



В. І. Гавриш, Ю. І. Грицюк

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ЕЛЕМЕНТАХ ЕЛЕКТРОННИХ ПРИСТРОЇВ ІЗ НАПІВНАСКРІЗНИМИ ЧУЖОРІДНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі визначення температурного поля, а в подальшому і аналізу температурних режимів у ізотропних просторових середовищах із напівнаскрізними чужорідними теплоактивними включеннями. Для цього коефіцієнт теплопровідності для таких структур описано єдиним цілим за допомогою асиметричних одиничних функцій, що дає змогу розглядати крайові задачі теплопровідності з одним лінійним та нелінійним диференціальними рівняннями теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами та лінійними і нелінійними крайовими умовами на межових поверхнях середовищ. У випадку нелінійної крайової задачі запроваджено лінеаризуючу функцію, із використанням якої лінеаризовано вихідне нелінійне рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови і внаслідок отримано частково лінеаризоване диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними та розривними і сингулярними коефіцієнтами відносно лінеаризуючої функції з частково лінеаризованими крайовими умовами. Для остаточної лінеаризації частково лінеаризованих диференціального рівняння та крайових умов виконано апроксимацію температури за однією з просторових координат на межових поверхнях включення кусково-сталими функціями, внаслідок чого як диференціальне рівняння, так і крайові умови отримуються цілком лінеаризованими. Для розв'язування отриманої лінійної крайової задачі використано метод інтегрального перетворення Генкеля, внаслідок чого отримано аналітичний розв'язок, який визначає запроваджену лінеаризуючу функцію. Як приклад, вибрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів структури від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. У результаті отримано аналітичні співвідношення у вигляді квадратних рівнянь для визначення розподілу температури у термочутливому шарі з чужорідним напівнаскрізним включенням, в області якого зосереджено внутрішні джерела тепла. Для аналізу теплообмінних процесів у окремих вузлах та елементах наведеної конструкції, зумовлених внутрішнім тепловим навантаженням, на підставі отриманих аналітично-числових розв'язків відповідних крайових задач можна розробляти програмні засоби, які дають змогу геометрично відобразити розподіл температури за просторовими координатами в цій конструкції. Як наслідок, стає можливим підвищити її термостійкість і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих структурних вузлів та елементів, а й всієї конструкції.

Ключові слова: температурне поле; ізотропне неоднорідне середовище; теплопровідність; конвективний теплообмін; ідеальний тепловий контакт; внутрішнє нагрівання; джерела тепла; термочутливість, напівнаскрізне чужорідне включення.

Вступ / Introduction

Теплопровідність в мікроелектронних пристроях відіграє важливу роль в забезпеченні стабільної роботи та їх довговічності. Теплові процеси можуть впливати на ефективність, швидкість та точність функціонування мікроелектронних приладів, тому технології, які забезпечують високу теплопровідність, мають велике значення. Із використанням методів теплопровідності можна визначити швидкість поширення тепла з одного місця до іншого в матеріалах. У мікроелектронних пристроях, які інтенсивно функціонують щодо їх швидкодії

та високого рівня точності, в окремих вузлах та їх елементах генерується значна кількість тепла. Якщо відсутнє ефективне тепловідведення, то пристрій перегрівається і стає несправним.

Одним з основних способів забезпечення високої теплопровідності в мікроелектронних пристроях є використання матеріалів з високою теплопровідністю. Широко використовують метали, зокрема мідь і алюміній, які мають високу теплопровідність, а також матеріали, виготовлені на підставі кремнію, такі як силікон і оксид кремнію з меншою теплопровідністю, зате вони мають інші важливі властивості, завдяки чому їх виби-

Інформація про авторів:

Гавриш Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: vasyli.gavrysh@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

Грицюк Юрій Іванович, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення.

Email: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua; <https://orcid.org/0000-0001-8183-3466>

Цитування за ДСТУ: Гавриш В. І., Грицюк Ю. І. Математичні моделі визначення температурних полів у елементах електронних пристроїв із напівнаскрізними чужорідними включеннями. Науковий вісник НЛТУ України. 2023, т. 33, № 3. С. 55–65.

Citation APA: Havrysh, V. I., & Hrytsiuk, Yu. I. (2023). Mathematical models for the determination of temperature fields in elements of electronic devices with semi-through foreign inclusions. *Scientific Bulletin of UNFU*, 33(3), 55–65. <https://doi.org/10.36930/40330308>

рають для проектування пристроїв електронної техніки. Однак, на практиці теплопровідність матеріалів може значно знижуватися в результаті впливу різних факторів, таких як геометричні параметри, структура та мікроструктура матеріалів.

Велика кількість мікроструктурних дефектів може значно зменшити теплопровідність, що призводить до перегрівання окремих вузлів та елементів мікроелектронних пристроїв. Одним із підходів для забезпечення високої теплопровідності в мікроелектронних пристроях є використання матеріалів з низькою температурою плавлення, таких як індій та галій, які мають високу теплопровідність і можуть бути використані для покриття металевих поверхонь. Іншим способом є використання технологій для зменшення геометричних параметрів мікроелектронних пристроїв, що дає змогу збільшити їх теплову ємність та зменшити густину теплових втрат. Це досягають за допомогою нанотехнологій та мікроелектромеханічних систем.

Окрім цього, ефективне управління теплом може бути досягнуто за допомогою дизайну мікроелектронних пристроїв із урахуванням розміщення компонентів, конструкції теплових сполучень та використання термічних інтерфейсів. Використання термічних матеріалів, таких як термічна паста, дає змогу забезпечити ефективний теплообмін між компонентами, що зменшує ризики перегрівання пристроїв електронної техніки.

Об'єкт дослідження – лінійні та нелінійні процеси теплопровідності в ізотропних просторових середовищах, які піддаються внутрішньому нагріванню та містять чужорідні включення.

Предмет дослідження – лінійні та нелінійні математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків відповідних крайових задач для ізотропних просторових неоднорідних середовищ із внутрішнім нагріванням.

Мета роботи – розроблення лінійної та нелінійної математичних моделей теплопровідності для ізотропних просторових середовищ із чужорідними напівнаскрізними включеннями, які піддаються внутрішньому нагріванню, внаслідок чого є можливість підвищити точність визначення температурних полів, що у подальшому вплине на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких є неоднорідної структури і піддаються різної природи тепловим впливам.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі *основні завдання дослідження*:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямку розроблення лінійних та нелінійних математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкти дослідження та їх лінійні і нелінійні математичні моделі;
- навести спосіб лінеаризації нелінійної моделі;
- отримати аналітично-числові розв'язки лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників. Температура відіграє важливу роль для визначення фізичних і хімічних характеристик матеріалів. Цей вплив стає особливо значним, коли є великі коливання температури, як це спостерігається в процесах теплопровідності. Температурні перепади призводять до певних змін властивостей матеріалу, що усклад-

нює визначення розподілу температури та термічної напруги. У наслідку, визначення термопружного стану конструкцій стає значно складнішим.

У роботі [8] за допомогою узагальненого методу комплексної змінної досліджено термопружну задачу еліптичної порожнини в нескінченному середовищі. У результаті аналізу термопружного стану середовища враховано температурну залежність коефіцієнта теплопровідності, модуля пружності та коефіцієнта теплового розширення. Із урахуванням цих залежностей, отримано аналітичні вирази для температури, теплового потоку та термопружних полів. Наведено аналітичні вирази розподілу температури, переміщень і напружень у шаруватих прямокутних пластинах з простою опорою, які піддаються термомеханічним навантаженням. Властивості матеріалу шарів залежать від температури [34]. Досліджено термопружні параметри функціонально градуїзованих пористих пластин з різним розподілом матеріалу та виявлено, що термічні напруження дещо чутливіші до розподілу матеріалу, ніж температура та деформації [6]. У роботі [3] дослідження спрямовані на визначення впливу температурної залежності властивостей матеріалу та показників композиційного градієнта у функціонально градуїзованих прямокутних пластинах щодо температури, деформацій та напружень. Наведено розв'язок для сталого стану реакції товстих циліндрів, які піддаються тиску та зовнішньому тепловому потоку на внутрішній поверхні [5]. Виконано термічний аналіз циліндрів різної товщини, виготовлених із функціонально градуїзованих матеріалів, які перебувають під впливом неоднорідних теплових потоків, зосереджених на внутрішніх і зовнішніх шарах [4, 32]. Робота [1] присвячена визначенню розв'язку нестационарної задачі теплопровідності та термоеластичності для функціонально-градієнтних товстих сфер. Теплофізичні та термоеластичні параметри матеріалів, за винятком коефіцієнта Пуассона, є довільними функціями радіальної координати. Розглянуто осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності та термоеластичності для порожнистих функціонально-градієнтних областей відносно джерела тепла.

У працях [10, 11, 12] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми. Водночас, у роботах [19, 23] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

У роботі [26] автори розглядають особливості застосування методу реконструкції двовимірного розподілу температурного поля. Вони вважають, що для промислових застосувань, наприклад спалювання, нагрівання та сушіння ізотропних матеріалів, оптимальна схема розподілу температурного поля є значною проблемою, оскільки він може показувати внутрішній робочий стан промислового обладнання. Окрім цього, це відображатиме термодинамічний процес, допоможе розробити

стратегію управління ним та забезпечить безпеку експлуатації промислового обладнання. Водночас, розподіл температурного поля можна використовувати для виявлення та контролю температури гарячих смистей, що може призвести до несподіваних нещасних випадків, таких як вибух і мимовільне займання [31]. У роботі [26] досліджено надійний метод реконструкції двовимірного розподілу температурного поля за допомогою ультразвукової термометрії (англ. *Ultrasonic Thermometry*). Результати реального експерименту показують, що запропонований метод має відносно краще інформаційне відображення розподілу температурного поля та вищу точність реконструкції, ніж загальний алгоритм реконструкції методом найменших квадратів [29].

У роботі [16] автори розглядають особливості застосування біонічного методу оптимізації схеми розподілу джерела тепла з урахуванням градієнта температури для теплопровідності. Вони вважають, що оптимізація розподілу джерела тепла є фундаментальною проблемою електронного охолодження, яка впливає на продуктивність і термін служби електроніки. У своєму дослідженні автори використовують метод біонічної оптимізації з урахуванням градієнта температури (англ. *Temperature-Gradient-Aware Bionic Optimization*, TGBO) для вирішення проблеми розподілу джерела тепла в теплопровідності. Проведено математичний аналіз, щоб з'ясувати вплив доданого джерела тепла на поле градієнта температури. На підставі проаналізованого результату було запропоновано стратегію розміщення джерел тепла для біонічної оптимізації, яка передбачає його розміщення в місцях з максимальною величиною градієнта температури. Для перевірки ефективності запропонованого методу оптимізації та порівняння рішень із біонічною оптимізацією з урахуванням температури (англ. *Temperature-Aware Bionic Optimization*, TBO) у цьому дослідженні було використано три типові чисельні випадки. Результати оптимізації вказують на те, що метод TBO, швидше за все, розташує джерела тепла на певній відстані один від одного і більше підходить для задач із відносно симетричними граничними умовами. Тоді як для методу TGBO остаточні рішення, ймовірно, розташують джерела тепла поруч одне з одним. Метод TGBO працює краще для задач з асиметричними граничними умовами. Окрім цього, загальний розрахунок за методом TGBO менший, ніж за методом TBO загалом, особливо для випадків із симетричними граничними умовами. Також досліджено вплив початкового положення першого джерела тепла на продуктивність методу біонічної оптимізації. Отримані результати показують, що перше джерело тепла краще розташувати в місці з найкращими умовами теплопередачі, що може допомогти покращити продуктивність остаточного рішення та зменшити кількість кроків під час етапу його налаштування. Припускається, що біонічна оптимізація з урахуванням температурного градієнта є ефективним методом оптимізації схеми розподілу джерела тепла для підвищення теплопровідності.

У роботі [27] наведено особливості конструктивної оптимізації циліндричних джерел тепла, оточених ребром, на підставі мінімізації температури гарячої точки. На підставі конструктивної теорії в цій роботі досліджено конструкцію тривимірного циліндричного джерела тепла з конвекційним теплообміном. Модель джерела тепла складається з кількох циліндричних джерел

тепла, оточених циліндричним або конічним ребром. Модель джерела тепла існує не тільки в теплогенеруючому електронному компоненті, оточеному ребрами для покращення теплопередачі, але також у теплогенеруючому паливному стрижні з циркуляційним покриттям. Для заданих об'ємів ребра та джерел тепла цю конструкцію оптимізовано, взявши за мету оптимізації мінімізацію безрозмірної температури гарячої точки. Отримані результати показують, що температура гарячої точки моделі ефективно знижується після конструктивної оптимізації, що забезпечить деякі теоретичні вказівки для оптимального проектування системи джерела тепла.

У роботі [7] наведено особливості оптимального розміщення та розмір насадок радіатора на теплогенеруючу деталь для мінімізації пікової температури. Автори стверджують, що термін служби багатьох електронних компонент залежить від їх робочої температури. Радіатори використовують для відведення тепла від теплорозсіювальних електронних пристроїв, щоб уникнути перегріву та механічно-електричних втрат. Тому дуже важливо оптимально розподілити насадки радіатора, щоб досягти мінімального надлишку (пікової) температури. У своїй роботі автори описали оптимальне розташування радіаторів, встановлених на теплогенеруючу (електронну) частину. Метою оптимізації була мінімізація пікової температури, коли загальна площа поверхні насадок фіксована. Насадки для радіатора потрібно розподілити на верхній поверхні гарячої деталі в кількох рівномірних і нерівномірних розташуваннях. Для кожної кількості джерел тепла результати показують, що існує оптимальне розташування, яке має найкращі теплові характеристики. У випадку двох і трьох радіаторів, оптимальним розподілом є стовпчасте та трикутне розміщення відповідно. Збільшення кількості радіаторів призводить до поліпшення теплових характеристик. Найвища температура конфігурації подвійних радіаторів приблизно на 28% нижча порівняно з одинарним радіатором. Також зазначено, що теплові характеристики подовженої форми вищі порівняно з круглою формою.

Проведений аналіз основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими залишилися просторові моделі процесу теплопровідності, які б враховували інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами. Це приводить до розроблення лінійних і нелінійних математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у електронних пристроях із окремими неоднорідними вузлами та їх елементами складної геометричної форми (містять напівнаскрізні чужорідні теплоактивні включення), які функціонують в умовах інтенсивних температурних режимів. Результати проведених досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування пристроїв сучасної електронної техніки щодо їх термостійкості.

Результати досліджень та їх обговорення / Research results and their discussion

Об'єкт дослідження та його математичні моделі. Розглянемо ізотропний шар, який містить чужорідне напівнаскрізне циліндричне включення з радіусом R , віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$.

В області включення $\Omega_0 = \{(R, \varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ зосереджено рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = \text{const}$. На межовій поверхні шару $L_+ = \{(r, \varphi, h) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем з температурою $t_c = \text{const}$ згідно з закону Ньютона, а інша поверхня шару $L_- = \{(r, \varphi, -l) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ є теплоізованою. На межовій поверхні включення $K_R = \{(R, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq h\}$ існує ідеальний тепловий контакт $t_0 = t_1$, $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r}$ для $r = R$ (0 – для включення, 1 – для шару) (рисунок).

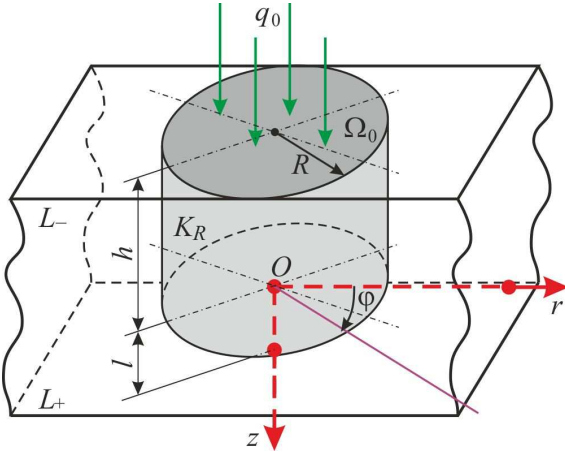


Рисунок. Переріз ізотропного шару з теплоактивним напівнаскрізним включенням площиною $\varphi=0$ / Cross-section of an isotropic layer with a thermally active half-through inclusion by a plane $\varphi=0$

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z , який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [19, 23]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div}[r \lambda(r, z) \operatorname{grad} \theta(r, z)] = -q_0 S_-(R-r) S_-(z) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\alpha \theta(r, z) \Big|_{z=h}; \quad \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0, \quad (2)$$

де: $\theta(r, z) = t(r, z) - t_c$; $\lambda(r, z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) S_-(R-r) S_-(z)$; $\lambda(r, z)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_1, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно; α – коефіцієнт тепловіддачі з межової поверхні шару L_+ .

Введемо таку функцію

$$T(r, z) = \lambda(r, z) \theta(r, z) \quad (4)$$

і продиференціюємо її за змінними r та z , врахувавши вираз для коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r, z)$ (3). Внаслідок цього отримуємо

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial T(r, z)}{\partial r} + (\lambda_0 - \lambda_1) \theta(r, z) \Big|_{r=R} \delta_+(r-R) S_-(z),$$

$$\lambda(r, z) \frac{\partial \theta(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} - (\lambda_0 - \lambda_1) \theta(r, z) \Big|_{z=0} S_-(R-r) \delta_-(z), \quad (5)$$

де: $S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$ $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака; $S_{\pm}(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції [20]. Такі вузли, що складаються з окремих частин з різними, і не постійними в межах кожної із них,

фізико-механічних характеристик, можуть бути записані для кусково-однорідного тіла як єдиного цілого за допомогою асиметричних одиничних функцій та повної дельта-функції Дірака.

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), прийдемо до диференціального рівняння другого порядку з частковими похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами

$$\Delta T + (\lambda_0 - \lambda_1) F(r, z) = -q_0 S_-(R-r) S_-(z), \quad (6)$$

де: $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат;

$$F(r, z) = \frac{R}{r} \theta(r, z) \Big|_{r=R} \delta_+(r-R) S_-(z) - \theta(r, z) \Big|_{z=0} S_-(R-r) \delta_-(z). \quad (7)$$

Внаслідок цього, шукане температурне поле в наведеній системі повністю визначено рівнянням (6) з крайовими умовами (3).

Аналітично-числовий розв'язок. Апроксимуємо функції $\theta(R, z)$, $\theta(r, 0)$ за змінними z та r виразами відповідно

$$\theta(R, z) = \theta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) S_-(z - z_i),$$

$$\theta(r, 0) = \theta_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (\theta_{j+1} - \theta_j) S_-(r - r_j), \quad (8)$$

де: $z_i \in (0; h)$; $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1}$; $r_j \in (0; R)$; $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{k-1}$; n, k – кількість поділу інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$; $\theta_i (i = \overline{1, n})$, $\theta_j (j = \overline{1, k})$ – невідомі апроксимаційні значення температури $\theta(R, z)$, $\theta(r, 0)$.

Підставивши вирази (8) у співвідношення (6) із урахуванням виразу (7), отримаємо

$$\Delta T = (\lambda_0 - \lambda_1) F_1(r, z) - q_0 S_-(R-r) S_-(z), \quad (9)$$

де $F_1(r, z) = \theta(r, 0) S_-(R-r) \delta_-(z) - \frac{R}{r} \theta(R, z) \delta_+(r-R) S_-(z)$.

Застосувавши інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (9) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), прийдемо до звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і розривною та сингулярною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dz^2} - \xi^2 \bar{T} = (\lambda_0 - \lambda_1) \left[A \frac{\delta_-(z)}{\xi} - A(z) S_-(z) \right] - \frac{R q_0}{\xi} J_1(R \xi) S_-(z) \quad (10)$$

і крайових умов $\frac{d \bar{T}}{dz} \Big|_{z=-l} = 0$, $\frac{d \bar{T}}{dz} \Big|_{z=h} = -\frac{\alpha}{\lambda_1} \bar{T} \Big|_{z=h}$, (11)

де: $A = R \theta_k J_1(R \xi) - \sum_{j=1}^{k-1} r_j (\theta_{j+1} - \theta_j) J_1(r_j \xi)$;

$$A(z) = R \xi J_1(R \xi) \left[\theta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) S_-(z - z_i) \right];$$

$\bar{T}(\xi, z) = \int_0^\infty r J_0(r \xi) T(r, z) dr$ – трансформанта функції $T(r, z)$;

$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{n! (v+n)!}$ – функція Бесселя першого роду ν -го порядку; ξ – параметр інтегрального перетворення Генкеля.

Загальний розв'язок рівняння (10) визначимо методом варіації сталих

$$\bar{T}(z) = c_1 e^{\xi z} + c_2 e^{-\xi z} + (\lambda_0 - \lambda_1) A_3(z) - \frac{R q_0}{\xi^3} J_1(R \xi) A_1(z),$$

$$\text{де: } A_3(z) = A \frac{ch\xi z}{\xi} S_-(z) - \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) [\theta_1 A_1(z) + A_2(z)];$$

$$A_1(z) = (ch\xi z - 1) S_-(z);$$

$$A_2(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) (ch\xi(z - z_i) - 1) S_-(z - z_i).$$

Використавши крайові умови (11), отримаємо розв'язок задачі (10), (11) у вигляді

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{\xi} \left\{ (\lambda_0 - \lambda_1) \tilde{R}(z) - \frac{Rq_0}{\xi^2} J_1(R\xi) B_4(z) \right\}, \quad (12)$$

$$\text{де: } \tilde{R}(z) = AB_1(z) - RJ_1(R\xi)(B_2(z) + B_3(z));$$

$$B_1(z) = ch\xi z S_-(z) + B_1 E(z); \quad B_2(z) = \theta_1 [(ch\xi z - 1) S_-(z) + B_2 E(z)];$$

$$B_3(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1} - \theta_i) [(ch\xi(z - z_i) - 1) S_-(z - z_i) + D_i E(z)];$$

$$B_4(z) = (ch\xi z - 1) S_-(z) + B_1 E(z);$$

$$B_1 = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi h + \alpha ch\xi h}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}};$$

$$B_2 = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi h + \alpha (ch\xi h - 1)}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}};$$

$$E(z) = e^{\xi(z+2l)} - e^{-\xi z}; \quad D_i = \frac{\lambda_1 \xi sh\xi(h - z_i) + \alpha(ch\xi(h - z_i) - 1)}{(\lambda_1 \xi + \alpha) e^{\xi(2l+h)} - (\lambda_1 \xi - \alpha) e^{-\xi h}}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (12), одержимо

$$T(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \bar{T}(\xi, z) d\xi. \quad (13)$$

Невідомі апроксимаційні значення $\theta_i (i = \overline{1, n})$ та $\theta_j (j = \overline{1, k})$ температури $\theta(R, z)$ і $\theta(r, 0)$ знаходимо, розв'язавши систему $n+k$ лінійних алгебраїчних рівнянь, отриману з виразу (13).

Внаслідок цього, шукане температурне поле в шарі з напівнаскрізним теплоактивним циліндричним включенням виражено формулою (13), з якої отримуємо значення температури в довільній точці конструкції "шар-включення".

Розглянемо ізотропний термочутливий шар, який містить чужорідне напівнаскрізне теплоактивне циліндричне включення. Із урахуванням термочутливості середовища умови ідеального теплового контакту на межовій поверхні включення K_R матимуть вигляд $t_0(R, z) = t_1(R, z)$, $\lambda_0(t) \frac{\partial t_0(R, z)}{\partial r} = \lambda_1(t) \frac{\partial t_1(R, z)}{\partial r}$ для $r=R$ (0 – для включення, 1 – для шару) (рисунк).

Розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами r, z у наведеній конструкції отримаємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [23, 19]

$$\frac{1}{r} \operatorname{div} [r \lambda(r, z) \operatorname{grad} t(r, z)] = -q_0 S_-(R - r) S_-(z) \quad (14)$$

з крайовими умовами

$$t(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0, \\ \lambda_1(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\alpha (t(r, z)|_{z=h} - t_c), \quad (15)$$

де: $\lambda(r, z, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] S_-(R - r) S_-(z)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного термочутливого шару; $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення та шару, відповідно.

Введемо лінеаризуючу функцію

$$\mathcal{G}(r, z) = \int_0^{t(r, z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + \left\{ \int_{t(R, z)}^{t(r, z)} \tilde{\Lambda}(\zeta) d\zeta - \int_{t(R, 0)}^{t(r, 0)} \tilde{\Lambda}(\zeta) d\zeta \right\} S_-(r, z), \quad (16)$$

продиференціювавши яку за змінними r та z , отримаємо

$$\lambda(r, z, t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial r} + \tilde{\Lambda}(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} \Big|_{z=0} S_-(r, z), \\ \lambda(r, z, t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial z} + \tilde{\Lambda}(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{r=R} S_-(r, z). \quad (17)$$

де: $\tilde{\Lambda}(\zeta) = \lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)$; $\tilde{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) - \lambda_1(t)$; $S_-(r, z) = S_-(R - r) S_-(z)$.

Із урахуванням виразів (17) вихідне рівняння (14) набуде такого вигляду:

$$\Delta \mathcal{G} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \tilde{\Lambda}(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} S_-(R - r) \right\} \Big|_{z=0} S_-(z) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \tilde{\Lambda}(t) \frac{\partial t}{\partial z} S_-(z) \right\} \Big|_{r=R} S_-(R - r) = -q_0 S_-(R - r) S_-(z). \quad (18)$$

Крайові умови (15) з використанням співвідношення (16) перепишемо так:

$$\mathcal{G}(r, z)|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=-l} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -\alpha (t|_{z=h} - t_c) - \tilde{\Lambda}(t) \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} \Big|_{r=R} S_-(R - r). \quad (20)$$

Лінеаризуюча функція (16) дала змогу звести нелінійну крайову задачу(14), (15) до частково лінеаризованого диференціального рівняння з частковими похідними другого порядку з розривними коефіцієнтами (18), лінеаризованих крайових умов (19) та частково лінеаризованої крайової умови (20).

Аналітично-числовий розв'язок. Апроксимуємо функції $t(R, z)$, $t(r, 0)$ та $t(r, h)$ виразами

$$t(R, z) = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) S_-(z - z_i), \\ t(r, 0) = t_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (t_{j+1} - t_j) S_-(r - r_j), \quad (21)$$

$$t(r, h) = t_1 + \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1} - t_l) S_-(r - r_l), \quad (22)$$

де: $z_i \in (0; h)$; $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1}$; $r_j \in (0; R)$; $r_l \in (0; \infty)$; $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{k-1}$; n, k – кількість поділу інтервалів $(0; h)$, $(0; R)$; $t_i (i = \overline{1, n})$, $t_j (j = \overline{1, k})$ – невідомі апроксимаційні значення температури $t(R, z)$, $t(r, 0)$.

Продиференціюємо функції $t(R, z)$, $t(r, 0)$, описані співвідношеннями (21), за змінними z та r відповідно. У результаті отримаємо

$$\frac{\partial t(R, z)}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \delta_-(z - z_i), \quad \frac{\partial t(r, 0)}{\partial r} = \sum_{j=1}^{k-1} (t_{j+1} - t_j) \delta_-(r - r_j). \quad (23)$$

Підставимо вирази (22) і (23) у співвідношення (18) та (20) і внаслідок отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частковими похідними і розривною та сингулярною правою частиною відносно лінеаризуючої функції $\mathcal{G}(r, z)$

$$\Delta \mathcal{G} = -\frac{1}{r} \sum_{j=1}^{k-1} r_j (t_{j+1} - t_j) \tilde{\Lambda}(t_{i+1}) S_-(z) \delta_-(r - r_j) - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \tilde{\Lambda}(t_{i+1}) S_-(R - r) \delta_-(z - z_i) - q_0 S_-(r, z) \quad (24)$$

з лінійною крайовою умовою

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=h} = -\alpha t(r, h), \quad (25)$$

де $\bar{\lambda}(t_{i+1}) = \lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})$

Застосувавши інтегральне перетворення Генкеля за координатою r до рівняння (24) та крайових умов (19) і (25), отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \left[\sum_{i=1}^{n-1} A_i \delta^-(z - z_i) + q_0 S_-(z) \right] - \xi A S_-(z) \quad (26)$$

$$\text{і крайові умови } \left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=-l} = 0, \left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=h} = \frac{B}{\xi}, \quad (27)$$

де: $\bar{\vartheta}(\xi, z) = \int_0^\infty r \vartheta(\xi, z) J_0(r\xi) dr$ – трансформанта функції

$$\vartheta(r, z); \quad A_i = (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})];$$

$$A = \sum_{j=1}^{k-1} r_j J_1(r_j \xi) (t_{j+1} - t_j) [\lambda_0(t_{j+1}) - \lambda_1(t_{j+1})],$$

$$B = (t_m - t_c) \delta_+(\xi) - \sum_{l=1}^{m-1} r_l J_1(r_l \xi) (t_{l+1} - t_l).$$

Загальний розв'язок рівняння (26) визначимо у такої вигляді

$$\bar{\vartheta}(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z} - \frac{1}{\xi} \{ R J_1(R\xi) \check{\Phi}(z_i) + A (ch\xi z - 1) S_-(z) \}$$

та з використанням крайових умов (27) знайдемо стали інтегрування c_1 і c_2 . У наслідку отримаємо розв'язок задачі (26), (27)

$$\bar{\vartheta}(z) = \frac{1}{\xi} \left\{ A B(z) + R J_1(R\xi) \left[\sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i(z) - \frac{q_0}{\xi^2} B(z) \right] - \alpha B P(z) \right\}, \quad (28)$$

$$\text{де: } \check{\Phi}(z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} A_i ch\xi(z - z_i) S_-(z - z_i) - \frac{q_0}{\xi^2} (ch\xi z - 1) S_-(z);$$

$$B(z) = P(z) sh\xi h - (ch\xi z - 1) S_-(z);$$

$$B_i(z) = P(z) sh\xi(h - z_i) - ch\xi(z - z_i) S_-(z - z_i); \quad P(z) = \frac{ch\xi(z + l)}{sh\xi(h + l)}.$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Генкеля до співвідношення (28), визначимо вираз для лінеаризуючої функції $\vartheta(r, z)$ у такому вигляді:

$$\vartheta(r, z) = \int_0^\infty \xi J_0(r\xi) \bar{\vartheta}(z) d\xi. \quad (29)$$

Підставивши вирази температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів шару та включення у співвідношення (16), (27), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень t_i ($i = \overline{1, n}$) та t_j ($j = \overline{1, k}$) для температури $t(R, z)$, $t(r, 0)$ відповідно.

Шукане температурне поле $t(r, z)$ для наведеної структури визначаємо за допомогою отриманого нелінійного алгебраїчного рівняння з використанням співвідношень (16), (29), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів шару від температури.

Частковий приклад. Розглянемо залежність коефіцієнта теплопровідності від температури у вигляді співвідношення

$$\lambda = \lambda_m^0 (1 - k_m t), \quad (30)$$

де λ_m^0, k_m – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалів для включення ($m = 0$) та пластины ($m = 1$).

Врахувавши співвідношення для лінеаризуючої функції (16), із виразів (29) і (30) отримаємо формули для визначення температури $t(r, z)$ в області включення шару $\{(r, \varphi, z) : r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z \leq h\}$

$$t(r, z) = \frac{1}{k_0} \left(1 - \sqrt{1 - k_0 \left(\frac{2\vartheta(r, z)}{\lambda_0^0} + \vartheta + \vartheta(r) + \vartheta(z) \right)} \right), \quad (31)$$

та в області шару поза включенням $\{(r, \varphi, z) : r > R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -l \leq z \leq h\}$

$$t(r, z) = \frac{1}{k_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_1 \vartheta(r, z)}{\lambda_1^0}} \right), \quad (32)$$

$$\text{де: } \vartheta = t_n(\lambda_j - t_n k \lambda); \quad \vartheta(r) = t(r, 0) [t(r, 0) k \lambda - \lambda_j];$$

$$\vartheta(z) = t(R, z) [t(R, z) k \lambda - \lambda_j]; \quad \lambda_j = 2(\lambda_1^0 / \lambda_0^0 - 1); \quad k \lambda = \lambda_1^0 / \lambda_0^0 (k_1 - k_0).$$

Формули (31) і (32) описують температурне поле в термочутливій конструкції "шар-включення".

Обговорення результатів дослідження. Під час роботи всіх електронних пристроїв і схем виділяється певна кількість надлишкового тепла. Максимальна температура електроніки та рівномірність температури середовища є важливими критеріями, які впливають на стабільність роботи та термін служби таких пристроїв [21, 22]. Щоб підвищити надійність їхньої роботи, уніфікувати процеси старіння електронних схем і зменшити ймовірність відмови електроніки, необхідно дослідити термоуправління всієї системи [24, 30]. Управління температурою має справу з ефективним розсіюванням утвореного тепла та зниженням максимальної температури електроніки, наближаючись до рівномірного розподілу температури в середовищі [2, 17].

Одним з ефективних способів покращити теплопровідність системи та знизити максимальну температуру середовища є введення високо теплопровідних матеріалів, таких як алмаз або вуглецеве волокно, які здатні зменшити місцевий термічний опір [17, 24, 29]. У цьому випадку розподіл таких матеріалів потрібно оптимізувати для мінімізації максимальної температури [26, 33]. У науковій літературі обговорювалися різні підходи, в т.ч. конструкцію пристрою [10, 11, 12, 26, 29, 31], біонічну оптимізацію [16, 17] і комбінаторні алгоритми [15, 16, 25, 26, 31, 33]. Результати роботи цих алгоритмів показали, що оптимізована теплопровідність середовища, утворена вставленими теплопровідними матеріалами, має деревоподібну форму з декількома гілками, що відрізняються між собою за кількістю та розміром.

У роботі [28] автор розглядає особливості поширення температурного поля в теплопровідному матеріалі. Незначна деформація досліджуваних матеріалів здійснюється як при кімнатній, так і при підвищених температурах. Було встановлено, що при підвищених температурах відбувається відновлення та рекристалізація матеріалів, а криві течії сильно залежать від таких його параметрів, як температура або швидкість деформації.

У роботі [21] автори аналізують особливості поширення температурного поля та реакцію теплопровідного матеріалу як функцію від параметрів його шліфування. Для шліфування, наприклад, рейок широко використо-

вують як техніку для повторного профілю поверхонь рейок у разі їх зношення, так і для усунення відсутніх пошкоджень. Однак шліфування може призвести до вигорання поверхні та утворення білого шару травлення (англ. *White Etching Layer*, WEL). Беручи до уваги положення поверхні рейки, результатом дослідження стало створення аналітичної теплової моделі на підставі нерівномірно розподіленого джерела тепла для прогнозування температурного поля під час шліфування. Температуру під час проведення експерименту шліфування рейки вимірювали за допомогою спеціальних термопар. При цьому було детально проаналізовано реакцію матеріалу рейки з точки зору нагрівання поверхні та білого шару травлення. Результати показують, що при температурі шліфування близько 400 °C на поверхні рейки починає з'являтися WEL. На шліфованих поверхнях рейок виявлено залишки аустеніту, що вказує на існування також мартенситу як результат ефекту поєднання термічної та механічної взаємодії. Для опису залежності між температурою шліфування, вигоранням поверхні та WEL розроблено відповідні діаграми, призначені для використання у реальному виробництві.

У роботі [30] автори розглядають особливості інверсії температурного поля систем джерела тепла (англ. *Temperature Field Inversion of Heat-Source Systems*, TFI-HSS) через нейронні мережі з фізичною інформацією. Було встановлено, що інверсія температурного поля систем джерела тепла з обмеженими спостереженнями є важливою для моніторингу працездатності системи. Хоча деякі методи, такі як інтерполяція, були запропоновані для вирішення проблем TFI-HSS, проте такі методи ігнорують взаємодію між обмеженнями даних і фізичними обмеженнями, що спричиняє їх низьку розрахункову точність. У своїй роботі автори розробили метод інверсії температурного поля на підставі нейронної мережі (англ. *Physics-Informed Neural Network-Based Temperature Field Inversion*, PINN-TFI) для вирішення завдання TFI-HSS і метод вибору позиції спостережень на підставі кількості умов матриці коефіцієнтів (англ. *Coefficient Matrix Condition Number Based Position Selection of Observations*, CMCN-PSO) для вибору оптимальної позиції спостережень за шумом. Для завдання TFI-HSS метод PINN-TFI кодує терміни обмеження у функцію втрат і в такий спосіб сформульоване завдання перетворюється на задачу мінімізації функції втрат. При цьому автори виявили, що спостереження за шумом значно впливають на продуктивність реконструкції методу PINN-TFI. Щоб зменшити потребу спостережень за шумом, автори пропонують використовувати метод CMCN-PSO для пошуку оптимальних позицій, де кількість умов спостережень вони використовують для оцінювання певних позицій. Отримані результати демонструють, що метод PINN-TFI може значно підвищити точність прогнозування, а метод CMCN-PSO може знайти хороші позиції для отримання більш надійного температурного поля.

У роботі [22] автори аналізують особливості поширення джерела струму в неоднорідних та ізотропних матеріалах. Було встановлено, що потенціали в неоднорідних об'ємних провідниках залежать від провідних властивостей різних матеріалів у поєднанні з розподілом джерело-сток. Водночас, якщо справжній матеріал є анізотропним, то це поєднання обмежується ізотропними матеріалами. Потенціали, створені дипольними

джерелами в планарних, шаруватих середовищах і однорідній сфері, спочатку подані як прості приклади ефектів неоднорідності. Понад це, "4-сферна модель" подана в роботі як ідеалізована модель об'єкта, що складається з внутрішньої сфери, оточеної трьома сферичними оболонками, що представляють шари ізотропного матеріалу, оболонки та покриття поверхні. Отримано відносні величини та розподіли (змодельованих) потенціалів покриття поверхні. Ці потенціали, створені дипольними джерелами в гладкій поверхні, порівнюються з потенціалами, створеними в складках конструктивних елементів.

У роботі [2] автори розглядають особливості поширення температурного поля геометричної оптики в ізотропному неоднорідному середовищі. З'ясовано, що поперечний переріз нескінченно малої променевої трубки (променевого олівця) розширюється або звужується в міру поширення променів. Квадратний корінь із співвідношення поперечних перерізів між двома точками на промені визначають як коефіцієнт розбіжності (англ. *Divergence Factor*, DF). В однорідному середовищі промені є прямими. Тому $(DF)^2$ просто дорівнює відношенню гаусової кривизни хвильових фронтів. Однак, у неоднорідному середовищі промені викривляються, тому характеристика DF стає складнішою. У роботі автори вивели декілька інтегральних виразів для обчислення DF і декілька відповідних формул, які керують змінами поля та енергії вздовж променя.

У роботі [24] автори висвітлюють результати чисельно-експериментального дослідження реконструкції температурного поля на підставі акустичної томографії. Вони стверджують, що отримання високоякісного вимірювання розподілу температури має вирішальне значення для оптимального регулювання процесу спалювання матеріалу в котлі. Водночас, акустичну томографію (англ. *Acoustic Tomography*, AT) можна використовувати для вимірювання розподілу температури за багатопроменевим акустичним часом польоту (англ. *Time of Flight*, TOF). Реконструйована модель і модель вимірювання TOF мають вирішальне значення для практичного застосування для вимірювання AT. У роботі [24] нове температурне поле автори представили у вигляді моделі реконструкції на підставі апроксимації радіальної базисної функції з поліноміальним відтворенням для розв'язання оберненої задачі AT. У такій реконструйованій моделі вони також врахували ефект заломлення шляхів звукової хвилі в неоднорідному температурному полі. Для покращення якості реконструкції температурного поля та його захисту від шуму автори використовують метод реконструкції розкладу з усіченим сингулярним значенням (англ. *Truncated Singular Value Decomposition Reconstruction*, TSVDR). Окрім цього, узагальнену крос-кореляцію з другою кореляцією вони застосовують для оцінювання TOF з метою ефективного уникнення перешкод від шуму. Для оцінювання ефективності запропонованого методу реконструкції температурного поля проведено чисельне моделювання та експериментальне дослідження. Отримані результати вказують на те, що розроблена авторами модель, враховуючи ефект заломлення, може реконструювати розподіл температури з вищою точністю та кращою антишумовою здатністю порівняно з іншими наявними методами. Експериментальні результати було порівняно з вимірюваннями за допомогою термопар, які показують, що з

урахуванням ефекту заломлення запропонований метод має кращі характеристики реконструкції, ніж методи без ефекту заломлення.

У роботі [33] автори розглядають особливості оптимізації схеми розміщення джерела тепла для двовимірної теплопровідності за допомогою ітеративної переваженої опуклої мінімізації L1-норми. Також розглянуто можливість оптимізації схеми розподілу джерела тепла в двовимірній теплопровідності для задачі електронного охолодження (англ. *Problem of Electronic Cooling*) [16]. З'ясовано, що опуклу оптимізацію було вперше застосовано до вирішення цієї проблеми шляхом переформулювання цільової функції та невишуканих обмежень. Математичний аналіз виконано для опису рівняння джерела тепла та задачі комбінаторної оптимізації (англ. *Problem of Combinatorial Optimization*). Метод опуклої оптимізації на підставі розрідженості даних автор використовує для приблизного вирішення проблеми. Продуктивність алгоритму він перевіряє кількома способами з різними граничними умовами, а отримані результати порівнює з рівномірно розподіленим макетом. Ці результати вказують на те, що шляхом правильного вибору кількості комірок сітки для розміщення джерел тепла та мінімальної відстані між ними можна значно зменшити максимальну температуру та її нерівномірність в досліджуваній області. Для подальшого оцінювання можливостей цього методу також автор проводить порівняння з результатами, доступними у відкритій літературі. Порівняно з наявними методами оптимізації схеми компонування джерела тепла, запропонований алгоритм можна реалізувати значно легше за допомогою доступних інструментів опуклого програмування, що зменшує кількість вхідних параметрів керування і, як наслідок, тривалість та обчислювані ресурси, досягаючи аналогічної або кращої продуктивності процесу охолодження.

У роботі [17] автори аналізують особливості оптимізації схеми розподілу джерела тепла для двовимірної теплопровідності біонічним методом [16]. Вони стверджують, що проблема розподілу джерела тепла від об'єму до точки є фундаментальною проблемою для електронного охолодження. Наявні дослідження в основному зосереджені на оптимізації теплопровідності шляхом проектування схеми розподілу тепла матеріалом з високою теплопровідністю. Насправді така схема розподілу джерела тепла також істотно впливає на теплопровідність. У своїй роботі [17] автори дослідили можливість оптимізації схеми розподілу джерел тепла в таких двовимірних задачах, як об'єм-точка та об'єм-межа. Для задачі оптимізації побудовано функцію Лагранжа, а для оптимізації схеми розподілу джерела тепла використано варіаційний принцип. Отримані результати показують, що джерело тепла можна розташувати на краях поверхні для отримання оптимуму, коли немає обмежень на його інтенсивність. Для ситуації щодо джерел тепла з дискретизованим розміром і остаточною інтенсивністю нагріву введено метод біонічної оптимізації (англ. *Bionic Optimization*, BO) для оптимізації схеми розташування джерел тепла [16]. Подальший математичний аналіз автори провели для визначення критерію оптимізації, згідно з яким джерело тепла вони пропонують розташувати в місці з найнижчою температурою під час процесу BO. Для перевірки запропонованого методу розподілу джерел тепла з дискретизованим

розміром і остаточною інтенсивністю нагріву використано три типові випадки з різними граничними умовами. Порівняно з випадковим і рівномірним розподілом, метод біонічної оптимізації може зменшити максимальне підвищення температури та ефективно покращити однорідність температури теплопровідного матеріалу. Коефіцієнти покращення двох показників становлять у середньому щонайменше 23 % і 54 % порівняно з двома іншими методами для кожного тестового випадку відповідно. У роботі [17] також наведено результати випадків з різними параметрами розрахунку, проаналізовано й досліджено вплив параметрів на продуктивність рішень шляхом біонічної оптимізації [16]. Виявлено, що розподіл джерела тепла істотно впливає на процес теплопровідності, а запропонований біонічний метод є ефективним для оптимізації схеми розподілу джерела тепла та покращення характеристик теплопровідності.

У роботі [31] автори наводять результати ультразвукової реконструкції розподілу температури для кругової області на підставі Марковської радіальної базисної апроксимації (англ. *Markov Radial Basis Approximation*) та сингулярного розкладання (англ. *Singular Value Decomposition*). Виявлено, що реконструкція розподілу температури має критичне значення для круглої області, тому у своїй роботі автори досліджують можливості сучасної ультразвукової техніки, щоб задовольнити цей попит. Враховуючи особливості кругової області, запропоновано алгоритм, заснований на Марковській радіальній базисній апроксимації та на сингулярному розкладанні, тоді як компонування ультразвукових перетворювачів і поділ вимірюваної області слабо розроблені. Ефективність реконструкції розподілу температури підтверджено багатьма експериментами з використанням різних моделей розподілу, після чого їх було порівняно з алгоритмом, заснованим на методі найменших квадратів (англ. *Least Square Method*). Для дослідження захисту від перешкод діють різні шуми до теоретичного значення часу польоту. Отримані результати експерименту вказують на те, що запропонований алгоритм може реконструювати розподіл температури з вищою точністю та значно сильнішим захистом від перешкод, але без проблеми роботи алгоритму, заснованого на методі найменших квадратів, що його реконструкція втрачає багато інформації про температуру біля краю вимірюваної області.

У роботі [29] автори розглядають особливості роботи алгоритму реконструкції температурного поля на підставі відбитої сигмоподібної радіальної базисної функції (англ. *Reflected Sigmoidal Radial Basis Function*) та QR-розкладу, де QR-розклад матриці (англ. *QR Matrix Layout*) – подання матриці у вигляді добутку унітарної та правої трикутної матриці. З'ясовано, що інформація про розподіл температурного поля може відображати стан процесу горіння в топках побутових котлів, що сприяє формулюванню стратегій управління процесом для забезпечення безпечної роботи котла. Отже, це важливо для реалізації системи автоматичного управління роботою котла. Також була використана ультразвукова термометрія (англ. *Ultrasonic Thermometry*), тобто метод безконтактної акустичної пірометрії, заснований на тривалості проходження ультразвукових хвиль на обмежених шляхах поширення хвилі для безперервної реконструкції розподілених температурних полів і, в такий спосіб, усуває недоліки традиційних фізичних ме-

тодів вимірювання температури. Щоб вирішити проблему малої точності реконструкції країв температурного поля, спричиненої традиційними алгоритмами акустичної пірометрії, а також реалізувати високоточну реконструкцію двовимірних температурних полів, автори роботи [29] пропонують використовувати алгоритм реконструкції температурного поля (англ. *Temperature-Field Reconstruction Algorithms*), заснований на комбінації відбитої сигмоподібної радіальної базисної функції (англ. *Radial Basis Function, RBF*) та QR-розклад, відомий як алгоритм RSQR (англ. *Russell Square Quality Representatives* – представники з якості Russell Square). Отримані результати проведених симуляційних експериментів свідчать про те, що точність результатів реконструкції, отриманих із застосуванням запропонованого алгоритму, зросла в середньому на 2,03% порівняно з використовуваними алгоритмами реконструкції температурного поля, із збільшенням на 1,88% точності реконструкції краю температурного поля.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

Наукова новизна отриманих результатів дослідження – розроблено метод лінеаризації нелінійної математичної моделі теплопровідності та отримано в замкнутому вигляді аналітично-числові розв'язки відповідних лінійної та нелінійної крайових задач для ізотропних просторових неоднорідних середовищ із напівнаскрізними чужорідними елементами, що піддаються внутрішньому тепловому нагріванню.

Практична значущість результатів дослідження – на підставі отриманих аналітично-числових розв'язків лінійної та нелінійної крайових задач теплопровідності для ізотропних просторових неоднорідних середовищ з внутрішнім нагріванням можна розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації для аналізу температурних полів у окремих конструкційних елементах і вузлах електронних пристроїв, що піддаються внутрішньому тепловим впливам, з метою прогнозування їх режимів роботи, ідентифікації невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

Висновки / Conclusions

Розроблено лінійну та нелінійну математичні моделі теплопровідності для ізотропних просторових середовищ із чужорідними напівнаскрізними включеннями, які піддаються внутрішньому нагріванню, внаслідок чого підвищено точність визначення температурних полів, що значно впливає на ефективність методів проектування пристроїв, окремі елементи та вузли яких є неоднорідної структури і піддаються різної природи тепловим впливам. За результатами виконаного дослідження можна зробити такі основні висновки.

1. За допомогою лінійних і нелінійних математичних моделей визначення температурних полів проведено аналіз температурних режимів, обумовлених локально зосередженими внутрішніми тепловими джерелами для конструкцій, які геометрично описано ізотропною просторовою структурою з чужорідним напівнаскрізним теплоактивним включенням.

2. Запроваджено лінеаризуючу функцію, яка дала змогу звести нелінійну крайову задачу теплопровідності

до лінійної та отримати у замкнутому вигляді її аналітично-числовий розв'язок.

3. На підставі отриманих аналітично-числових розв'язків як для лінійної, так і для нелінійної крайових задач теплообміну запропоновано розробляти обчислювальні алгоритми та програмні засоби їх числової реалізації. У подальшому будуть проведені дослідження для низки матеріалів, які використовують у процесі проектування цифрових пристроїв, щодо впливу їх термочутливості на розподіл температури у певних інтервалах температур використання наведених розроблених лінійної та нелінійної математичних моделей визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у середовищах із чужорідним напівнаскрізним теплоактивним включенням.

4. Запропоновано враховувати чужорідні включення в ізотропних середовищах і термочутливості конструкційних матеріалів для певних інтервалів температур, що значно ускладнює процес розв'язування відповідних лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності, зате шукані розв'язки цих задач дещо адекватніше до реального фізичного процесу описують поведінку температури як функції просторових координат.

References

1. Bayat, A., Moosavi, H., & Bayat, Y. (2015). Thermo-mechanical analysis of functionally graded thick spheres with linearly time-dependent temperature. *Scientia Iranica*, Vol. 22(5), 1801–1812.
2. Bremmer, H. & Lee, S. W. (1984, Januar-Februar). Propagation of a geometrical optics field in an isotropic inhomogeneous medium. In *Radio Science*, Vol. 19, No. 01, pp. 243-257. <https://doi.org/10.1029/RS019i001p00243>
3. Demirbas, M. D. (2017). Thermal stress analysis of functionally graded plates with temperature-dependent material properties using theory of elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 131, 100–124. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.08.005>
4. Eker, M., Yarimpabuc, D., & Celebi, K. (2020). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371–391. <https://doi.org/10.1108/EC-02-2020-0120>
5. Ghannad, M., & Yaghoobi, M. P. (2015). A thermo-elasticity solution for thick cylinders subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *International Journal of Advanced Design & Manufacturing Technology*, Vol. 8, No. 4, 1–12. https://www.researchgate.net/publication/333827855_A_thermo-elasticity_solution_for_thick_cylinders_subjected_to_thermo-mechanical_loads_under_various_boundary_conditions
6. Gong, J., Xuan, L., Ying, B., & Wang, H. (2019). Thermoplastic analysis of functionally graded porous materials with temperature-dependent properties by a staggered finite volume method. *Composite Structures*, 224, 111071. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111071>
7. Hajmohammadi, M. R., Mohammadifar, M., & Ahmadian-Elmi, M. (2020). Optimal placement and sizing of heat sink attachments on a heat-generating piece for minimization of peak temperature. *Thermochimica Acta*, Vol. 689, 178645. <https://doi.org/10.1016/j.tca.2020.178645>
8. Haopeng, S., Kunkun, X., & Cunfa, G. (2021). Temperature, thermal flux and thermal stress distribution around an elliptic cavity with temperature-dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 216, 136–144. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.010>
9. Havrysh, V. I., & Hrytsiuk, Y. I. (2021). Analysis of temperature regimes in heat-sensitive layered elements of digital devices caused by internal heating. *Scientific Bulletin of UNFU*, 31(5), 108–112. <https://doi.org/10.36930/10.36930/40310517>
10. Havrysh, V. I., & Hrytsiuk, Yu. I. (2022). Temperature fields in heterogeneous environments with consideration of thermal sensi-

- vity. Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 120 p.
11. Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermo-sensitive non-uniform elements of radio-electronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
 12. Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanska, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovyi Visnyk NHU*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
 13. Hrytsiuk, Y. I., & Havrysh, V. I. (2022). Interpolation of table-given functions by Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UN-FU*, 32(4), 88–101. <https://doi.org/10.36930/40320414>
 14. Hrytsiuk, Y. I., & Havrysh, V. I. (2022). Numerical differentiation of periodic tabular-specified functions using the Fourier polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(5), 69–79. <https://doi.org/10.36930/40320510>
 15. Jun Fukai, Makoto Kanou, Yoshikazu Kodama, & Osamu Miyatake. (2000). Thermal conductivity enhancement of energy storage media using carbon fibers. *Energy Conversion and Management*, Vol. 41, Issue 14, 1543–1556. [https://doi.org/10.1016/S0196-8904\(99\)00166-1](https://doi.org/10.1016/S0196-8904(99)00166-1)
 16. Kai Chen, Shuangfeng Wang, & Mengxuan Song. (2016). Temperature-gradient-aware bionic optimization method for heat source distribution in heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 100, 737–746. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.05.011>
 17. Kai Chena, Shuangfeng Wang, & Mengxuan Song. (2016, February). Optimization of heat source distribution for two-dimensional heat conduction using bionic method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 93, 108–117. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.041>
 18. Kikoina, I. K. (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin*. Spravochnik. Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].
 19. Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kiev: Naukova dumka, 280 p. <https://doi.org/10.1192/bjp.161.2.280>
 20. Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720 p. [In Russian].
 21. Kun Zhou, Haohao Ding, Michaël Steenbergen, Wenjian Wang, Jun Guo, & Qiyue Liu. (2021). Temperature field and material response as a function of rail grinding parameters. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 175, August 2021, 121366. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121366>
 22. Nunez, Paul L., & Ramesh Srinivasan. (2009). *Current Sources in Inhomogeneous and Isotropic Media. Electric Fields of the Brain: The neurophysics of EEG*, 2nd edn (New York, 2006; online edn, Oxford Academic, 1 May 2009). <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195050387.003.0006>
 23. Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 368 p. [In Russian].
 24. Qian Kong, Genshan Jiang, Yuechao Liu, & Miao Yu. (2020, April). Numerical and experimental study on temperature field reconstruction based on acoustic tomography. *Applied Thermal Engineering*, Vol. 170, 114720. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.114720>
 25. Qun Chen, Xin-Gang Liang, & Zeng-Yuan Guo. (2013, August). Entransy theory for the optimization of heat transfer – A review and update. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 63, 65–81. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.03.019>
 26. Ruixi Jia, Qingyu Xiong, Guangyu Xu, Kai Wang, & Shan Liang. (2017, January). A method for two-dimensional temperature field distribution reconstruction. *Applied Thermal Engineering*, Vol. 111, 961–967. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.09.174>
 27. Shuwen Gong, Lingen Chen, Huijun Feng, Zhihui Xie, & Fengrui Sun. (2015). Constructal optimization of cylindrical heat sources surrounded with a fin based on minimization of hot spot temperature. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 68, 1–7. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.08.004>
 28. Sluzalec, A. (2004). *Temperature Field in Material*. In: *Theory of Metal Forming Plasticity*. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10449-1_5
 29. Xinzhi Zhou, Chenlong Dong, Chengping Zhao, & Xingdu Bai. (2020, May). Temperature-field reconstruction algorithm based on reflected sigmoidal radial basis function and QR decomposition. *Applied Thermal Engineering*, Vol. 171, 114987. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.114987>
 30. Xu Liu, Wei Peng, Zhiqiang Gong, Weien Zhou, & Wen Yao. (2022). Temperature Field Inversion of Heat-Source Systems via Physics-Informed Neural Networks. *Cornell University*. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.104902>
 31. Xuehua Shen, Qingyu Xiong, Xin Shi, Kai Wang, Shan Liang, & Min Gao. (2015, September). Ultrasonic temperature distribution reconstruction for circular area based on Markov radial basis approximation and singular value decomposition. *Ultrasonics*, Vol. 62, 174–185. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.05.014>
 32. Yaghoobi, M. P., & Ghannad, M. (2020). An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 116, 104684. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104684>
 33. Yanki Aslan, Jan Puskely, & Alexander Yarovoy. (2018, July). Heat source layout optimization for two-dimensional heat conduction using iterative reweighted L1-norm convex minimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 122, 432–441. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.001>
 34. Zhang, Z., Zhou, D., Fang, H., Zhang, J., & Li, X. (2021). Analysis of layered rectangular plates under thermo-mechanical loads considering temperature-dependent material properties. *Applied Mathematical Modelling*, 92, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.036>

V. I. Havrysh, Yu. I. Hrytsiuk

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

MATHEMATICAL MODELS FOR THE DETERMINATION OF TEMPERATURE FIELDS IN ELEMENTS OF ELECTRONIC DEVICES WITH SEMI-THROUGH FOREIGN INCLUSIONS

Linear and non-linear mathematical models for the determination of the temperature field, and subsequently for the analysis of temperature regimes in isotropic spatial environments with half-through foreign heat-active inclusions, have been developed. For this purpose, the coefficient of thermal conductivity for such structures is described as a single unit by means of asymmetric unit functions, which makes it possible to consider boundary value problems of thermal conductivity with one linear and nonlinear differential equations of thermal conductivity with discontinuous and singular coefficients and linear and nonlinear boundary conditions on the boundary surfaces of media. In the case of a nonlinear boundary-value problem, a linearizing function is introduced, using which the original nonlinear heat conduction equation and nonlinear boundary conditions are linearized, and as a result, a partially linearized second-order differential equation with partial derivatives and discontinuous and singular coefficients is obtained relative to the linearizing function with partially linearized boundary conditions. For the final linearization of the partially linearized differential equati-

on and boundary conditions, the temperature is approximated by one of the spatial coordinates on the inclusion boundary surfaces by piecewise constant functions, as a result of which both the differential equation and the boundary conditions are completely linearized. To solve the obtained linear boundary value problem, the Henkel integral transformation method was used, as a result of which an analytical solution was obtained, which determines the introduced linearizing function. As an example, the linear dependence of the coefficient of thermal conductivity of structural materials of the structure on temperature, which is often used in many practical problems, is chosen. As a result, analytical relations in the form of quadratic equations were obtained for determining the temperature distribution in a thermosensitive layer with a foreign half-through inclusion, in the area of which internal heat sources are concentrated. For the analysis of heat exchange processes in individual nodes and elements of the given structure, caused by the internal heat load, on the basis of the obtained analytical and numerical solutions of the corresponding boundary value problems, software tools can be developed that make it possible to geometrically display the temperature distribution by spatial coordinates in this structure. As a result, it becomes possible to increase its thermal resistance and protect against overheating, which can cause the destruction of not only individual structural units and elements, but also the entire structure.

Keywords: temperature field; isotropic inhomogeneous medium; thermal conductivity; convective heat transfer; perfect thermal contact; internal heating; heat sources; thermal sensitivity; half-through foreign inclusion.