



М. І. Опришко

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФРАКТАЛЬНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ БАРНСЛІ ДЛЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Проаналізовано ефективність застосування методу фрактальної інтерполяції Барнслі для фінансових часових рядів. Продемонстровано результати роботи класичних методів інтерполяції, враховуючи лінійний, ступінчасті, кусково-кубічний, кубічної згортки, модифікований алгоритми кубічної інтерполяції Акіма та метод інтерполяції сплайнами. Виконано порівняння результатів роботи методу фрактальної інтерполяції Барнслі із результатами роботи класичних методів інтерполяції на прикладі часового ряду ціни Біткоїн. Часовий ряд – це дані курсів криптовалюти Біткоїн до долара США станом на кожну хвилину за період з 2015 по 2022 рр., тому часовий ряд є регулярним і налічує понад 3,5 млн вузлових точок. Для застосування методів вибрано деякий фрагмент часового ряду, після чого навмисно зменшено кількість вузлових точок, що надалі дало змогу порівняти отримані значення інтерпольованих точок з їх істинними значеннями. Обчислено відносні похибки розрахованих точок інтерполяції для оцінювання роботи методів. Зроблено висновки стосовно доцільності використання розглянутих методів для відновлення відсутніх значень цін криптовалюти Біткоїн та неповних даних фрактальних часових рядів загалом. Удосконалено алгоритм Барнслі у спосіб його поєднання з лінійним методом інтерполяції. Такий підхід дає змогу розрахувати значення для наперед визначених точок інтерполяції, водночас, зберігши високий рівень точності. Розраховано значення найоптимальнішого коефіцієнта вертикального стиснення з використанням симплексного методу пошуку Лагаріаса, що дало змогу підібрати таку фрактальну інтерполяційну функцію, із застосуванням якої похибку результатів інтерполяції буде зведено до мінімуму. Встановлено, що метод Барнслі, на відміну від класичних методів, зберігає фрактальну структуру і властивості інтерпольованого часового ряду та за умови оптимального підбору вільних параметрів, має найменшу похибку серед порівнюваних методів. Отримані результати можуть бути корисними для аналізу та прогнозування цін на фінансових ринках, а розглянуті методи можуть бути застосовані для інтерполяції даних і в інших галузях, таких як медицина, фізика, соціологія та інші.

Ключові слова: фрактал; криптовалюта; Біткоїн; симплекс-метод; неповні дані; інтерполяційна функція.

Вступ / Introduction

Алгоритми інтерполяції часових рядів дають змогу розрахувати значення, що містяться між заданими вузловими точками. Отже, ці алгоритми можуть бути корисними, коли потрібно отримати регулярний часовий ряд, маючи дані, що відповідають різним часовим проміжкам або коли потрібно збільшити частоту даних (наприклад, маючи дані станом на кожну годину отримати дані станом на кожну хвилину). Також алгоритми інтерполяції корисні, коли часові ряди містять відсутні значення через помилки або проблеми, пов'язані зі збором даних [8]. Інтерполяцію можна використовувати для обчислення відсутніх значень на підставі доступних даних, що дає змогу отримати більш детальну та повну картину розвитку подій при їх аналізі. Часто аналіз даних можливий і без розрахунку відсутніх значень, проте існує ймовірність того, що зроблені висновки будуть неточними. Алгоритми інтерполяції вирішують цю проблему шляхом розрахунку точних або наближених значень для відсутніх елементів часового ряду.

Одним з ключових завдань у розробленні методів

інтерполяції часових рядів є зменшення похибки та збільшення точності. Одним з таких методів є метод фрактальної інтерполяції Барнслі, який базується на теорії фракталів та дає змогу відтворити складні структури, що складаються з багатьох маленьких деталей. Цей метод може бути особливо корисним для інтерполяції нестационарних часових рядів, де структура даних змінюється в часі.

Важливо зазначити, що криптовалюта Біткоїн, як і багато інших криптовалют, має досить високий ступінь волатильності, а передбачення її майбутніх цін є основним завданням для інвесторів та трейдерів. Тому методи інтерполяції часових рядів є важливим інструментом їх дослідження, оскільки вони можуть підвищити точність фінансового аналізу, що, водночас, дасть змогу прийняти кращі інвестиційні рішення та стратегії управління ризиками.

Зважаючи на актуальність описаної проблематики, поставлено завдання дослідити ефективність застосування методу фрактальної інтерполяції Барнслі для фінансових часових рядів.

Об'єкт дослідження – застосування фрактальної ін-

Інформація про автора:

Опришко Мар'ян Іванович, аспірант, кафедра інформаційних технологій.

Email: m.opryshko@nltu.edu.ua; <https://orcid.org/0009-0009-7981-9249>

Цитування за ДСТУ: Опришко М. І. Дослідження ефективності застосування методу фрактальної інтерполяції Барнслі для часових рядів. Науковий вісник НЛТУ України. 2023, т. 33, № 3. С. 66–70.

Citation APA: Opryshko, M. I. (2023). Investigation of the effectiveness of applying the Barnsley fractal interpolation method for time series. *Scientific Bulletin of UNFU*, 33(3), 66–70. <https://doi.org/10.36930/40330309>

терполяції Барнслі для часових рядів.

Предмет дослідження – методи і засоби встановлення ефективності застосування фрактальної інтерполяції типу Барнслі для часового ряду, що представляє ціну криптовалюти Біткоїн за певний період часу.

Мета роботи – розробити алгоритмічне та програмне забезпечення для визначення ефективності застосування методу фрактальної інтерполяції Барнслі для часових рядів.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- зібрати дані щодо ціни криптовалюти Біткоїн;
- модифікувати алгоритм фрактальної інтерполяції Барнслі для обчислення інтерпольованих значень у наперед заданих точках;
- знайти оптимальне значення коефіцієнта вертикального стиснення;
- здійснити програмну реалізацію порівнюваних методів інтерполяції для заданого часового ряду;
- проаналізувати отримані результати інтерполяції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. За останні роки методи інтерполяції стали предметом активних досліджень і публікацій у науковій спільноті. Велика кількість цих досліджень зосереджена саме на інтерполяції часових рядів. Одними з найцікавіших робіт, пов'язаних з темою інтерполяції часових рядів, є ті, у яких застосовують фрактальні методи.

Детально ознайомитись із принципом роботи методу фрактальної інтерполяції типу Барнслі можна у його дослідженні [1]. Приклад практичного застосування алгоритму можна знайти у роботі [4], де його використали для аналізу цін акцій публічної компанії, також автор статті провів порівняння із лінійним методом інтерполяції. Для оптимального вибору функції інтерполяції

у роботі [10] запропоновано використовувати змінний коефіцієнт вертикального стиснення замість постійного параметра. У публікації [6] пропонують новий підхід до фрактальної інтерполяції великих наборів даних, що викликає особливу зацікавленість. Оскільки фрактальний метод застосовується уже давно, існує велика кількість його інтерпретацій і модифікацій [5], але разом з тим, корисно визначити наскільки ефективним є його застосування для часових рядів порівняно з класичними методами інтерполяції.

Згадані дослідження та публікації свідчать про активний інтерес до використання фрактальної інтерполяції для аналізу та прогнозування часових рядів. Вони демонструють високу точність, здатність зберігати структурні особливості ряду та є ефективними в різних задачах. Аналізуючи останні наукові роботи, можна встановити, що фрактальна інтерполяція має великий потенціал у багатьох галузях, включаючи аналіз часових рядів [4], медичні дослідження [7] та оброблення зображень [2]. Дослідження у цій області продовжуються, що дає змогу покращувати методи інтерполяції та розширювати область їх застосування.

Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Для проведення досліджень використано дані ціни криптовалюти Біткоїн за останні 7 років. Для отримання цих даних взято значення ціни активу станом на кожну хвилину, що дало змогу сформулювати часовий ряд з більше ніж 3,5 млн вузлових точок (рис. 1). Дані було отримано із загальнодоступного інтернет-джерела – <https://www.cryptodatadownload.com>.

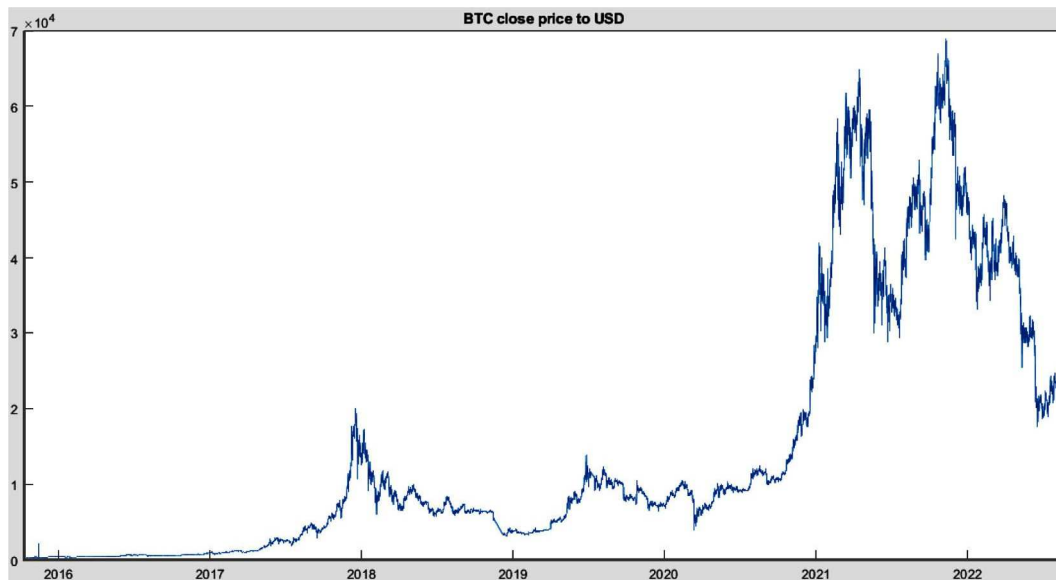


Рис. 1. Графік ціни криптовалюти Біткоїн / Bitcoin cryptocurrency price chart

Для аналізу та оброблення зібраних даних використано середовище MATLAB версії 9.8, яке дає змогу проводити різноманітні обчислення оперуючи великими об'ємами даних, що є необхідною умовою для реалізації алгоритмів інтерполяції часових рядів.

Метод фрактальної інтерполяції Барнслі – це потужний інструмент, який знайшов широке застосування в різних галузях, таких як медицина, економіка, біологія та інші [1, 5]. В основі роботи алгоритму закладено систему ітераційних функцій (формула 1), яка дає змогу

побудувати детальнішу самоподібну структуру часового ряду [1]:

$$\{(X_i, F_i) \in R^2 : i = 0, 1, 2, \dots, N\}, X_0 < X_1 < X_2 < X_3 < \dots < X_N. \quad (1)$$

Точки $(X_i, F_i) \in R^2$ є точками інтерполяції.

Алгоритм базується на чотирьох афінних перетвореннях, а саме:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де:

$$a_n = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_N - X_0}; e_n = \frac{X_N X_{n-1} - X_0 X_n}{X_N - X_0};$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{X_N - X_0} - d_n \frac{F_N - F_0}{X_N - X_0};$$

$$f_n = \frac{X_N F_{n-1} - X_0 F_n}{X_N - X_0} - d_n \frac{X_N F_0 - X_0 F_N}{X_N - X_0}.$$

У виразі (2) d є вільним параметром і представляє коефіцієнт вертикального стиснення, $a, b = 0$.

Алгоритм методу Барнслі передбачає відтворення цілого фракталу між всіма вузловими точками, тому, на відміну від інших методів інтерполяції, такий підхід не дає змоги отримати інтерпольовані значення у заданих точках X . Отже, з метою обчислення даних для заданого вектора X , було удосконалено алгоритм Барнслі у спосіб його використання у поєднанні із лінійним методом інтерполяції, а саме:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (3)$$

Тобто отримані результати роботи алгоритму та задані точки, для яких потрібно знайти шукані значення передаються як аргументи функції лінійної інтерполяції, внаслідок чого отримуємо інтерпольовані значення ціни для заданого вектора часу X . Про переваги поєднання фрактальних методів інтерполяції із класичними методами йдеться у дослідженні [9].

Окрім цього, важливою особливістю у застосуванні алгоритму Барнслі є оптимальний вибір коефіцієнта вертикального стиснення (d_n). Для досліджуваного часового ряду цей параметр обчислено за допомогою сим-

плекс-методу Лагаріаса для пошуку мінімуму заданої функції, що бере за основу алгоритм Нелдера-Міда [3]. Цей метод використано для пошуку такого значення коефіцієнта d_n , за якого відхилення інтерпольованих значень від реальних вузлових точок буде мінімальним.

Для визначення ефективності фрактального методу проведено порівняльний аналіз результатів з результатами класичних методів інтерполяції, включаючи лінійний, ступінчасті, кусково-кубічний, кубічної згортки, модифікований алгоритм кубічної інтерполяції Акіма та метод інтерполяції сплайнами. Для перевірки роботи методів вибрано 11 елементів представленого часового ряду із кроком 10 та проведено його інтерполяцію різними методами (рис. 2).

Аналізуючи результати роботи алгоритмів між довільно-вибраними сусідніми вузловими точками (рис. 3) можна зауважити, що інтерпольовані дані методом Барнслі утворюють фрагмент часового ряду, який схожий за структурою до початкового, тобто доповнений часовий ряд є самоподібним, що підтверджує ефективність застосування алгоритму для фрактальних часових рядів.

Щоб обчислити відносні похибки (формула 4) для кожної з інтерпольованих точок використовувалися їх початкові значення, які не були задіяні при роботі алгоритмів інтерполяції (рис. 4).

$$\Delta = x - x_{icm}; \delta = \frac{\Delta}{x_{icm}} \cdot 100\%. \quad (4)$$

На рис. 4 виділено ступінчасті методи, інтерпольовані значення яких мають найбільше відхилення.

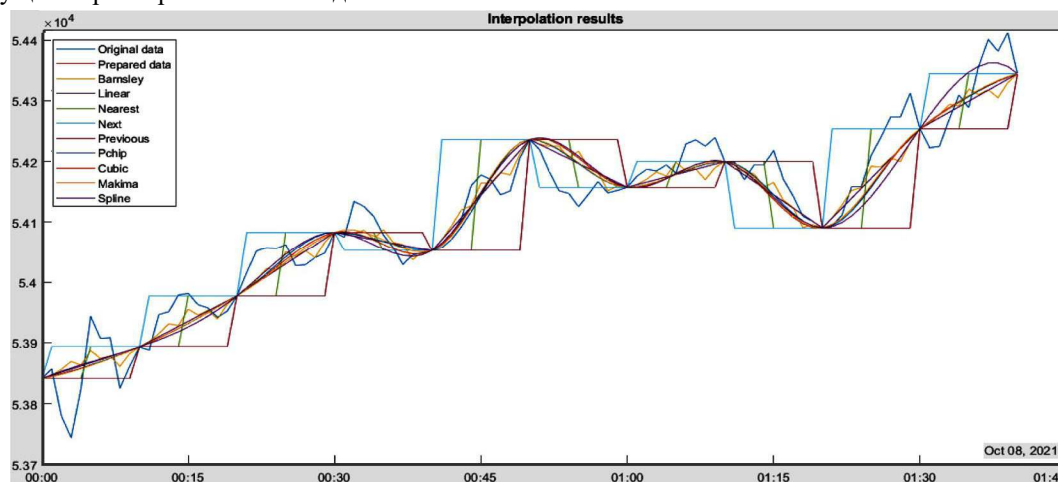


Рис. 2. Результат інтерполяції часового ряду різними методами / The result of time series interpolation by different methods

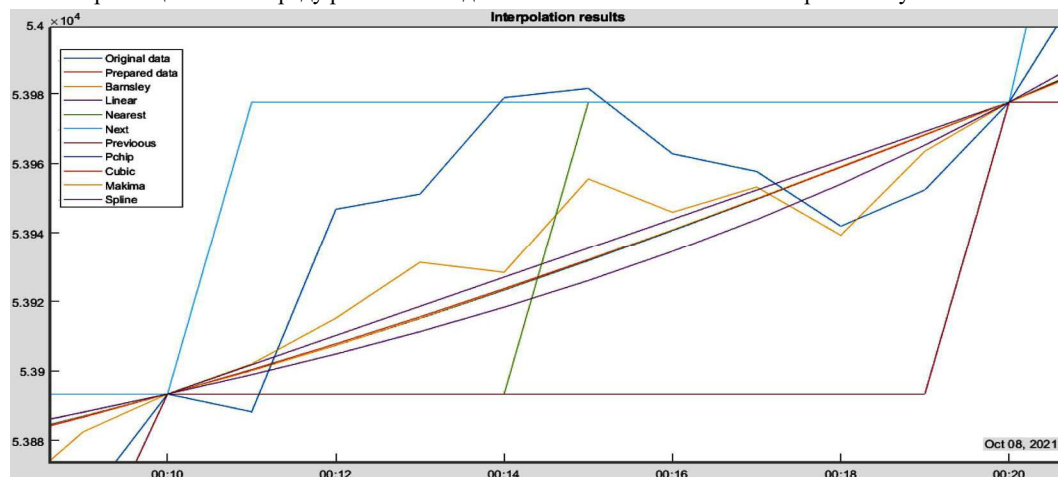


Рис. 3. Фрагмент інтерпольованих даних між двома вузловими точками / Fragment of interpolated data between two nodes

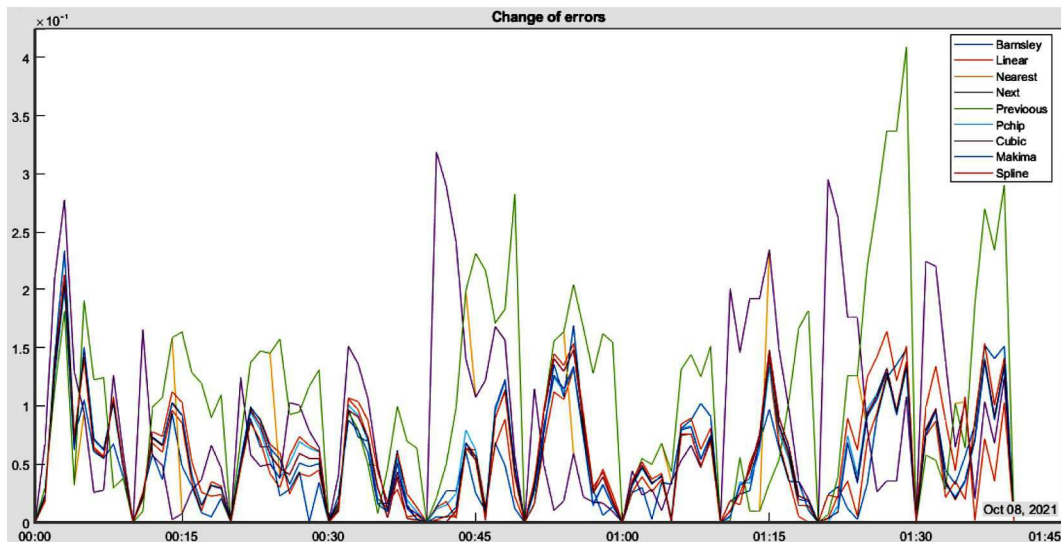


Рис. 4. Графік зміни відносних похибок / Graph of changes in relative errors

Обчисливши середні значення відносних похибок для кожного із методів (рис. 5), можна встановити, що метод фрактальної інтерполяції Барнслі показав найбільш близькі до реальних значень результати. Що стосується класичних методів інтерполяції, то деякі з них можуть давати високу точність і можуть застосовуватись для інтерполяції фрактальних часових рядів тільки у тих випадках, коли їх фрактальними властивостями можна знехтувати. Не рекомендовано обирати ступінчасті методи для інтерполяції фрактальних часових рядів, оскільки вони мають найбільшу похибку обчислення.

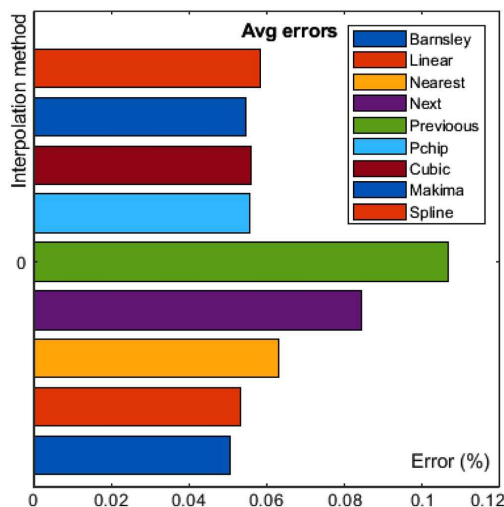


Рис. 5. Середні значення похибок методів інтерполяції / Average errors of interpolation methods

Обговорення результатів дослідження. У роботах [4, 8] також проведено дослідження ефективності методу фрактальної інтерполяції, проте результати порівнюються із меншою кількістю класичних методів, окрім того у роботах застосовано інші методи пошуку вільних параметрів, від яких залежить вибір оптимальної фрактальної інтерполяційної функції. Клас ітераційних функцій, наведений у роботі [10], дає змогу побудувати фрактальну інтерполяційну функцію з більшою гнучкістю, однак у роботі не передбачено можливості обчислення наперед заданих точок інтерполяції. У дослідженнях [6, 9] запропоновано нові схеми фрактальної інтерполяції, проте не висвітлено їх ефективності порівняно з іншими методами. Результати, отримані у роботах [2, 7], хоч і демонструють високу ефективність

застосування фрактального методу інтерполяції, проте процес обчислення оптимальних значень вільних параметрів розкрито частково. У цьому дослідженні обчислено проміжні значення елементів часового ряду, однак окрім подібного застосування, існує великий спектр задач, для вирішення яких є необхідним застосування методів інтерполяції.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено алгоритм відновлення пропущених даних фрактальних часових рядів для заданих точок інтерполяції із застосуванням методу Барнслі.

Практична значущість результатів дослідження – можливість використання розробленого алгоритму для відновлення неповних даних ціни, представлених за певний період, та інших характеристик фінансових активів (капіталізації, обсягу торгів) станом на заданий момент часу.

Висновки / Conclusions

Внаслідок виконання роботи розроблено алгоритмічне та ПЗ для визначення ефективності застосування методу фрактальної інтерполяції Барнслі для часових рядів. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. Проведено порівняльний аналіз роботи фрактального методу інтерполяції Барнслі з класичними методами на прикладі часового ряду ціни криптовалюти Біткоїн. Розроблено алгоритм для відновлення неповних даних фрактальних часових рядів у заданих точках інтерполяції. Розраховано значення найоптимальнішого коефіцієнта вертикального стиснення з використанням симплексного методу пошуку Лагаріаса для вибору фрактальної інтерполяційної функції. Обчислено відносні похибки для інтерпольованих значень досліджуваних методів.

2. Встановлено, що алгоритм Барнслі, на відміну від класичних методів, зберігає фрактальну структуру часового ряду, а також має найменшу похибку серед досліджуваних методів. Інтерпольовані дані фрактальним методом Барнслі утворюють фрагмент часового ряду, що схожий за структурою до початкового, тобто доповнений часовий ряд є самоподібним.

3. Фрактальний метод Барнслі є ефективним для інтерполяції фінансових часових рядів і його можна використати для вирішення практичних завдань. Отримані результати можуть бути корисними для науковців і практиків, які працюють у галузі аналізу часових рядів і потребують високоточної інтерполяції, а також для інвесторів та учасників біржової торгівлі різного роду активами.

References

1. Barnsley, Michael F. (2012). *Fractals Everywhere*. Mineola: Dover Publications, 531 p. URL: <https://shop.elsevier.com/books/fractals-everywhere/barnsley/978-0-12-079061-6>
2. Kok, C. W., & Tam, W. S. (2019). Fractal Image Interpolation: A Tutorial and New Result. *Fractal and Fractional*, 3(1). <https://doi.org/10.3390/fractalfract3010007>
3. Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., & Wright, P. E. (1998). Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, 9(1), 112–147. <https://doi.org/10.1137/S1052623496303470>
4. Leon-Ogazon, M., A., Romero-Flores, E., A., Morales-Acoltzi, T., Machorro-Rodriguez, A., & Salazar-Medina, M. (2017). Fractal Interpolation in the Financial Analysis of a Company. *International Journal of Business Administration*, 8(1), 80–86. <https://doi.org/10.5430/ijba.v8n1p80>
5. Manousopoulos, P., Drakopoulos, V., & Theoharis, T. (2008). Curve fitting by fractal interpolation. *Transactions on Computational Science I*, 4750, 85–103. https://doi.org/10.1007/978-3-540-79299-4_4
6. Miculescu, R., Mihail, A., & Pacurar, C. R. (2022). A fractal interpolation scheme for a possible sizeable set of data. *Journal of Fractal Geometry*. <https://doi.org/10.4171/jfg/117>
7. Păcurar, C. M., & Necula, B. R. (2020). An analysis of COVID-19 spread based on fractal interpolation and fractal dimension. *Chaos Solitons Fractals*, 139. <https://doi.org/10.1016.2Fj.chaos.2020.110073>
8. Panasenکو, O., & Tkachenko, S. (2019). Analysis of the efficiency of the use of fractal interpolation for filling spaces in data arrays. URL: <https://93.183.203.244/xmlui/handle/123456789/5931>
9. Somogyi, I., & Soós, A. (2021). Graph-directed random fractal interpolation function. *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, 66(2), 247–255. <https://doi.org/10.24193/subbmath.2021.2.01>
10. Wang, H. Y., & Yu, J. S. (2013). Fractal interpolation functions with variable parameters and their analytical properties. *Journal of Approximation Theory*, 175, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.07.008>

M. I. Opryshko

Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine

INVESTIGATION OF THE EFFECTIVENESS OF APPLYING THE BARNSLEY FRACTAL INTERPOLATION METHOD FOR TIME SERIES

In this study, the effectiveness of applying the Barnsley fractal interpolation method for financial time series has been analyzed. Moreover, within the scope of this investigation, a demonstration and comparison of the results of classical interpolation methods have been conducted, including linear, nearest neighbour, next neighbour, previous neighbour, piecewise cubic, cubic convolution, modified Akima cubic interpolation algorithm, and spline interpolation method. For example, the study tested the Barnsley fractal interpolation method against classical interpolation methods using the Bitcoin price time series as a case study. The Bitcoin price time series represents cryptocurrency exchange rates against the US dollar on a minute-by-minute basis from 2015 to 2022, comprising over 3.5 million data points. To compare the accuracy of interpolated values with their true values, a specific segment of the time series is selected, and the number of data points is intentionally reduced. Consequently, the relative errors of the calculated interpolation points are evaluated to assess the performance of the methods. Based on the obtained results, conclusions were drawn regarding the feasibility of using the discussed methods for restoring missing cryptocurrency Bitcoin prices and incomplete fractal time series data in general. Barnsley algorithm is further enhanced by combining it with the linear interpolation method, enabling the calculation of predefined interpolation points while maintaining a high level of precision. Additionally, the optimal value of the vertical compression coefficient was calculated using the Lagarias simplex search method to minimize errors in the interpolation results. Notably, Barnsley method, in contrast to classical methods, preserves the fractal structure and properties of the interpolated time series and, when free parameters are optimally selected, gives the lowest error among the compared methods. Consequently, the results obtained from this research can have practical implications for financial market analysis and forecasting. Furthermore, the discussed methods can find applications in other fields such as medicine, physics, sociology, etc., where data interpolation is required.

Keywords: fractal; cryptocurrency; Bitcoin; simplex method; incomplete data; interpolation function.