі теплопровідності;
- розробити алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів в ізотропних просторових середовищах із зовнішнім локальним тепловим нагріванням.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників. Температура відіграє важливе значення для визначення фізичних і хімічних характеристик матеріалів. Цей вплив стає особливо істотним, коли є перепади температури, як це спостерігається в процесах теплопровідності. Температурні перепади призводять до певних змін властивостей матеріалу, що ускладнює визначення розподілу температури та термічної напруги. Тому визначення термопружного стану конструкцій стає значно складнішим.

У роботі [10] за допомогою узагальненого методу комплексної змінної досліджено термопружну задачу

еліптичної порожнини в нескінченному середовищі. Для аналізу термопружного стану середовища враховано температурну залежність коефіцієнта теплопровідності, модуля пружності та коефіцієнта теплового розширення. Із урахуванням цих залежностей, отримано аналітичні вирази для температури, теплового потоку та термопружних полів. Наведено аналітичні розв'язки розподілу температури, переміщень і напружень у шаруватих прямокутних пластинах з простою опорою, які піддаються термомеханічним навантаженням. Властивості матеріалу шарів залежать від температури [28].

Досліджено термопружні параметри функціонально градуїзованих пористих пластин з різним розподілом матеріалу та виявлено, що термічні напруження значно чутливіші до розподілу матеріалу, ніж температура та деформації [9].

У роботі [3] досліджено вплив температурної залежності властивостей матеріалу і показників композиційного градієнта у функціонально градуїзованих прямокутних пластинах щодо температури, деформацій та напружень. Наведено розв'язок для сталого стану реакції товстих циліндрів, які піддаються тиску та зовнішньому тепловому потоку на внутрішній поверхні [8]. Виконано термічний аналіз циліндрів різної товщини, виготовлених із функціонально градуїзованих матеріалів, які перебувають під впливом неоднорідних теплових потоків, зосереджених на внутрішніх і зовнішніх шарах [4, 26].

У роботі [1] наведено розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та термоеластичності для функціонально-градієнтних товстих сфер. Теплофізичні та термоеластичні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати. Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності та термоеластичності для порожнистих функціонально-градієнтних областей відносно джерела тепла.

Теплове моделювання електронних пристроїв є одним із найважливіших інструментів оцінювання їх надійності в різних режимах роботи. У роботі [7] наведено теплову модель електронних пристроїв, яка базується на експериментальних даних вимірювання температури, отриманих інфрачервоною камерою. Ці дані є вхідними для розробленої математичної моделі, яка ґрунтується на методі скінченних різниць і деяких відомих фізичних залежностях. Розроблена модель верифікована порівнянням даних моделювання з експериментально отриманими. Її можна використовувати для дослідження теплової поведінки пристрою за різних умов експлуатації.

У більшості портативних електронних пристроїв, окрім температури кількох джерел тепла, тобто температури з'єднання, також потрібно контролювати температуру корпусу, тобто температуру шкіри, щоб захистити роботу користувача. Отже, створення компактної теплової моделі на рівні пристрою для прогнозування температури шкіри не тільки підвищить ефективність теплового проектування на ранній стадії, але й допоможе розробити стратегію контролю температури на основі моделі. У роботі [11] вперше на основі методу згортки створені динамічні компактні теплові моделі двох портативних електронних пристроїв, враховуючи смартфон і ноутбук. Згідно з припущенням про лінійні незмінні в часі системи, температура шкіри двох тестових

пристроїв може бути швидко розрахована після отримання ступінчастої реакції кожного джерела тепла.

Збільшення питомої потужності електронних пристроїв, зумовлене вищою продуктивністю та вимогами до мініатюризації, спонукало дослідників до пошуку нових та альтернативних методів керування температурою. Оскільки більшість електронних пристроїв часто зазнають високочастотних циклів живлення, системи охолодження також повинні бути здатні керувати перехідними тепловими профілями, щоб затримати температурну реакцію та зменшити градієнти температури всередині пристрою, що може призвести до термічних навантажень і, в довгостроковій перспективі, відмови електронного пристрою. Інтеграція фазоперемінних матеріалів (PCM) в радіатори для електронних пристроїв представляє цікаву технічну систему для збільшення теплової інерції системи охолодження, одночасно забезпечуючи стабільнішу робочу температуру в електронних компонентах. У роботі [23] обговорюються останні тенденції досліджень у цій галузі, з особливим акцентом на електричні батареї, енергетичну електроніку та застосуванні портативних пристроїв.

Багато зусиль у сфері управління температурою електроніки було зосереджено на розробленні рішень для охолодження, які забезпечують роботу в стаціонарному режимі. Однак електронні пристрої дедалі частіше використовуються в додатках, що охоплюють робочі навантаження, що змінюються в часі. До них належать мікропроцесори (зокрема ті, що використовуються в портативних пристроях), силові електронні пристрої і масиви потужних напівпровідникових лазерних діодів. Перехідні рішення для управління температурою стають важливими для забезпечення продуктивності та надійності таких пристроїв. У роботі [18] визначено нові вимоги до управління температурою в перехідних процесах, а також представлені рішення для охолодження, описані в літературі для таких застосувань, зосереджені в часових масштабах теплової відповіді.

Удосконалено наявні методи та розроблено нові підходи для створення математичних моделей, які дають змогу аналізувати теплообмін у кусково-однорідних середовищах. Наведено плоскі та просторові моделі теплообміну, в яких диференціальні рівняння містять коефіцієнти, залежні від теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено підходи для визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Проаналізовано процеси теплообміну, що відбуваються в однорідних та шаруватих конструкціях із врахуванням канонічної форми [14, 15, 21, 22].

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. 1. Розглянемо ізотропний шар, віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$. На межовій поверхні шару $L_+ = \{(r, \varphi, h): 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ наведену структуру нагрівають зосередженим тепловим потоком, поверхнева густина якого становить $q_0 = \text{const}$, а на іншій поверхні шару $L_- = \{(r, \varphi, -l): 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем з температурою $t_c = \text{const}$ згідно зі законом Ньютона (рис. 1).

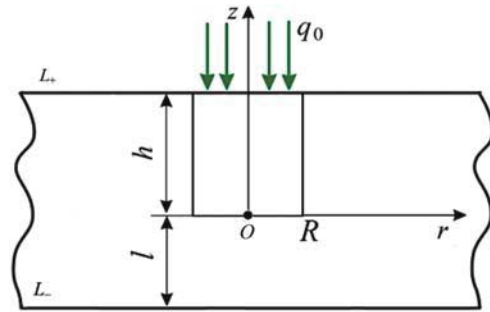


Рис. 1. Переріз ізотропного шару площиною $\varphi = 0$, який нагрівається тепловим потоком / Section of the isotropic layer in the plane $\varphi = 0$ which is heated by a heat flow

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z , який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [15, 14, 21, 22]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \operatorname{grad} T(r, z)] = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right|_{z=-l} = \frac{\alpha}{\lambda} T(r, z) \Big|_{z=-l}; \quad \left. \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{q_0}{\lambda} S_-(R-r), \quad (2)$$

де: $T(r, z) = t(r, z) - t_c$; λ – коефіцієнт теплопровідності шару; α – коефіцієнт тепловіддачі з межею поверхні шару L_- ; $S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$ – асиметрична одинична функція [15, 21, 22].

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (1) та крайових умов (2) і в наслідку прийдемо до звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = 0 \quad (3)$$

$$\text{і крайових умов } \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=h} = \frac{q_0 R}{\lambda \xi} J_1(R\xi), \quad \left. \frac{d\bar{T}}{dz} \right|_{z=-l} = \frac{\alpha}{\lambda} \bar{T} \Big|_{z=-l}, \quad (4)$$

де: $\bar{T}(\xi, z) = \int_0^\infty r J_0(r\xi) T(r, z) dr$ – трансформанта функції

$$T(r, z); \quad J_\nu(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n!(\nu+n)!} \quad \text{– функція Бесселя першого роду } \nu\text{-го порядку; } \xi \text{ – параметр інтегрального перетворення Генкеля.}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) визначимо у вигляді

$$\bar{T}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z},$$

де сталі інтегрування c_1 і c_2 знайдемо, скориставшись крайовими умовами (4). У наслідку отримаємо

$$\bar{T}(z) = \frac{q_0 R E(z)}{\lambda \xi^2 E} J_1(R\xi), \quad (5)$$

де:

$$E(z) = (\lambda \xi + \alpha) e^{\xi(z+l)} + (\lambda \xi - \alpha) e^{-\xi(z+l)};$$

$$E = (\lambda \xi + \alpha) e^{\xi(h+l)} - (\lambda \xi - \alpha) e^{-\xi(h+l)}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (5), отримає

$$T(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \bar{T}(\xi, z) d\xi. \quad (6)$$

У наслідку, шукане температурне поле в шарі, зумовлене зовнішнім локальним нагріванням (на межовій поверхні в локальній області зосереджено тепловий потік) виражено формулою (6), з якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції.

2. Розглянемо випадок, коли ізотропний шар є термочутливим. Із урахуванням термочутливості розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z у наведеній конструкції отримаємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [15, 14, 21, 22]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \lambda(t) \operatorname{grad} t(r, z)] = 0 \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$t(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=-l} = 0, \\ \left. \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{q_0}{\lambda} S_-(R-r), \quad (8)$$

де $\lambda(t)$ – коефіцієнт теплопровідності термочутливого шару.

Розглянемо перетворення Кірхгофа

$$\vartheta(r, z) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(r, z)} \lambda(\zeta) d\zeta, \quad (9)$$

де λ^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару.

Продиференціюємо вираз (9) за змінними r та z і внаслідок отримаємо

$$\lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r}, \quad \lambda^0 \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} = \lambda(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z}. \quad (10)$$

Із урахуванням виразів (10) вихідне рівняння (7) набуває такого вигляду:

$$\Delta \vartheta = 0, \quad (11)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Крайові умови (8) з використанням співвідношення (9) перепишемо так:

$$\vartheta(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \left. \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \left. \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \right|_{z=-l} = 0; \\ \left. \frac{\partial \vartheta(r, z)}{\partial z} \right|_{z=h} = \frac{q_0}{\lambda^0} S_-(R-r). \quad (12)$$

Використання перетворення Кірхгофа (9) дало змогу звести нелінійну крайову задачу (7), (8) до лінеаризованих диференціальних рівнянь з частковими похідними другого порядку (11) та крайових умов із розривною правою частиною (12).

Застосуємо інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (11) та крайових умов (12), внаслідок чого отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = 0 \quad (13)$$

$$\text{і крайові умови } \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=-l} = 0, \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=h} = \frac{R q_0}{\lambda^0 \xi} J_1(R \xi), \quad (14)$$

де $\bar{\vartheta}(\xi, z) = \int_0^\infty r \vartheta(\xi, z) J_0(r \xi) dr$ – трансформанта функції $\vartheta(r, z)$.

Загальний розв'язок рівняння (13) визначимо у такому вигляді

$$\bar{\vartheta}(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z}$$

та з використанням крайових умов (14) знайдемо сталі інтегрування c_1 і c_2 . Внаслідок цього отримаємо такий розв'язок задачі

$$\bar{\vartheta}(z) = \frac{R q_0}{\lambda^0 \xi^2} J_1(R \xi) \frac{ch \xi(z+l)}{sh \xi(h+l)}. \quad (15)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (15), визначимо вираз для лінеаризуючої функції $\vartheta(r, z)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r \xi) \bar{\vartheta}(z) d\xi. \quad (16)$$

Шукане температурне поле $t(r, z)$ для наведеної структури визначаємо за допомогою отриманого нелінійного алгебраїчного рівняння з використанням співвідношень (9), (16), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу шару від температури.

Частковий приклад. Розглянемо залежність коефіцієнта теплопровідності від температури у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (17)$$

де k – температурний коефіцієнт теплопровідності матеріалу шару.

Врахувавши співвідношення (9) із виразів (16) і (17), отримаємо формулу для визначення температури $t(r, z)$ в області шару

$$t(r, z) = \frac{1}{k} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k \vartheta(r, z)}{\lambda^0}} \right). \quad (18)$$

Формула (18) описує температурне поле в термочутливому шарі.

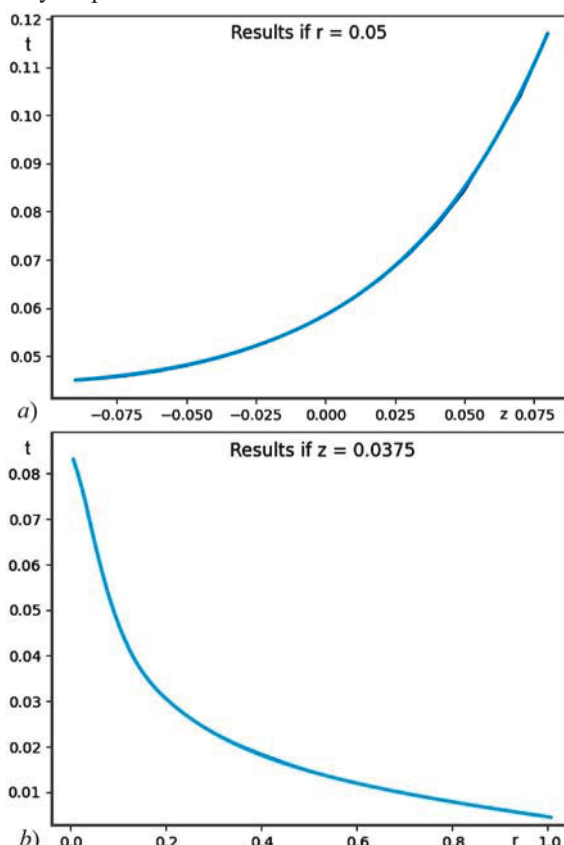


Рис. 2. Залежність температури від просторових координат / Dependence of temperature on spatial coordinates: а) аксіальної / axial coordinates; б) радіальної / radial coordinates

Аналіз числових результатів. За формулою (6) виконано числові розрахунки температурного поля $T(r, z)$ та наведено його поведінку в середовищі залежно від просторових радіальної r та аксіальної z координат для

таких вихідних даних: $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$; $l=0,1 \text{ м}$; $h=0,075 \text{ м}$; $R=0,05$; $\alpha = 17,64 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$; матеріалом середовища вибрано кремній, для якого коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 67,9 \text{ Вт/(град} \cdot \text{м)}$ за температури 27°C (див. рис. 2). Для термочутливого середовища, матеріалом якого є кремній, на інтервалі температур $[0^\circ \text{C}; 1127^\circ \text{C}]$ співвідношення (17), як частковий випадок, внаслідок виконаної інтерполяції буде таким:

$$\lambda(t) = 67,9 \text{ Вт/(град} \cdot \text{м)}(1 - 0,0005t / \text{град}) .$$

Із урахуванням цього співвідношення за формулою (18) визначено числові значення розподілу температури в термочутливому середовищі залежно від просторових координат.

Результати свідчать, що температура, як функція просторових координат, є гладкою та монотонною, що підтверджує адекватність розроблених математичних моделей реальному фізичному процесу, причому значення її, визначені за формулами (6) та (18), відрізняються на 8%. Цю невелику різницю отримано завдяки малому значенню температурного коефіцієнта теплопровідності кремнію ($k = 0,0005/\text{град}$).

Обговорення результатів дослідження. Покоління мініатюрних електронних компонент змушує дослідників детальніше моделювати їхню конструкцію, розташовану на платі, для керування їхнім внеском у теплопередачу. Розробники електронних цифрових пристроїв з локальним зовнішнім нагріванням та із урахуванням термочутливості конструкційного матеріалу знають про підвищені потреби до їх охолодження. Це пов'язано не тільки з наявною потребою живлення цих пристроїв і їхнім нагріванням, але й зі значною щільністю електронних компонент на самій платі і, як наслідок, потенційними проблемами надійності їхньої роботи через надмірні температурні навантаження, що перевищують встановлені межі виробника.

Наведене вище дослідження базується на використанні аналітичної теплової моделі визначення температурних полів у елементах цифрових пристроїв для ефективного встановлення чутливих параметрів і керування точністю аналітичного розв'язку. Основна мета, яку переслідували автори цієї роботи, полягає в розробленні лінійної та нелінійної математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових середовищ, які піддаються зовнішньому локальному нагріванню. Аналітичні методи дослідження прості у використанні, без зайвих зусиль зручні в реалізації, не потребують складних сіткових правил або правил конвергенції. Тому обговоримо аналогічні результати дослідження деяких інших науковців дещо детальніше.

У роботі [5] наведено результати аналітичного моделювання багатошарової друкованої плати, що містить температурні параметри електронних компонент. З'ясовано, що такі компоненти постійно зменшуються та мають більше можливих функцій, що спричиняє підвищення температури в зонах з'єднання електронних компонент $\rightarrow$ плата. Встановлено, що за нормальних умов роботи електронних компонент їх теплова потужність розподілена в основному через навколишні металеві площини, передусім – друковану плату. Тому їхня оптимізація конструкції є обов'язковою для контролю температури та збереження надійності роботи компонент. Щоб надати можливість розробнику електроніки на ранній стадії аналізувати межі розсіювання теплоти

мініатюрними електронними пристроями, розроблено аналітичну модель багатошарової електронної плати для оцінювання достовірності традиційного підходу до моделювання температурних полів друкованої плати.

Встановлено, що багато авторів десятиліттями пропитували гомогенну одношарову модель друкованої плати, яка використовувала ефективні ортотропні теплові властивості. Отримана цими авторами компактна модель залежала від апроксимації її теплових властивостей, що зазвичай базується на моделі паралельної провідності з урахуванням лінійного правила суміші. Отримані результати вказують на те, що звичайні методи моделювання теплового розсіювання друкованою платою можуть значно недооцінювати температуру джерел нагрівання плати, коли область зосередження цих джерел є достатньо малою. Водночас, в роботі [5] наведено результати порівняння теплової поведінки багатошарової друкованої плати з її виведеною тепловою моделлю для великого набору змінних параметрів, таких як коефіцієнти теплопередачі, ефективні моделі визначення теплопровідності, кількість шарів основи плати, її покриття або розмір джерела температури.

У роботі [2] розглянуто результати експериментального дослідження температурного поля електронного модуля. З'ясовано, що його теплові параметри мають важливе значення для надійної їх роботи та тривалої служби. У своєму дослідженні автори провели експеримент щодо температурного поля тестового модуля для отримання різних фізичних параметрів друкованої плати, а потім виконали теплове моделювання. Спочатку було використано експериментальну установку, яка дала змогу класифікувати температурне поле електронного пристрою на кілька категорій як функцію часу. Після цього отримані експериментальні результати було використано для обчислення площі кожної категорії, її температурної реакції, коефіцієнта теплопередачі тощо. Далі було виконано різні віртуальні симуляції за допомогою спеціально розробленого інструменту моделювання. Це дало змогу досліджувати температурну реакцію електронного модуля за різних параметрів середовища функціонування та його конструкції. Отримані результати дали можливість створити інформаційну базу даних, що дає змогу моделювати температурні поля електронних модулів різної конструкції.

У роботі [27] запропоновано методологію моделювання термічної структури друкованої плати шляхом чисельного розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь на підставі управління версіями Flutter (FVM) та аналітичного розв'язання інтегральних рівнянь відносно температури на підставі рядів Фур'є. Встановлено, що поширення тепла доріжками друкованої плати і вертикальну теплопередачу через отвори було враховано чисельним способом і розглянуто як додаткові термічні граничні умови ізоляційних шарів, які вважаються однорідними з аналітичного погляду. Для аналізу виділеної теплоти доріжками друкованих плат через проходження ними струму було запропоновано методологію, засновану на методі скінченного об'єму декартової сітки з центром вершини, щоб врахувати температурнозалежний ефект нагрівання Джоуля. Аналогічно було оцінено поточну пропускну здатність доріжок друкованої плати. У роботі також обговорено, описано та перевірено необхідну та достатню умову для розв'язання розподілу теплових полів у багатополосних доріжках за до-

помогою аналізу мережі еквівалентних резисторів і математичного аналізу матричного рівняння, яке корелює струми на клемах, а з клемою – електричні потенціали. Окрім цього, було обговорено метод аналізу багатопарової структури друкованої плати. На підставі розробленої методології в середовищі MATLAB було розроблено так званий термічний вирішувач. Декілька варіантів моделі було реалізовано в середовищі COMSOL методом скінченних елементів, щоб перевірити валідність методології та дослідити чинники впливу на температурні властивості багатопарової структури друкованих плат. Проаналізувавши моделі та порівнявши отримані результати, встановлено, що основними чинниками впливу є щільність сітки та кількість власних значень. Вертикальні та горизонтальні внески теплопередачі також досліджено моделюванням розташування силового MOSFET-транзистора для перевірки припущень гіпотез моделювання. Окрім цього, було виявлено узгодженість між результатами моделювання та еталонними результатами.

Останнім часом чисельне моделювання температурних полів набуло розвитку у галузі оптимізації конструкції електронних цифрових пристроїв [16, 24, 25]. Зазвичай, для вирішення цієї проблеми використовують комерційне ПЗ, таке як ANSYS (виробник: Canonsburg, PA, США) і COMSOL (виробник: Burlington, MA, США). Особливостями такого підходу є можливість дослідження фізичних явищ із застосуванням геометрії електронних пристроїв і термочутливості матеріалів їх виготовлення. Моделювання температурних полів з використанням методу скінченних елементів (англ. *Finite Element Method*, FEM) є одним із підходів до моделювання конструкції теплових процесів у перетворювачах енергії. Його можна використовувати для більш розширеного аналізу, ніж зазвичай традиційне оцінювання теплових потоків на підставі моделі теплового опору. Така модель потребує визначення таких параметрів, як термічний опір і ємність матеріалів. У багатьох дослідженнях [24, 25] наведено приклади методів моделювання температурних полів і їх використання для вдосконалення теплової конструкції перетворювача, зібраного на друкованій платі. Термічне 3D-моделювання силового перетворювача на базі FEM та його використання для аналізу конструкції електронного пристрою наведено в роботі [16]. Використаний метод оптимізації конструкції пристроїв призводить до зменшення об'єму DC–DC перетворювача [21].

У роботі [7] розглянуто особливості чисельного моделювання температурного поля електронних пристроїв за допомогою інфрачервоної термографії. Встановлено, що теплове моделювання електронних пристроїв є одним із найважливіших інструментів оцінювання їх надійності за різних режимів роботи. У своєму дослідженні автори навели теплову модель електронних пристроїв, яка базується на даних, отриманих інфрачервоною камерою. Друковану плату (англ. *Printed Circuit Board*, PCB), як основу електронних пристроїв, вони розділили на п'ять зон залежно від їх температури. Потім апроксимували потужності, що розсіюються та поглинаються кожною зоною, їхні стаціонарні температури, коефіцієнт конвективної теплопередачі тощо. Зазначені вище дані автори використали як вхідні дані для розробленої моделі, яка базується на методі скінченних різниць і деяких добре відомих фізичних залежностях. Розроблена

модель верифікована шляхом порівняння результатів моделювання з експериментально отриманими даними. Таку модель можна використовувати для дослідження теплової поведінки електронних пристроїв за різних умов експлуатації.

У роботі [21] проаналізовано теплові та електричні параметри модуля електромеханічного пристрою, який перетворює вихід джерела постійного струму (DC) від одного рівня напруги до іншого на підставі резонансно-комутованого конденсаторного перетворювача. Авторська розробка представляє концептуальну конструкцію пристрою, параметри його функціонування, результати експериментального дослідження та теплову чисельну модель, розв'язану за допомогою методу скінченних елементів. Проаналізований блок електромеханічного пристрою можна використовувати як окремий перетворювач постійного струму високої потужності або як модуль для масштабованої високовольтної системи підсилення. Запропонований підвищувальний перетворювач DC–DC має значно меншу конструкцію та використаний перелік термочутливих матеріалів, оскільки в ньому не використовують типові дроселі та радіатори. Він заснований на схемах комутованих конденсаторів, підтримуваних резонансним дроселем, який захищає від перепадів струму. Друковану плату використано не тільки для конструкції резонансної індуктивності, а й для охолодження транзисторних і діодних електронних пристроїв. Експериментальні результати показують розподіл тепла на друкованій платі та компонентах у стаціонарному та динамічному станах. Також здійснено заміри теплових параметрів роботи перетворювача, визначено його теплову структуру та ефективність роботи. Продемонстровано збіжність результатів проведеного експерименту з результатами моделювання процесу нагрівання конструкції перетворювача за екстремальних режимів його роботи. Чисельну модель можна використовувати для дослідження проектних випадків.

У роботі [6] наведено результати чисельного моделювання температурного режиму роботи друкованої плати. Для цього було розроблено моделі, що описують процес розсіювання теплоти друкованою платою з електронними компонентами SMD (англ. *Surface Mount Device*). Цей процес заснований на відомих фізичних залежностях і методі скінченних різниць. Було проведено експериментальне дослідження та здійснено заміри декількох температур: досліджуваної друкованої плати, корпусу (коробки) електронного пристрою та навколишнього середовища. Виміряні значення використано для отримання вхідних параметрів моделі та її перевірки на адекватність. Отримані результати показали, що змодельовані та виміряні температури друкованої плати, а також корпусу електронного пристрою практично ідентичні. Це свідчить про можливість використання розробленої моделі для дослідження теплового режиму роботи електронного обладнання з високою точністю отриманих результатів.

У роботі [17] наведено результати чисельного моделювання процесу теплопровідності в ребрах водоповітряного конвектора електронних модулів з використанням програмної системи ABAQUS, призначеної для аналізу об'єктів скінченних елементів і систем автоматизованого проектування. Обчислювальну сітку моделі було адаптовано до методу скінченних елементів спеці-

ального призначення, який використовує явну схему інтегрування для розв'язання систем нелінійних рівнянь з багатьма складними даними за перехідних навантажень. За результатами моделювання визначено середню температуру зовнішньої поверхні теплообмінника та відповідний коефіцієнт конвекції тепла. Процес теплопровідності у ребрах конвектора було змодельовано на підставі граничних умов, значення яких отримано шляхом моделювання процесу конвекції тепла в трубах конвектора. Середні теплові параметри було визначено відносно першого, середнього та останнього ребер конвектора шляхом розроблення геометричної його моделі в середовищі ABAQUS. Обчислювальну сітку моделі перевірено у спосіб збільшення кількості комірок і вузлів. Коефіцієнт зовнішньої конвекції тепла розраховано за законом Ньютона.

У роботі [19] проаналізовано вплив теплових чинників на продуктивність високопотужного світловипромінювального діода (HPLED). Аналіз проводили для консолідації різних термічних чинників, які впливають на продуктивність роботи потужних світлодіодів, а також узагальнення різних підходів до їх охолодження, які покращують як ефективність роботи, так і термін служби світлодіодних ламп. Обговорено термічні чинники, такі як термічний опір, опір тепловому розповсюдженню, матеріал теплопередачі, теплову ємність матеріалу, активні та пасивні системи охолодження, придатні для потужних світлодіодних корпусів. Також досліджено вплив температури переходу на колір випромінюваного світла та термін служби світлодіода. Встановлено, що температура спаю світлодіода залежить від поданого струму і типу використовуваної системи охолодження. Вища температура переходу з поганим охолодженням призводить до зміни кольору світла та різко скорочує термін служби світлодіода. З огляду на це встановлено, що радіатор і теплові трубки є найкращим конструктивним рішенням для розсіювання тепла, а в деяких випадках й активні системи охолодження з використанням електричного вентилятора забезпечили найкращі результати для світлодіодних ламп.

З'ясовано, що проблему визначення температурних полів в елементах цифрових пристроїв з локальним зовнішнім нагріванням та із урахуванням термочутливості конструкційних матеріалів досліджує багато науковців, внаслідок чого отримано теоретичні та практичні результати. Для своїх досліджень вони використовували як аналітичні, так і числові методи моделювання процесу теплопередачі, насамперед методи скінченних елементів і скінченних різниць. Тому результати цього дослідження є тільки незначним внеском у науку про закономірності процесів поширення теплоти в просторі з різномірними полями температур – теорію тепломасообміну (теплопередачі), насамперед її аналітичних методів.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – наведено метод лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримано в замкненому вигляді аналітичні розв'язки відповідних лінійної та нелінійної крайових задач для ізотропних просторових середовищ, що піддаються зовнішньому локальному тепловому нагріванню.

Практична значущість результатів дослідження – на основі отриманих аналітичних розв'язків лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних просторових середовищ зі зовнішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів в окремих конструкційних елементах і вузлах електронних пристроїв, що піддаються зовнішнім тепловим впливам, для прогнозування їх режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів і підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновок / Conclusions

Унаслідок здійсненого дослідження розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі теплопровідності для ізотропних просторових середовищ, які піддаються зовнішньому локальному нагріванню, що дало змогу підвищити точність визначення температурних полів, а також надалі вплине на ефективність методів проектування сучасних електронних пристроїв. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі висновки:

1. Наведено спосіб лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримано в замкненому вигляді аналітичні розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач для ізотропного середовища, що піддаються зовнішньому локальному тепловому нагріванню. На цій основі можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних режимів в окремих конструкційних вузлах і їх елементах електронних пристроїв, що піддаються зовнішньому локальному тепловому впливу, для прогнозування режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів і підвищення термостійкості, що збільшує термін експлуатації цих пристроїв.
2. Розроблені математичні моделі теплопровідності дають змогу виявити незначний вплив термочутливості конструкційних матеріалів на розподіл температури в наведеній структурі. Це можна пояснити тим, що значення температурного коефіцієнта теплопровідності для вибраного матеріалу (кремнію), який характеризує його термочутливість на заданому інтервалі температур, є невеликим.
3. Надалі будуть проведені дослідження для низки матеріалів, які використовують у процесі проектування електронних пристроїв, щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури з використанням наведених розроблених математичних моделей. Урахування термочутливості конструкційних матеріалів для визначення температурних полів, а надалі й аналізу температурних режимів значно ускладнює процес розв'язування відповідних нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

1. Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*. Vol. 22, Issue 5, 1801–1812. URL: https://scientiairanica.sharif.edu/article_3743.html
2. Boris, Evstatiev, & Nadezhda, Evstatieva. (2023). Experimental Study of the Temperature Field of an Electronic Module, 2023 18th Conference on Electrical Machines, Drives and Power Systems (ELMA), Varna, Bulgaria, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ELMA58392.2023.10202323>
3. Demirbas, M. D. (2017). Thermal stress analysis of functionally graded plates with temperature-dependent material properties using theory of elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 131, 100–124. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.005>

4. Eker, M., Yarimpabuç, D., & Celebi, K. (2020). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371–391. <https://doi.org/10.1108/EC-02-2020-0120>
5. Eric ,Monier-Vinard, Najib, Laraq, Cheikh-Tidiane, Dia, Minh-Nhat, Nguyen, & Valentin, Bissuel. (January 2015). Analytical modeling of multi-layered Printed Circuit Board dedicated to electronic component thermal characterization. *Solid-State Electronics*, 103, 30–39. <https://doi.org/10.1016/j.sse.2014.09.004>
6. Evstatieva, N., & Evstatiev, B. (2021). Modelling the Temperature Conditions of a Printed Circuit Board," 2021 12th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE). Bucharest, Romania, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ATEE52255.2021.9425281>
7. Evstatieva, N., & Evstatiev, B. (2023). Modelling the Temperature Field of Electronic Devices with the Use of Infrared Thermography. 2023 13th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), Bucharest, Romania, 1–5. <https://doi.org/10.1109/ATEE58038.2023.10108375>
8. Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermoelasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *International Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, 8(4), 1–12. URL: https://admt.isfahan.iau.ir/article_534941_fe4ca85ae96b02e7c3a17a0a2e725c7f.pdf
9. Gong, J., Xuan, L., Ying, B., & Wang, H. (2019). Thermoelastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method. *Composite Structures*, 224. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111071>
10. Haopeng, S., Kunkun, X., & Cunfa, G. (2021). Temperature, thermal flux and thermal stress distribution around an elliptic cavity with temperature-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 216, 136–144. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.010>
11. Haoran, L., Jiaqi, Y., & Ruzhu, W. (2023). Dynamic compact thermal models for skin temperature prediction of portable electronic devices based on convolution and fitting methods, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 210. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124170>
12. Havrysh, V. I., & Hrytsiuk, Y. I. (2021). Analysis of temperature regimes in heat-sensitive layered elements of digital devices caused by internal heating. *Scientific Bulletin of UNFU*, 31(5), 108–112. <https://doi.org/10.36930/10.36930/40310517>
13. Havrysh, V. I., & Mayher, V. Y. (2021). Temperature field in a plate with local heating. *Scientific Bulletin of UNFU*, 31(4), 120–125. <https://doi.org/10.36930/40310420>
14. Havrysh, V. I., & Shkrab, R. R. (2023). Mathematical models for the determination of temperature fields in heterogeneous elements of digital devices taking thermo sensitivity into account. *Ukrainian Journal of Information Technology*, 5(1), 17–24. <https://doi.org/10.23939/ujit2023.01.017>
15. Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., Ukhanska, O. M., & Loik, V. B. (2019). Determination of temperature fields in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universitetu*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu.2019-1/5>; URL: https://nvngu.in.ua/jdownloads/pdf/2019/01/01_2019_Havrysh.pdf
16. Kim, N., & Han, C. (2014). Thermal analysis and design of a 75-W hybrid-type DC–DC converter for space applications. *Microelectronics Reliability*, 54(8), 1555–1561. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2014.03.011>
17. Kolev, Z., & Kadirova, S. (2020). Numerical modeling of the thermal conduction process in water-air convectors fins. *E3S Web of Conferences*. 2020 9th International Conference on Thermal Equipments, Renewable Energy and Rural Development (TE-RE-RD) 2020), 180, 1–10. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202018001009>
18. Mathew, J., & Krishnan, S. (2021). A Review on Transient Thermal Management of Electronic Devices. *Journal of Electronic Packaging*, 144(1), 20. <https://doi.org/10.1115/1.4050002>
19. Rammohan, A., & Ramesh, C. K. (2016). A Review on Effect of Thermal Factors on Performance of High Power Light Emitting Diode (HLED). *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 9(4), 165–176. <https://doi.org/10.25103/jestr.094.24>
20. Robert, Stala, Adam, Pilat, Maciej, Chojowski, Mikołaj, Skowron, & Szymon, Folmer (2022). Thermal and Electric Parameter Analysis of DC–DC Module Based on Resonant Switched Capacitor Converter. *Energies*, 15(19). <https://doi.org/10.3390/en15197040>
21. Vasyi, Havrysh, & Volodymyr, Kochan. (2023). Mathematical Models to Determine Temperature Fields in Heterogeneous Elements of Digital with Thermal Sensitivity Taken into Account. Proceedings of the 12th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, IDAACS, 2, 983–991.
22. Vasyi, Havrysh, Liubov, Koliassa, & Svitlana, Vozna. (2021). Temperature field in a layered plate with local heating. *International scientific journal "Mathematical modeling"*, 5(3), 90–94. URL: <https://stumejournals.com/journals/mm/2021/3/90>
23. Vincenzo, Bianco, Mattia, De Rosa, & Kambiz, Vafai. (2022). Phase-change materials for thermal management of electronic devices. *Applied Thermal Engineering*, 214. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.118839>
24. Waradzyn, Z., Stala, R., Mondzik, A., Penczek, A., Skala, A., & Pirog, S. (2017). *Efficiency Analysis of MOSFET-Based Air-Choke Resonant DC–DC Step-Up Switched-Capacitor Voltage Multipliers*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 64(11), 8728–8738. <https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2698368>
25. Waradzyn, Z., Stala, R., Mondzik, A., Skala, A., & Penczek, A. (2020). GaN-Based DC-DC Resonant Boost Converter with Very High Efficiency and Voltage Gain Control. *Energies*, 13(23). <https://doi.org/10.3390/en13236403>
26. Yaghoobi, M. P., & Ghannad, M. (2020). An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104684>
27. Zhang, Y., & Bagnoli, P. E. (2014). A modeling methodology for thermal analysis of the PCB structure. *Microelectronics Journal*, 45(8), 1033–1052. <https://doi.org/10.1016/j.mejo.2014.04.042>
28. Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>

V. I. Havrysh, R. R. Shkrab

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELS FOR THE DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS IN ELEMENTS OF DIGITAL DEVICES WITH LOCAL EXTERNAL HEATING AND TAKING THERMO SENSITIVITY INTO ACCOUNT

Linear and non-linear mathematical models for the determination of the temperature field, and subsequently for the analysis of temperature regimes in isotropic spatial environments subjected to external local heat load, have been developed. In the case of a nonlinear boundary-value problem, the Kirchhoff transformation is applied, using which the original nonlinear heat conduction

equation and nonlinear boundary conditions are linearized, and as a result, a linearized second-order differential equation with partial derivatives and boundary conditions with a discontinuous right-hand side are obtained. For solving the linear boundary value problem, as well as the obtained linearized boundary value problem with respect to the Kirchhoff transformation the Henkel integral transformation method was used, as a result of which analytical solutions of these problems were obtained. For a heat-sensitive environment, as an example, a linear dependence of the coefficient of thermal conductivity of the structural material of the structure on temperature, which is often used in many practical problems, was chosen. As a result, an analytical relationship was obtained for determining the temperature distribution in this medium. Numerical analysis of temperature behaviour as a function of spatial coordinates for given values of geometric and thermophysical parameters was performed. The influence of the power of external heat sources, thermophysical and geometric parameters of the environment on the temperature distribution was studied. To determine the numerical values of the temperature in the given structure, as well as based on this and the analysis of the heat exchange processes in the middle of these structures caused by the external heat load, software tools were developed, using which a geometric image of the temperature distribution depending on the spatial coordinates was made. The developed linear and non-linear mathematical models for determining the temperature field in spatial environments with external heating testify to their adequacy to a real physical process. They enabled analyzing such environments for their thermal stability. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause the destruction of both individual nodes and their elements, and also the entire structure.

Keywords: temperature field; isotropic spatial heat-active environment; thermal conductivity; convective heat exchange; local external heating; thermosensitivity, heat flow.