



**В. В. Пасічник<sup>1</sup>, В. Л. Юнчик<sup>2</sup>, Н. Е. Кунанець<sup>1</sup>, А. А. Федонюк<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

<sup>2</sup> Волинський національний університет ім. Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

## ВИКОРИСТАННЯ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ У ПРОЦЕСІ ЕКСПЕРТНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ НАВЧАЛЬНИХ РЕСУРСІВ

Розглянуто процедури експертного оцінювання для визначення якості електронних навчальних ресурсів, що базуються на теорії нечіткої логіки та використанні методу аналізу ієрархій. Концепцію нечіткої логіки використано для кількісної оцінки якісних даних для генерування рекомендацій. Запропоновано проект рекомендаційної системи на підставі методів нечіткої логіки для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів, зокрема систем комп'ютерної математики та генерування рекомендацій щодо вибору найефективніших для використання в навчальному процесі. Розглянуто та проаналізовано поняття рекомендаційних систем залежно від сфери застосування. Введено поняття рекомендаційної системи для вибору найефективніших електронних навчальних ресурсів. Здійснено огляд наукових публікацій щодо застосування експертного оцінювання, використання методів нечіткої логіки та рекомендаційних систем. Наведено загальну архітектуру рекомендаційної системи з описом функціоналу підсистем. Показано основні можливості застосування теорії нечіткої логіки у процесах генерації рекомендацій. Розглянуто приклади практичного використання теорії нечіткої логіки в процесі вибору систем комп'ютерної математики. Наведено основні критерії оцінювання систем комп'ютерної математики. Використано метод парних порівнянь для розрахунку важливості критеріїв. Детально описано процес оцінювання електронних навчальних ресурсів з використанням методів нечіткої логіки та подано алгоритм роботи цього підходу. Внаслідок проведеного експертного оцінювання отримано перелік рекомендованих альтернатив електронних навчальних ресурсів, що відповідають заданим критеріям. Наведено загальну структуру рекомендаційної системи вибору електронних навчальних ресурсів.

**Ключові слова:** системи комп'ютерної математики; рекомендаційна система; електронні навчальні ресурси; нечітка логіка; експертне оцінювання.

### Вступ / Introduction

З розвитком і поширенням електронного навчання, яке з кожним роком займає все більшу частину освітнього простору, виникають певні вимоги до навчального контенту. Якість формату подання і візуального представлення такої інформації є актуальними питаннями формування електронних навчальних ресурсів та важливими аспектами їх ефективності у процесах передачі знань від авторів до користувачів.

Завдання оцінювання якості електронних навчальних ресурсів (ЕНР) доцільно вирішувати на підставі експертної оцінки. Комплексна експертиза може передбачати тривимірну оцінку електронних навчальних ресур-

сів, яка базується на технологічній, змістовій і дизайн-ергономічній експертизах. Способом підвищення об'єктивності оцінювання електронних навчальних ресурсів є розвиток системи критеріїв, вдосконалення кваліметрії, уніфікація технологій і процедур.

Для забезпечення процедур оцінювання якості електронних навчальних ресурсів важливо сформулювати перелік вимог до електронних навчальних ресурсів, підібрати експертів для якісного оцінювання електронних ресурсів та здійснити експертне оцінювання їх якості.

У минулому класичні методи оцінювання ґрунтувалися на традиційній логіці та бінарній математиці, але з'явилися нові підходи, такі як нечітка логіка. Поняття нечіткої логіки та нечітких множин вперше ввів Лотфі

### Інформація про авторів:

**Пасічник Володимир Володимирович**, д-р техн. наук, професор, кафедра інформаційних систем та мереж.

Email: [vpasichnyk@gmail.com](mailto:vpasichnyk@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0001-9434-563X>

**Юнчик Валентина Леонідівна**, ст. викладач, кафедра загальної математики та методики навчання інформатики.

Email: [yunchik@gmail.com](mailto:yunchik@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-3500-1508>

**Кунанець Наталія Едуардівна**, д-р соц. ком. наук, професор, кафедра інформаційних систем та мереж.

Email: [nek.lviv@gmail.com](mailto:nek.lviv@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-3007-2462>

**Федонюк Анатолій Ананійович**, канд. фіз.-мат. наук, доцент, кафедра загальної математики та методики навчання інформатики. Email: [fedonyukanatan@gmail.com](mailto:fedonyukanatan@gmail.com); <https://orcid.org/0000-0003-0942-227X>

**Цитування за ДСТУ:** Пасічник В. В., Юнчик В. Л., Кунанець Н. Е., Федонюк А. А. Використання нечіткої логіки у процесі експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів. Науковий вісник НЛТУ України. 2022, т. 32, № 4. С. 66–76.

**Citation APA:** Pasichnyk, V. V., Yunchyk, V. L., Kunanets, N. E., & Fedoniuk, A. A. (2022). Using fuzzy logic in the process of expert evaluation of elearning resources. *Scientific Bulletin of UNFU*, 32(4), 66–76. <https://doi.org/10.36930/40320411>

Заде. Це математичний апарат, що дає змогу формалізувати обґрунтування задачі, для яких відсутня повноцінна статистика або вирішуються питання узгодження суперечливих критеріїв під час генерування рекомендацій.

Одним із застосувань теорії нечіткої логіки є побудова рекомендаційної системи. Така система ґрунтується на нечіткій логіці і використовує інтегровані знання експертів, які за структурою наближаються до розмовної мови і описуються лінгвістичними змінними. У дослідженні Арунагірі Раматілакама [34] продемонстровано моделювання системи підтримки прийняття рішень з використанням нечіткої логіки.

Нечітка логіка дає змогу широко використовувати експертні знання у процесах генерування рекомендацій. На підставі апарату нечіткої логіки вдається спроектувати рекомендаційні системи, що здатні ефективно функціонувати за умов наявності інформації про об'єкт вивчення, який має якісний характер.

*Об'єкт дослідження* – функціональні можливості рекомендаційної системи експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів.

*Предмет дослідження* – моделі та методи проектування та розроблення рекомендаційної системи для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів.

*Мета роботи* – проаналізувати функціонал розробленої рекомендаційної системи на підставі методів нечіткої логіки для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів та обрання найефективніших для використання в навчальному процесі.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- здійснити огляд наукових публікацій щодо застосування експертного оцінювання, використання методів нечіткої логіки та рекомендаційних систем;
- розглянути та проаналізувати поняття рекомендаційних систем;
- дослідити можливості застосування теорії нечіткої логіки у процесах генерації рекомендацій;
- розробити рекомендаційну систему на підставі методів нечіткої логіки для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів.

*Аналіз літературних джерел.* Питання впровадження електронних навчальних ресурсів у навчальний процес порушувало багато вітчизняних і закордонних науковців. Особливу увагу приділяють якості таких ресурсів. Дослідник Рім Алмазяд [2] провів онлайн-опитування для збирання емпіричних даних щодо забезпечення якості ресурсів у таких сферах: інституційне право; розроблення електронних навчальних ресурсів, системи підтримки навчання.

На підставі кількісного емпіричного дослідження Каті Клементс та Яна Павловського [9] показано вимоги до якості, що висувають користувачі до електронних навчальних ресурсів. Дослідження Міретт Еліас [12], Вероніки Фаджоні та ін. [32] демонструють теоретичну базу оцінювання якості електронних навчальних ресурсів шляхом вдосконалення наявної системи якості, яка інтегрує технології та методики, що розробляються для оцінювання електронних навчальних ресурсів. У роботі Мохаммадреза Таваколі [40] запропоновано моделі оцінювання та прогнозування на підставі метаданих для визначення якості електронних навчальних ресурсів. Дослідження Стівена Агілара [1] спрямоване на оцінювання ресурсів, призначених для переходу до онлайн-навчання, зокрема наведено необхідні критерії.

Питання якості програмного забезпечення з використанням нечіткої логіки досліджують Цай Якун, Хуан Цзяньчан та інші [38]. Представлена дослідниками модель спрямована на швидке оцінювання якості програмного забезпечення та може правильно відображати зв'язок між внутрішніми та зовнішніми властивостями програмного забезпечення. Одрі Ромеро-Пелаез та Рене Солано [35] генерують пропозицію щодо розроблення прототипу системи, що підтримує пошук і добір електронних навчальних ресурсів, які доцільно впроваджувати в освітню практику.

Дослідники Халід Альмохаммаді і Хані Хаграс [3] аналізують особливості створення персоналізованого навчального середовища, що базується на нечіткій логіці, для передачі знань з урахуванням характеристик студентів. Запропонована методологія використовує систему самонавчання, яка дає змогу генерувати на підставі даних модель з використанням нечіткої логіки. Зазначена модель генерується на підставі даних, що представляють різні можливості студентів. У дослідженнях Костянтина Хрисафіаді, Марії Вірву [9], Мелтем Ерилмаз [13] розроблено і представлено інтелектуальні системи навчання з використанням методів штучного інтелекту та нечіткої логіки для адаптивної підтримки студентів у процесі електронного навчання. Дослідження Ізаміра Бінті Ішака [22] спрямоване на оцінювання успішності студентів з використанням теорії нечіткої логіки, у статті [36] представлено інноваційну методологію оцінювання знань. Оцінювання результатів навчання за курсом за допомогою нечіткої логіки продемонстровано у статтях [41] та [43], продемонстровано можливості точнішого оцінювання рівня знань після освоєння курсу, з урахуванням низки параметрів, що забезпечують процес навчання.

Нечітка логіка, яку відстоював Лотфі Заде, використовується для вимірювання здібностей, компетентностей та навичок викладачів, які є нечіткими поняттями, подавши їх нечіткими термінами, зокрема такий підхід запропоновано використовувати для опрацювання різномісної інформації. У дослідженнях Шрідхара Рамачандрана, Маматхи Гурупрасада [19] розроблено моделі нечіткої логіки з використанням алгоритму візуальних основ, щоб встановити важливість кожного критерію у процесі оцінювання діяльності викладачів. Дослідження Шаді Алі та Івана Врана [4] спрямоване на огляд сучасних наукових підходів до концептуального моделювання системи нечітких знань.

Процес оцінювання електронних навчальних ресурсів є складною процедурою, яка передбачає аналіз функціональних можливостей, доступність, архітектуру та інших критеріїв. На сьогодні актуальним є розроблення певного алгоритму, що сприяє ефективному оцінюванню електронних навчальних ресурсів. Зручним варіантом такого алгоритму є рекомендаційна система.

Вагомими роботами в галузі дослідження, розроблення та вдосконалення рекомендаційних систем є праці зарубіжних і вітчизняних науковців, серед яких варто відзначити таких: Аврора Естебан, Амелія Зафра [14], Агустин Канас [7], Анна Чой [23], Боланле Оджого [30], Володимир Пасічний [5, 31], Джина Лін [26], Енні Ліма [25], Єлизавета Мелешко [27], Катрієн Верберт [18], Крістін Лахуд [29], Лукас Бернарді [6], Маріна Негрей [28], Олег Пурський [33], Олександр Харченко [33], Прагья Двіведі, Камал Бхарадвадж [11], Цзянбо Шу [37], Чжендун Нью [42], Юньсяо Чен [8].

У сфері освітніх послуг з використанням рекомендаційної системи здійснюється добір навчальних ресурсів з урахуванням стилю навчання та рівня знань студентів, забезпечуючи цим самим ефективність освітнього процесу. Іншими словами, учасникам освітнього процесу можна надати персоналізований навчальний контент [26]. Дослідження Цзянбо Шу та ін. [37] демонструють використання рекомендаційної системи, яка вивчає текстові дані навчального ресурсу за допомогою технології нейронних мереж та формує навчальні матеріали на належному рівні для учасників освітнього процесу, поєднуючи ці матеріали з їх уподобаннями.

Прагря Двіведі та ін. [11] продемонстрували архітектуру рекомендаційної системи, яка формує групу учасників освітнього процесу, відображаючи їх індивідуальні уподобання і надає їм найбільш відповідний навчальний контент на підставі їхнього стилю навчання та рівня знань. Джон Тарус та ін. [39] запропонували рекомендаційну систему щодо вибору ресурсів для онлайн-навчання, що базується на моделі спільної фільтрації на підставі знань. Аврори Естебан та ін. [14] запропонували гібридну рекомендаційну систему, метою якої є добір відповідних лекцій.

Незалежно від сфери використання та особливостей реалізації метою рекомендаційної системи є надання користувачеві найбільш релевантної для нього інформації, якою можуть бути пропозиції щодо різноманітних продуктів від фільмів і книжок до будинків або фінансових послуг.

Рекомендаційні системи – це програмні продукти, що функціонують на підставі даних про користувача та предметну область і надають пропозиції для полегшення процедур обрання [33]. Такі пропозиції спрямовані на підтримку користувачів рекомендаційними системами для генерації рекомендацій, наприклад щодо пошуку музики на підставі вподобань користувача або пропозиції якогось товару на підставі минулих покупок тощо. Рекомендаційна система має передбачати користь предмета або на підставі порівняння характеристик товарів вирішувати, який з них рекомендувати тому чи іншому користувачу. Залежно від використовуваних знань, цілей, а особливо від алгоритму побудови рекомендаційних систем, розрізняють чотири традиційних типи: на підставі колаборативної фільтрації, на підставі контенту, на підставі знань та гібридні.

На думку Марини Негрей [28], рекомендаційна система – це підклас системи фільтрації інформації, яка формує рейтинговий перелік об'єктів, яким користувач може надати перевагу. Для цього використовується інформація про користувача, його історія в середовищі (наприклад, історія покупок), інформація про самі об'єкти і т. ін. Також рекомендаційні системи порівнюють однотипні дані про різних людей і розраховують список рекомендацій для конкретного користувача. Рекомендаційні системи аналізують вподобання членів спільноти (цільової аудиторії, соціальної мережі, покупців і т. ін.), щоб ідентифікувати інформацію або товари, якими швидше за все будуть цікавитися покупці (клієнти).

Дослідники Єлизавета Мелешко та Сергій Семенов [27] вважають, що рекомендаційні системи – це програмне забезпечення, що використовується для прогнозування того, які об'єкти (товари, вебсайти, фільми, новини тощо) будуть цікаві користувачу, на підставі зіб-

раної про нього інформації. Ці дослідники розглядають три основні типи рекомендаційних систем у мережі Інтернет, засновані на: контентній фільтрації (content-based filtering); колаборативній фільтрації (collaborative filtering); гібридних методах.

У нашому дослідженні рекомендаційні системи – це клас інтелектуальних систем, які сприяють ефективним генеруванням рекомендацій щодо обрання електронних навчальних ресурсів, які відповідають вимогам учасників освітнього процесу за певними критеріями, на підставі методів нечіткої логіки шляхом формування їх рейтингового переліку.

**Матеріали та методи дослідження.** Розроблення рекомендаційної системи для оцінювання та вибору електронних навчальних ресурсів полягає в тому, щоб зробити ці процеси швидкими, точними та правильними, використовуючи сучасні методи опрацювання даних і моделі подання знань для вирішення складних завдань з організації освітнього процесу.

Архітектуру рекомендаційної системи показано на рис. 1. Вона складається з таких підсистем: підсистема управління базою даних; підсистема управління базою моделей і базою знань; підсистема інтерфейсу користувача, зазвичай має дружній характер.

У підсистемі управління базою даних зберігаються дані, що стосуються процесу генерування рекомендацій. Користувач може точно отримувати дані з системи управління базою даних (СУБД) для розроблення моделі. База даних містить інтегровану сукупність записів даних, файлів та інших даних, пов'язаних із проблемною галуззю. Запропонована СУБД надає засоби для створення, контролю доступу до даних, забезпечення цілісності даних, відновлення бази даних після збоїв та їх відновлення з файлів резервної копії, підтримки безпеки бази даних з можливістю оновлення та створення звітів [45].

У цьому дослідженні категорії даних можна визначити як критерії оцінки ефективності (інтерактивність, мультимедійність, можливість модифікації, кросплатформенність, вільно поширюваність, архітектура, функціональність, чисельність тем для опрацювання, відповідність предметній області, відповідність змісту навчального контенту освітнім стандартам).



Рис. 1. Архітектура рекомендаційної системи / The architecture of a recommender system

База моделей та підсистема управління знаннями допомагає користувачам, які приймають рішення, отримати доступ до різних моделей, розроблених для цієї

програми, з метою генерації рекомендацій. Ця підсистема містить моделі оцінки та вибору електронних навчальних ресурсів, зокрема моделі нечіткої логіки. Ці моделі математично представляють різні види діяльності в генеруванні рекомендацій, які побудовані за допомогою методу аналізу ієрархій. Метою цієї підсистеми є перетворення даних із СУБД в інформацію, корисну для генерування рекомендацій. Підсистема має такі компоненти, як: база моделей, база знань, каталог моделей, виконання моделі, інтеграція моделей та командний процесор. Важливі функції дають змогу користувачам маніпулювати моделями, щоб вони могли проводити експерименти для досягнення мети. Вони також зберігають, отримують і керують широким спектром різних типів моделей інтегрованим способом. Інтерфейс системи безпосередньо взаємодіє з користувачем, який очікує рекомендацій. Користувач має вибір і послідовність стратегій вибору у процесі обрання на підставі згенерованих рекомендацій [16].

Підхід з використанням нечіткої логіки є нечітким розширенням методу аналізу ієрархій. Метод аналізу ієрархій є одним з найпоширеніших методів для вирішення обрання за багатьма критеріями. Метод аналізу ієрархій розкладає проблему та виконує попарне порівняння всіх елементів і порівнює критерії чи альтернативи щодо критерію у природному, попарному режимі. Алгоритм роботи цього підходу показано на рис. 2.

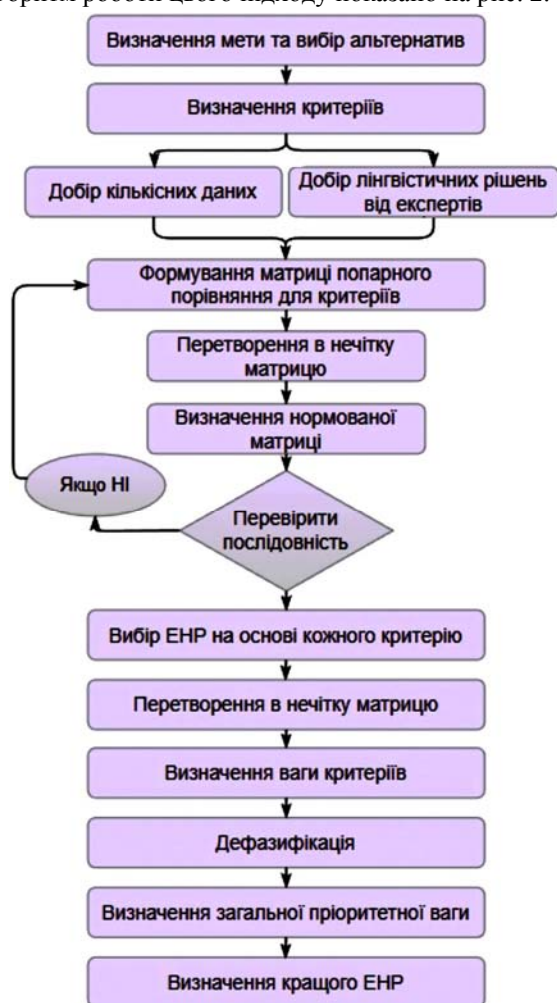


Рис. 2. Алгоритм вибору електронних навчальних ресурсів / Algorithm for selecting electronic learning resources

Процес починається зі збирання кількісних і якісних даних, а також лінгвістичного рішення від експертів,

які проводять оцінювання. Тоді з використанням методів нечіткої логіки здійснюються необхідні обрахунки.

Нечітка підмножина  $\tilde{A}$  універсальної множини  $U$  характеризується функцією приналежності  $\mu_A: U \rightarrow [0,1]$ , яка ставить у відповідність кожному елементу  $u \in U$  число  $\mu_A(u)$  з інтервалу  $[0,1]$ , що характеризує ступінь приналежності елемента підмножині  $A$ . Ступінь приналежності – це число з діапазону  $[0,1]$ . З вищим ступенем приналежності елемент універсальної множини більше відповідає властивостям нечіткої множини.

Носієм нечіткої множини  $A$  є множина точок в  $U$ , для яких величина додатна. Висотою нечіткої множини  $A$  є величина  $\sup_U \mu_A(u)$ .

Функцією приналежності називають функцію, що дає змогу для будь-якого елемента універсальної множини обчислити ступінь його приналежності нечіткій множині. Якщо універсальна множина є скінченною  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , тоді нечітку множину  $\tilde{A}$  записують так:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^k \mu_A(u_i) / u_i.$$

У разі неперервної множини  $U$  використовують наступне позначення:

$$\tilde{A} = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u.$$

Множину  $A$  можна визначити через характеристичну функцію  $\varphi_A(u)$ , що набуває одного з двох значень: 0 – якщо  $u$  не належить множині ( $u \notin A$ ) і 1 – якщо належить ( $u \in A$ ). Отже, чітку множину можна розглядати як граничний випадок нечіткої множини, функція приналежності якої набуває тільки бінарних значень [24].

Лінгвістичною змінною називають змінну, значення якої можуть бути словами або словосполученнями. Терм-множиною називають множину всіх можливих значень лінгвістичних змінних. Термом називають будь-який елемент терм-множини. Терм задається нечіткою множиною за допомогою функції приналежності.

Практичне застосування теорії нечітких множин передбачає наявність функцій приналежності, якими описуються лінгвістичні терми "низький", "середній", "високий" та інші. Задача побудови функцій приналежності полягає в такому. Дано дві множини: множина термів  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$  і універсальна множина  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

Нечітка множина  $\tilde{l}$  для задавання лінгвістичного терму  $l_j$  на універсальній множині  $U$  задається у вигляді:

$$\tilde{l}_j = \left( \frac{\mu_j(u_1)}{u_1}, \frac{\mu_j(u_2)}{u_2}, \dots, \frac{\mu_j(u_n)}{u_n} \right), \quad j = \overline{1, m}.$$

Необхідно визначити ступені приналежності елементів множини  $U$  до елементів із множини  $L$ , тобто знайти  $\mu_j(u_i)$  для всіх  $j = \overline{1, m}$  та  $i = \overline{1, n}$ .

Використовують два методи побудови функцій приналежності. Перший метод базується на статистичному опрацюванні рішень групи експертів. Другий метод базується на парних порівняннях, що виконує один експерт. Тоді наводять аналітичні вирази, що використовуються для апроксимації функцій приналежності, що побудовані за експертними даними.

Під час побудови функції приналежності першим методом, кожен експерт заповнює анкету, в якій вказує

свої рішення про наявність у елементів  $u_i (i = \overline{1, n})$  властивостей нечіткої множини  $\tilde{I}_j (j = \overline{1, m})$ .

Анкета має такий вигляд:

	$u_1$	$u_2$	...	$u_n$
$\tilde{I}_1$				
$\tilde{I}_2$				
...				
$\tilde{I}_m$				

Нехай  $K$  – кількість експертів;  $b_{j,i}^k$  – рішення  $k$ -го експерта про наявність у елемента  $u_i$  властивостей нечіткої множини  $\tilde{I}_j$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Вважатимемо, що експертні оцінки бінарні, тобто  $b_{j,i}^k \in \{0; 1\}$ , де 1 вказує на наявність у елемента  $u_i$  властивостей нечіткої множини  $\tilde{I}_j$ , а 0 – на їх відсутність. За результатами анкетування ступені приналежності нечіткої множини  $\tilde{I}_j$  обраховують так:

$$\mu_j(u_i) = \frac{1}{K} \sum_{k=1, K} b_{j,i}^k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Під час побудови функції приналежності за другим методом для кожної пари елементів універсальної множини експерт оцінює переваги одного елемента над другим щодо властивостей нечіткої множини. Такі парні порівняння зручно представляти такою матрицею:

$$A = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

де  $a_{ij}$  – рівень переваг елемента  $u_i$  над  $u_j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , що визначається за дев'ятибальною шкалою Сааті:

- 1 – якщо перевага елемента  $u_i$  над елементом  $u_j$  відсутня;
- 3 – якщо перевага елемента  $u_i$  над елементом  $u_j$  слабка;
- 5 – якщо перевага елемента  $u_i$  над елементом  $u_j$  істотна;
- 7 – якщо перевага елемента  $u_i$  над елементом  $u_j$  очевидна;
- 9 – якщо перевага елемента  $u_i$  над елементом  $u_j$  абсолютна;
- 2, 4, 6, 8 – проміжні порівняльні оцінки: 2 – майже слабка перевага, 4 – майже істотна перевага, 6 – майже очевидна перевага, 8 – майже абсолютна перевага.

Матриця парних порівнянь є діагональною ( $a_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$ ) і обернено симетричною ( $a_{ij} = 1/a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$ ).

Ступені приналежності вважають рівними відповідним координатам власного вектора  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  матриці парних порівнянь  $A$ :

$$\mu(u_i) = w_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Власний вектор знаходять із такої системи рівнянь:

$$AW = \lambda_{\max} W, \quad \sum_{j=1}^n w_j = 1, \quad (3)$$

де  $\lambda_{\max}$  – максимальне власне значення матриці  $A$ .

Нехай  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  – множина варіантів, що потрібно проаналізувати.  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$  – множина критеріїв, за якими оцінюють варіанти. Задача багатокритеріального аналізу полягає у впорядкуванні елементів множини  $P$  за критеріями із множини  $G$ .

Нехай  $\mu_{G_i}(P_j)$  число в діапазоні  $[0, 1]$ , яким оцінюється варіант  $P_j \in P$  за критерієм  $G_i \in G$ : чим більше  $\mu_{G_i}(P_j)$ , тим кращий варіант  $P_j$  за критерієм  $G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k}$ . Тоді критерій  $G_i$  можна представити нечіткою множиною  $\tilde{G}_i$  на універсальній множині варіантів  $P$ :

$$G_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}, \quad (4)$$

де  $\mu_{G_i}(P_j)$  – ступінь приналежності елемента  $P_j$  нечіткій множині  $\tilde{G}_i$ .

Знаходити ступені приналежності нечіткої множини зручно методом побудови функції приналежності на підставі парних порівнянь. Під час використання цього методу необхідно сформувати матриці парних порівнянь варіантів за кожним критерієм. Загальна кількість таких матриць дорівнює кількості критеріїв.

Найкращий варіант буде той, що одночасно кращий за всіма критеріями. Нечітке рішення  $\tilde{D}$  знаходиться як перетин критеріїв:

$$\tilde{D} = \bigcap_{j=1}^n \tilde{G}_j = \left\{ \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}. \quad (5)$$

Згідно з отриманою нечіткою множиною  $\tilde{D}$ , найкращим варіантом варто вважати той, у якого найбільший ступінь приналежності:

$$D = \arg \max (\mu_D(P_1), \mu_D(P_2), \dots, \mu_D(P_k)).$$

У разі нерівно важливих критеріїв ступені приналежності нечіткої множини  $\tilde{D}$  знаходять так:

$$\mu_D(P_j) = \min_{i=1, n} (\mu_{G_i}(P_j))^{a_i}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6)$$

де  $a_i$  – коефіцієнт відносної важливості критерію  $G_i$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ .

Показник степеня  $a_i$  у формулі концентрує нечітку множину  $\tilde{G}_i$  відповідно до міри важливості критерію  $G_i$ . Коефіцієнти відносної важливості критеріїв будуть визначені за допомогою парних порівнянь за шкалою Сааті [17].

## Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

Як приклад обрання в нечітких умовах за схемою Беллмана-Заде розглянемо порівняння чотирьох систем комп'ютерної математики (СКМ): GeoGebra, SMathStudio, SageMath, Wolfram Mathematica ( $P_1 \div P_2$ ) для ефективного застосування у процесі математичної підготовки ІТ-фахівців. Для оцінки СКМ скористаємося такими критеріями [15]:  $G_1$  – інтерактивність;  $G_2$  – мультимедійність;  $G_3$  – можливість модифікацій;  $G_4$  – кросплатформенність;  $G_5$  – вільнопоширюваність;  $G_6$  – архітектура;  $G_7$  – функціональність;  $G_8$  – чисельність тем для опрацювання;  $G_9$  – відповідність предметній області;  $G_{10}$  – відповідність навчального змісту освітнім стандартам.

Експертне оцінювання проєктів за критеріями  $G_1 \div G_{10}$  наведено в таблиці. За кожним критерієм порівнювалися шість пар СКМ. Для виставлення оцінок за різними критеріями застосовується 5-бальна шкала. Кожен критерій експертного оцінювання складається із декількох підкритеріїв, аби формування загального балу було прозорим і обґрунтованим.

**Таблиця.** Парні порівняння проектів за шкалою Сааті /  
Pairwise comparisons of projects on the Saaty scale

Кри- терій	Експертні парні порівняння	
$G_1$	Істотна перевага $P_1$ над $P_2$ Істотна перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_1$ над $P_4$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Істотна перевага $P_4$ над $P_2$ Істотна перевага $P_4$ над $P_3$
$G_2$	Істотна перевага $P_1$ над $P_2$ Майже істотна перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_1$ над $P_4$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_2$ Істотна перевага $P_4$ над $P_3$
$G_3$	Відсутня перевага $P_1$ над $P_2$ Відсутня перевага $P_1$ над $P_3$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_1$	Слабка перевага $P_2$ над $P_3$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_2$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_3$
$G_4$	Слабка перевага $P_1$ над $P_2$ Слабка перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_4$ над $P_1$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Слабка перевага $P_4$ над Слабка перевага $P_4$ над $P_3$
$G_5$	Майже слабка перевага $P_1$ над $P_2$ Слабка перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_4$ над $P_1$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_2$ Слабка перевага $P_4$ над $P_3$
$G_6$	Майже слабка перевага $P_1$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_4$ над $P_1$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_3$
$G_7$	Істотна перевага $P_1$ над $P_2$ Істотна перевага $P_1$ над $P_3$ Майже очевидна перевага $P_1$ над $P_4$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_2$ Очевидна перевага $P_4$ над $P_3$
$G_8$	Очевидна перевага $P_1$ над $P_2$ Очевидна перевага $P_1$ над $P_3$ Майже істотна перевага $P_1$ над $P_4$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Майже абсолютна перевага $P_4$ над $P_2$ Майже абсолютна перевага $P_4$ над $P_3$
$G_9$	Майже слабка перевага $P_1$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_4$ над $P_1$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_3$
$G_{10}$	Майже слабка перевага $P_1$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_1$ над $P_3$ Відсутня перевага $P_4$ над $P_1$	Відсутня перевага $P_2$ над $P_3$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_2$ Майже слабка перевага $P_4$ над $P_3$

Експертним висновкам відповідають такі матриці парних порівнянь:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/5 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/5 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}; & A(G_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/4 & 1 & 1 & 1/5 \\ 1 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \\
 A(G_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1 & 1 & 3 & 1/7 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/7 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}; & A(G_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \\
 A(G_5) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; & A(G_6) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \\
 A(G_7) &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 6 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/5 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1/6 & 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}; & A(G_8) &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 & 4 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/8 \\ 1/7 & 1 & 1 & 1/8 \\ 1/4 & 8 & 8 & 1 \end{bmatrix};
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$A(G_9) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad A(G_{10}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

У кожній матриці шість елементів, що відповідають парним порівнянням з таблиці. Інші елементи знайдені з урахуванням, що матриця парних порівнянь є діагональною і обернено симетричною.

Застосувавши формули (2) і (3) до матриць парних порівнянь (7), отримаємо такі нечіткі множини:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_1 &= \left\{ \frac{0,42}{P_1}, \frac{0,08}{P_2}, \frac{0,08}{P_3}, \frac{0,42}{P_4} \right\}; & \tilde{G}_2 &= \left\{ \frac{0,41}{P_1}, \frac{0,07}{P_2}, \frac{0,09}{P_3}, \frac{0,43}{P_4} \right\}; \\
 \tilde{G}_3 &= \left\{ \frac{0,10}{P_1}, \frac{0,11}{P_2}, \frac{0,08}{P_3}, \frac{0,70}{P_4} \right\}; & \tilde{G}_4 &= \left\{ \frac{0,38}{P_1}, \frac{0,13}{P_2}, \frac{0,13}{P_3}, \frac{0,38}{P_4} \right\}; \\
 \tilde{G}_5 &= \left\{ \frac{0,35}{P_1}, \frac{0,17}{P_2}, \frac{0,13}{P_3}, \frac{0,35}{P_4} \right\}; & \tilde{G}_6 &= \left\{ \frac{0,33}{P_1}, \frac{0,17}{P_2}, \frac{0,17}{P_3}, \frac{0,33}{P_4} \right\}; \\
 \tilde{G}_7 &= \left\{ \frac{0,63}{P_1}, \frac{0,07}{P_2}, \frac{0,07}{P_3}, \frac{0,13}{P_4} \right\}; & \tilde{G}_8 &= \left\{ \frac{0,65}{P_1}, \frac{0,06}{P_2}, \frac{0,065}{P_3}, \frac{0,19}{P_4} \right\}; \\
 \tilde{G}_9 &= \left\{ \frac{0,33}{P_1}, \frac{0,17}{P_2}, \frac{0,17}{P_3}, \frac{0,33}{P_4} \right\}; & \tilde{G}_{10} &= \left\{ \frac{0,33}{P_1}, \frac{0,17}{P_2}, \frac{0,17}{P_3}, \frac{0,33}{P_4} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Із (8) випливає, що СКМ  $P_1$  є кращою за критеріями  $G_1, G_2, G_5, G_6 - G_{10}$ ; СКМ  $P_4$  – за критеріями  $G_1 - G_6, G_9, G_{10}$ . Тому вибір СКМ буде залежати від важливості критеріїв.

Для розрахунку коефіцієнтів відносної важливості критеріїв скористаємося експертним методом парних порівнянь. Застосуємо такі лінгвістичні парні порівняння важливості критеріїв:

- майже слабка перевага  $G_1$  над  $G_2$ ;
- відсутня перевага  $G_1$  над  $G_9$ ;
- відсутня перевага  $G_1$  над  $G_{10}$ ;
- відсутня перевага  $G_2$  над  $G_9$ ;
- відсутня перевага  $G_2$  над  $G_{10}$ ;
- істотна перевага  $G_3$  над  $G_1$ ;
- майже очевидна перевага  $G_3$  над  $G_2$ ;
- майже слабка перевага  $G_3$  над  $G_6$ ;
- відсутня перевага  $G_3$  над  $G_9$ ;
- відсутня перевага  $G_3$  над  $G_{10}$ ;
- майже істотна перевага  $G_4$  над  $G_1$ ;
- істотна перевага  $G_4$  над  $G_2$ ;
- істотна перевага  $G_4$  над  $G_3$ ;
- майже слабка перевага  $G_4$  над  $G_5$ ;
- слабка перевага  $G_4$  над  $G_6$ ;
- майже слабка перевага  $G_4$  над  $G_9$ ;
- майже слабка перевага  $G_4$  над  $G_{10}$ ;
- майже істотна перевага  $G_5$  над  $G_1$ ;
- майже істотна перевага  $G_5$  над  $G_2$ ;
- істотна перевага  $G_5$  над  $G_3$ ;
- майже істотна перевага  $G_5$  над  $G_6$ ;
- істотна перевага  $G_5$  над  $G_9$ ;
- істотна перевага  $G_5$  над  $G_{10}$ ;
- майже слабка перевага  $G_6$  над  $G_1$ ;
- майже слабка перевага  $G_6$  над  $G_2$ ;
- відсутня перевага  $G_6$  над  $G_7$ ;
- відсутня перевага  $G_6$  над  $G_8$ ;
- майже слабка перевага  $G_6$  над  $G_{10}$ ;
- майже істотна перевага  $G_7$  над  $G_1$ ;
- істотна перевага  $G_7$  над  $G_2$ ;
- слабка перевага  $G_7$  над  $G_3$ ;
- майже слабка перевага  $G_7$  над  $G_4$ ;
- майже слабка перевага  $G_7$  над  $G_5$ ;
- відсутня перевага  $G_7$  над  $G_8$ ;
- майже істотна перевага  $G_7$  над  $G_9$ ;
- майже істотна перевага  $G_7$  над  $G_{10}$ ;
- майже істотна перевага  $G_8$  над  $G_1$ ;
- істотна перевага  $G_8$  над  $G_2$ ;

- слабка перевага  $G_8$  над  $G_3$ ;
- майже слабка перевага  $G_8$  над  $G_4$ ;
- майже слабка перевага  $G_8$  над  $G_5$ ;
- слабка перевага  $G_8$  над  $G_9$ ;
- слабка перевага  $G_8$  над  $G_{10}$ ;
- відсутня перевага  $G_9$  над  $G_{10}$ .

Експертним висновкам відповідає така матриця парних порівнянь:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 1/5 & 1/5 & 2 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1/2 & 1/2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 1/2 & 1 & 4 & 1/2 & 1/2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11 & 1/2 & 1/5 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

За формулами (2) і (3) знаходимо коефіцієнти відносної важливості критеріїв  $G_1, G_2, \dots, G_{10}$ :  $a_1 = 0,04$ ;  $a_2 = 0,03$ ;  $a_3 = 0,06$ ;  $a_4 = 0,17$ ;  $a_5 = 0,16$ ;  $a_6 = 0,07$ ;  $a_7 = 0,19$ ;  $a_8 = 0,18$ ;  $a_9 = 0,05$ ;  $a_{10} = 0,05$ , що означає найбільшу важливість під час прийняття рішення крос-платформенність  $G_4$ , функціональність  $G_7$  і чисельність тем для опрацювання  $G_8$ .

За формулою (6) отримуємо такі нечіткі множини:

$$\tilde{G}_1^{a_1} = \left\{ \frac{0,42^{0,04}}{P_1}, \frac{0,08^{0,04}}{P_2}, \frac{0,08^{0,04}}{P_3}, \frac{0,42^{0,04}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,966}{P_1}, \frac{0,904}{P_2}, \frac{0,904}{P_3}, \frac{0,966}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_2^{a_2} = \left\{ \frac{0,41^{0,03}}{P_1}, \frac{0,07^{0,03}}{P_2}, \frac{0,09^{0,03}}{P_3}, \frac{0,43^{0,03}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,974}{P_1}, \frac{0,923}{P_2}, \frac{0,930}{P_3}, \frac{0,975}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_3^{a_3} = \left\{ \frac{0,10^{0,06}}{P_1}, \frac{0,11^{0,06}}{P_2}, \frac{0,08^{0,06}}{P_3}, \frac{0,70^{0,06}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,759}{P_1}, \frac{0,876}{P_2}, \frac{0,859}{P_3}, \frac{0,979}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_4^{a_4} = \left\{ \frac{0,38^{0,17}}{P_1}, \frac{0,13^{0,17}}{P_2}, \frac{0,13^{0,17}}{P_3}, \frac{0,38^{0,17}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,848}{P_1}, \frac{0,707}{P_2}, \frac{0,707}{P_3}, \frac{0,848}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_5^{a_5} = \left\{ \frac{0,35^{0,16}}{P_1}, \frac{0,17^{0,16}}{P_2}, \frac{0,13^{0,16}}{P_3}, \frac{0,35^{0,16}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,845}{P_1}, \frac{0,753}{P_2}, \frac{0,721}{P_3}, \frac{0,845}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_6^{a_6} = \left\{ \frac{0,33^{0,07}}{P_1}, \frac{0,17^{0,07}}{P_2}, \frac{0,17^{0,07}}{P_3}, \frac{0,33^{0,07}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,925}{P_1}, \frac{0,883}{P_2}, \frac{0,883}{P_3}, \frac{0,925}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_7^{a_7} = \left\{ \frac{0,63^{0,19}}{P_1}, \frac{0,07^{0,19}}{P_2}, \frac{0,07^{0,19}}{P_3}, \frac{0,13^{0,19}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,916}{P_1}, \frac{0,603}{P_2}, \frac{0,603}{P_3}, \frac{0,679}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_8^{a_8} = \left\{ \frac{0,65^{0,18}}{P_1}, \frac{0,06^{0,18}}{P_2}, \frac{0,06^{0,18}}{P_3}, \frac{0,19^{0,18}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,925}{P_1}, \frac{0,603}{P_2}, \frac{0,603}{P_3}, \frac{0,742}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_9^{a_9} = \left\{ \frac{0,33^{0,05}}{P_1}, \frac{0,17^{0,05}}{P_2}, \frac{0,17^{0,05}}{P_3}, \frac{0,33^{0,05}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,946}{P_1}, \frac{0,915}{P_2}, \frac{0,915}{P_3}, \frac{0,946}{P_4} \right\};$$

$$\tilde{G}_{10}^{a_{10}} = \left\{ \frac{0,33^{0,05}}{P_1}, \frac{0,17^{0,05}}{P_2}, \frac{0,17^{0,05}}{P_3}, \frac{0,33^{0,05}}{P_4} \right\} = \left\{ \frac{0,946}{P_1}, \frac{0,915}{P_2}, \frac{0,915}{P_3}, \frac{0,946}{P_4} \right\}.$$

Перетин цих нечітких множин дає такі ступені приналежності нечіткого рішення  $\tilde{D}$ :

$$\mu_D(P_1) = \min(0,966; 0,974; 0,759; 0,848; 0,845; 0,925; 0,916; 0,925; 0,946; 0,946) = 0,759;$$

$$\mu_D(P_2) = \min(0,904; 0,923; 0,876; 0,707; 0,753; 0,883; 0,603; 0,603; 0,915; 0,915) = 0,603;$$

$$\mu_D(P_3) = \min(0,904; 0,930; 0,859; 0,707; 0,721; 0,883; 0,603; 0,603; 0,915; 0,915) = 0,603;$$

$$\mu_D(P_4) = \min(0,966; 0,975; 0,972; 0,848; 0,845; 0,925; 0,679; 0,742; 0,946; 0,946) = 0,679.$$

У результаті виконання таких дій отримаємо нечітку множину  $\tilde{D} = \left\{ \frac{0,759}{P_1}, \frac{0,603}{P_2}, \frac{0,603}{P_3}, \frac{0,679}{P_4} \right\}$ , що свідчить

про перевагу СКМ  $P_1$  над іншими. Отже, СКМ  $P_1$  краща за інших, що одночасно задовольняють всі критерії з урахуванням їх важливості. Нечіткі множини, що показують, на скільки повно СКМ  $P_1 \div P_4$  відповідають критеріям  $G_1 \div G_{10}$ , запишемо так:

$$\tilde{P}_1 = \left\{ \frac{0,966}{G_1}, \frac{0,974}{G_2}, \frac{0,759}{G_3}, \frac{0,848}{G_4}, \frac{0,845}{G_5}, \frac{0,925}{G_6}, \frac{0,916}{G_7}, \frac{0,925}{G_8}, \frac{0,946}{G_9}, \frac{0,946}{G_{10}} \right\};$$

$$\tilde{P}_2 = \left\{ \frac{0,904}{G_1}, \frac{0,923}{G_2}, \frac{0,876}{G_3}, \frac{0,707}{G_4}, \frac{0,753}{G_5}, \frac{0,883}{G_6}, \frac{0,603}{G_7}, \frac{0,603}{G_8}, \frac{0,915}{G_9}, \frac{0,915}{G_{10}} \right\};$$

$$\tilde{P}_3 = \left\{ \frac{0,904}{G_1}, \frac{0,930}{G_2}, \frac{0,859}{G_3}, \frac{0,707}{G_4}, \frac{0,721}{G_5}, \frac{0,883}{G_6}, \frac{0,603}{G_7}, \frac{0,603}{G_8}, \frac{0,915}{G_9}, \frac{0,915}{G_{10}} \right\};$$

$$\tilde{P}_4 = \left\{ \frac{0,966}{G_1}, \frac{0,975}{G_2}, \frac{0,972}{G_3}, \frac{0,878}{G_4}, \frac{0,845}{G_5}, \frac{0,925}{G_6}, \frac{0,679}{G_7}, \frac{0,742}{G_8}, \frac{0,946}{G_9}, \frac{0,946}{G_{10}} \right\}.$$

На кругових діаграмах (див. рис. 3-6) показано відповідність СКМ  $P_1 \div P_4$  критеріям  $G_1 \div G_{10}$ . Нагадаємо, що кругова (секторна) діаграма – один із статистичних графіків у формі кола, яке поділено на сегменти, що ілюструють чисельне співвідношення вибраних критеріїв. У секторній діаграмі довжина кривої кожного сегменту відповідає числу, яке вона зображує.

Секторні діаграми дуже широко застосовуються у бізнесі та засобах масової інформації. Хоча багато хто

їх критикує та велика кількість фахівців рекомендують уникати їх, посилаючись на дослідження, що показали як важко порівнювати сегменти секторної діаграми, або зіставляти дані з різних секторних діаграм. Секторні діаграми у більшості випадків можуть бути замінені на інші графіки, такі як стовпчикові діаграми, коробковий графік та точкові графіки.

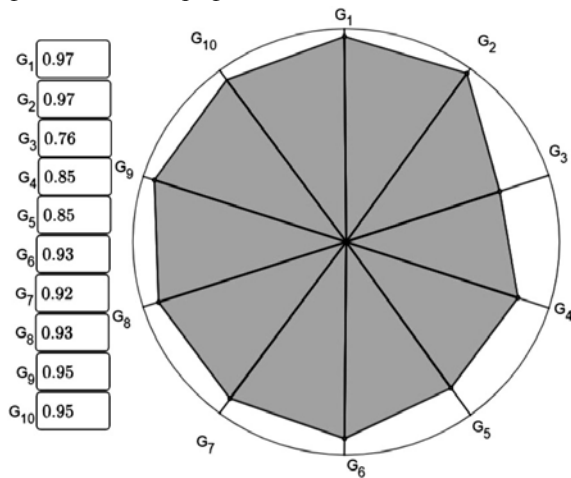


Рис. 3. СКМ GeoGebra з урахуванням важливості критеріїв  $G_1 \div G_{10}$  / SCM GeoGebra considering the importance of criteria  $G_1 \div G_{10}$

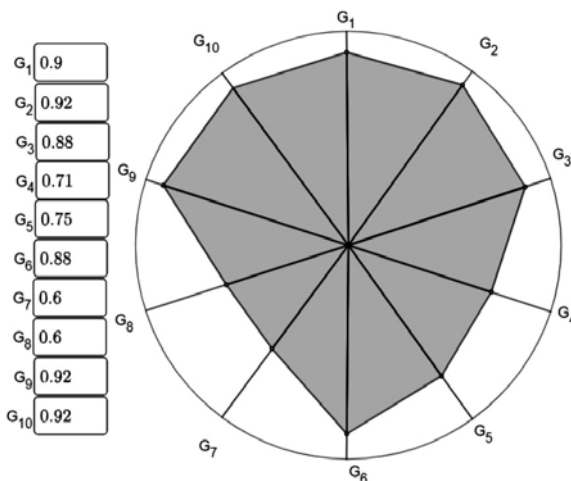


Рис. 4. СКМ SMathStudio з урахуванням важливості критеріїв  $G_1 \div G_{10}$  / SCM SMathStudio considering the importance of criteria  $G_1 \div G_{10}$

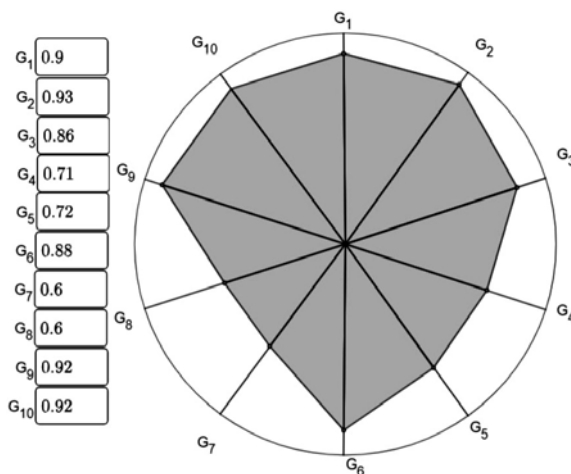


Рис. 5. СКМ SageMath з урахуванням важливості критеріїв  $G_1 \div G_{10}$  / SCM SageMath considering the importance of criteria  $G_1 \div G_{10}$

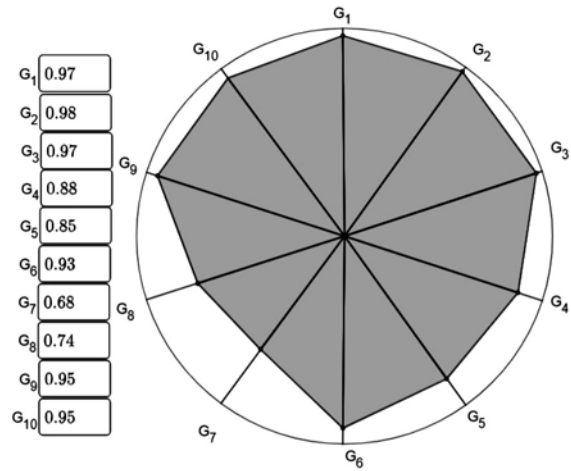


Рис. 6. СКМ Wolfram Mathematica з урахуванням важливості критеріїв  $G_1 \div G_{10}$  / SCM Wolfram Mathematica considering the importance of criteria  $G_1 \div G_{10}$

На підставі рис. 3-6 отримано перелік рекомендованих СКМ за такою послідовністю: GeoGebra, Wolfram Mathematica, SMathStudio, SageMath. Саме таку послідовність було отримано внаслідок обчислення незаповненої площі круга, тобто тієї частки якості електронних навчальних ресурсів якої ще потрібно досягти для сто відсоткової її повноти [44].

Згідно з проведеним дослідженням рекомендаційна система (рис. 7) пропонуватиме рекомендовані альтернативи СКМ саме в такій послідовності, що відповідають тим критеріям, що були зазначені вище. Основне завдання рекомендаційної системи – надання персоналізованих рекомендацій користувачу, які враховують його уподобання під час вибору електронних навчальних ресурсів.



Рис. 7. Загальна функціональність рекомендаційної системи підтримки прийняття рішень для вибору електронних навчальних ресурсів / The general structure of the recommender decision support system for the selection of eLearning resources

**Обговорення результатів дослідження.** Для вибору електронних навчальних ресурсів розроблено рекомендаційну систему, яка на підставі методів нечіткої логіки формує рейтинговий перелік ресурсів за певними критеріями. Математичний апарат нечіткої логіки та нечітких множин дає змогу формалізувати обґрунтування задачі, для яких відсутня повноцінна статистика або вирішуються питання узгодження суперечливих критеріїв в процесі генерування рекомендацій. Питання моделювання системи підтримки прийняття рішень з використанням нечіткої логіки досліджували такі вчені, як Арунагірі Раматілакама [34], Цай Якун [38], Халід Альмохаммаді [3], Костянтина Хрисафіаді [9], Мелтем Ерилмаз [13], Ізаміра Бінті Ішака [22], Шаді Алі [4], Маматхи Гурупрасада [19] та інші. Дослідження щодо розроблення та вдосконалення рекомендаційних систем, залежно від сфери використання, здійснювали на-



уковці: Агустин Канас [7], Анна Чой [23], Боланле Оджоко [30], Володимир Пасічник [5], Енні Ліма [25], Єлизавета Мелешко [27], Катрієн Верберт [18], Крістін Лахуд [29], Лукас Бернаді [6], Марина Негрей [28], Олег Пурський [33], Чжендун Нью [42], Юньсяо Чен [8].

У сфері освітніх послуг досліджують рекомендаційні системи для здійснення добору навчальних ресурсів та матеріалів з урахуванням стилю навчання та рівня знань студентів такі вчені: Аврора Естебан [14], Джина Лін [26], Джон Тарус [39], Прагья Двіведі [11], Цзянбо Шу [37].

У цьому дослідженні проаналізовано функціональні особливості рекомендаційної системи, розробленої на підставі методів нечіткої логіки, що формує рейтинговий перелік електронних навчальних ресурсів, які відповідають вимогам учасників освітнього процесу за певними критеріями. Як приклад, розглянуто чотири системи комп'ютерної математики, які оцінювалися за десятьма критеріями з урахуванням важливості кожного з критеріїв. Як свідчать результати апробації рекомендаційної системи, генерується рейтинговий список досліджуваних об'єктів з урахуванням вагомості заданих критеріїв.

Отже, за результатами виконаної роботи можна сформулювати такі наукову новизну та практичну значущість результатів дослідження.

*Наукова новизна отриманих результатів дослідження* – удосконалено поняття рекомендаційної системи для генерування рекомендацій щодо вибору найефективніших електронних навчальних ресурсів; розроблено рекомендаційну систему для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів на підставі методів нечіткої логіки.

*Практична значущість результатів дослідження* – створено рекомендаційну систему, яка сприяє ефективному генеруванню рекомендацій щодо обрання електронних навчальних ресурсів на підставі методів нечіткої логіки шляхом формування їх рейтингового переліку, що сприятиме підвищенню ефективності навчального процесу в умовах дистанційного проведення занять.

## Висновки / Conclusion

1. Унаслідок дослідження отримано рекомендаційну систему, що з використанням методів нечіткої логіки проводить експертне оцінювання електронних навчальних ресурсів, зокрема систем комп'ютерної математики. Розроблена рекомендаційна система забезпечує формування рейтингового переліку електронних навчальних ресурсів з метою вибору найефективніших для використання у навчальному процесі.

2. Проаналізовано наукові публікації щодо здійснення процесу експертного оцінювання загалом і використання методів нечіткої логіки в цих процедурах. Вивчено результати досліджень щодо розроблення та використання рекомендаційних систем у різних сферах, зокрема в освітній діяльності.

3. Розглянуто та проаналізовано наявні визначення концепту "рекомендаційна система", залежно від сфери використання. Удосконалено трактування терміна "рекомендаційна система" для генерування рекомендацій щодо вибору найефективніших електронних навчальних ресурсів.

4. Досліджено можливості застосування теорії нечіткої логіки у процесі експертного оцінювання електрон-

них навчальних ресурсів, зокрема генерації рекомендацій на підставі запропонованих критеріїв. Запропоновано підхід з використанням нечіткої логіки, що є нечітким розширенням методу аналізу ієрархій для здійснення вибору за багатьма критеріями. Із застосуванням методу аналізу ієрархій виконано попарне порівняння всіх чотирьох систем комп'ютерної математики за обраними критеріями. Створено методологію розроблення якісних і кількісних критеріїв в умовах невизначеності. Застосовність цих методів проілюстрована на прикладі процедури вибору електронних навчальних ресурсів.

Також розроблено рекомендаційну систему на підставі методів нечіткої логіки для експертного оцінювання електронних навчальних ресурсів.

Унаслідок апробації рекомендаційної системи проведено експертне оцінювання електронних навчальних ресурсів з використанням методів нечіткої логіки та отримано рейтинговий список рекомендованих електронних навчальних ресурсів, що відповідають заданим критеріям. З отриманих результатів можна зробити висновок, що використання розробленої рекомендаційної системи є ефективним засобом генерування рекомендацій щодо вибору електронних навчальних ресурсів.

## References

1. Aguilar, S. J. (2020). A research-based approach for evaluating resources for transitioning to teaching online. *Information and Learning Sciences*, 121(5/6), 301–310. <https://doi.org/10.1108/ILS-04-2020-0072>
2. Almazyad, R. (2019). Enhancing the Quality and Reliability of OER Content. Eighth International Conference on Educational Innovation through Technology (EITT), 35–38. <https://doi.org/10.1109/EITT.2019.00016>
3. Almohammadi, K., & Hagra, H. (2013). An adaptive fuzzy logic based system for improved knowledge delivery within intelligent E-Learning platforms. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1–8. <https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2013.6622350>
4. Aly, S., & Vrana, I. (2018). Toward efficient modeling of fuzzy expert systems: a survey. *Agricultural Economics*, 52, 456–460. <https://doi.org/10.17221/5051-agricecon>
5. Artemenko, O., Kunanets, O., & Pasichnyk, V. (2017). E-tourism recommender systems: a survey and development perspectives. *Econtechmod*, 6(2), 91–95.
6. Bernardi, L., Kamps, J., Kiseleva, Y., & Mueller, M. (2015). The Continuous Cold Start Problem in e-Commerce Recommender Systems. *CEUR Workshop Proceedings*, 1448, 30–33.
7. Cañas, A., Santos, J., Anido-Rifón, L., & Perez-Rodriguez, R. (2015). A Recommender System for Non-traditional Educational Resources: A Semantic Approach. *Journal of Universal Computer Science*, 21(2), 306–325.
8. Chen, Y., Li, X., Liu, J., & Ying, Z. (2017). Recommendation System for Adaptive Learning. *Applied Psychological Measurement*, 42(1), 24–41. <https://doi.org/10.1177/0146621617697959>
9. Chrysafiadi, K., & Virvou, M. (2015). Fuzzy Logic for Adaptive Instruction in an E-learning Environment for Computer Programming. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(1), 164–177. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2310242>
10. Clements, K. I., & Pawlowski, J. M. (2012). User-oriented quality for OER: understanding teachers views on re-use, quality, and trust. *J. Comput. Assist. Learn.*, 28, 4–14. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2011.00450.x>
11. Dwivedi, P., & Bharadwaj, K. (2013). E-Learning recommender system for a group of learners based on the unified learner profile approach. *Expert Systems*, 32(2), 264–276. <https://doi.org/10.1111/exsy.12061>
12. Elias, M., Oelen, A., Tavakoli, M., Kismihók, G., & Auer, S. (2020). Quality Evaluation of Open Educational Resources. *EC-TEL*, 12315. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-57717-9\\_36](https://doi.org/10.1007/978-3-030-57717-9_36)

13. Eryilmaz, M., & Adabashi, A. M. (2020). Development of an Intelligent Tutoring System Using Bayesian Networks and Fuzzy Logic for a Higher Student Academic Performance. *Applied Sciences*, 10, 10(19), 1–18. <https://doi.org/10.3390/app10196638>
14. Esteban, A., Zafra, A., & Romero, C. (2019). Helping university students to choose elective courses by using a hybrid multi-criteria recommendation system with genetic optimization. *Knowledge-Based Systems*, 194(4). <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2019.105385>
15. Fedoniuk, A. A., & Yunchyk, V. L. (2019). Porivnialna kharakterystyka funkcionalnykh mozhlyvostei system kompiuternoї matematyky v protsesi rozviazuvannia zadach. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politehnika". Informatsiini systemy ta merezhi*, 6, 90–102. <https://doi.org/10.23939/sisn2019.02.090>
16. Fedonuyk, A., Yunchyk, V., Cheprasova, T., & Yatsyuk, S. (2020). The Models of Data and Knowledge Representation in Educational System of Mathematical Training of IT-specialists. *IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies*, 2, 269–272. <https://doi.org/10.1109/CSIT49958.2020.9321899>
17. Fedonuyk, A., Yunchyk, V., Mukutuyk, I., Duda, O., & Yatsyuk, S. (2021). Application of the hierarchy analysis method for the choice of the computer mathematics system for the IT-sphere specialists preparation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012065>
18. Gordillo, A., López-fernández, D., & Verbert, K. (2020). Examining the Usefulness of Quality Scores for Generating Learning Object Recommendations in Repositories of Open Educational Resources. *Applied Sciences*, 10. <https://doi.org/10.3390/app10134638>
19. Guruprasad, M., Ramachandran, S., & Balasubramanian, S. (2016). Fuzzy logic as a tool for evaluation of performance appraisal of faculty in higher education institutions. *SHS Web of Conferences*, 26. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20162601121>
20. Hrytsiuk, Y. I., & Buchkovska, A. Y. (2018). Visualization of the results of expert evaluation of software quality using polar diagrams. *Scientific Bulletin of UNFU*, 27(10), 137–145. <https://doi.org/10.15421/40271025>
21. Hrytsiuk, Y. I., & Dalyavskyy, V. S. (2018). Using Petal Diagram for Visualizing the Results of Expert Evaluation of Software Quality. *Scientific Bulletin of UNFU*, 28(9), 95–104. <https://doi.org/10.15421/40280919>
22. Ishak, I. (2015). Application of fuzzy logic to student performance in calculation subjects. In *Proceedings of the 4th National Symposium & Exhibition on Business & Accounting*.
23. Ko, H., Lee, S., Park, Y., & Choi, A. (2022). A Survey of Recommendation Systems: Recommendation Models, Techniques, and Application Fields. *Electronics*, 11(1), 141. <https://doi.org/10.3390/electronics11010141>
24. Kuts, A. M. (2015). Metod predstavlennia ekspertnoi informatsii zasobamy nechitkoi lohiky ta otrymannia hrupovoi otsinky dumok ekspertiv. *Tekhnolohycheskyi audyt y rezervy proyzvodstva*, 2 (2(22)), 17–21. <https://doi.org/10.15587/2312-8372.2015.40778>
25. Leema, A., & Gulzar, Z. (2020). PCRS: Personalized Course Recommender System Based on Hybrid Approach. *Procedia Computer Science*, 125, 518–524. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.12.067>
26. Lin, J., Pu, H., Li, Y., & Lian, J. (2018). Intelligent recommendation system for course selection in smart education. *Procedia Computer Science*, 129, 449–453. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2018.03.023>
27. Meleshko, Ye. V., Semenov, S. H., & Khokh, V. D. (2018). Doslidzhennia metodiv pobudovy rekomendatsiinykh system v merezhi Internet. *Systemy upravlinnia, navihatsii ta zviazku. Zbirnyk naukovykh prats*, 1, 131–136. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2018.1.131>
28. Nehrei, M. V., & Hnot, T. V. (2017). Komparatyvnyi analiz efektyvnosti rekomendatsiinykh system v marketynhu. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Ekonomichni nauky*, (5), 278–286.
29. Obeid, C., Lahoud, I., El Khoury, H., & Champin, P. A. (2018). Ontology-based recommender system in higher education. In *Companion Proceedings of the The Web Conference 2018*, 1031–1034. <https://doi.org/10.1145/3184558.3191533>
30. Ojokoh, B. A., Omisore, M. O., Samuel, O. W., & Ogunniyi, T. O. (2012). A fuzzy logic based personalized recommender system. *International Journal of Computer Science and Information Technology & Security (IJCSITS)*, 2(5), 1008–1015.
31. Pasichnyk, V. V., & Artemenko O. I. (2018). Osoblyvosti pobudovy prostorovo oriientovanykh mobilnykh turystychnykh rekomendatsiinykh system. *Materialy XIV mizhnarodnoi konferentsii "Kontrol i upravlinnia v skladnykh systemakh (KUSS-2018)"*, 68–72.
32. Pelaez, A. R., Segarra-Faggioni, V., Piedra, N., & Tovar, E. (2019). A Proposal of Quality Assessment of OER Based on Emergent Technology. *2019 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, 1114–1119. <https://doi.org/10.1109/EDUCON.2019.8725067>
33. Purskyi, O. I., & Kharchenko, O. A. (2018). Vykorystannia rekomendatsiinykh system na osnovi metodiv Machine Learning u ramkakh vyvchennia dystsypliny "Elektronna torhivlia". *Novitni kompiuterni tekhnolohii*, 16, 147–151.
34. Ramathilagam, A., & Pitchipoo, P. () Modeling and development of fuzzy logic-based intelligent decision support system. *Romanian journal of information science and technology*, 25(1), 58–79.
35. Romero-Pelaez, A., & Solano, R. E. (2020). Prototype proposal for the selection of Quality Open Educational Resources. *2020 XV Conferencia Latinoamericana de Tecnologias de Aprendizaje (LACLO)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/LACLO50806.2020.9381179>
36. Salmi, K., Magrez, H., & Ziyvat, A. (2019). A Novel Expert Evaluation Methodology Based on Fuzzy Logic. *iJET*, 14, 160–173.
37. Shu, J., Shen, X., Liu, H., Yi, B., & Zhang, Z. (2018). A content-based recommendation algorithm for learning resources. *Multimedia Systems*, 24(2), 163–173. <https://doi.org/10.1007/s00530-017-0539-8>
38. Sun, T. J., Lv, X., Cai, Y., Pan, Y., & Huang, J. (2021). Software test quality evaluation based on fuzzy mathematics. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 40, 6125–6135. <https://doi.org/10.3233/JIFS-189451>
39. Tarus, J. K., Niu, Z., & Mustafa, G. (2018). Knowledge-based recommendation: a review of ontology-based recommender systems for e-learning. *Artificial intelligence review*, 50(1), 21–48. <https://doi.org/10.1007/s10462-017-9539-5>
40. Tavakoli, M., Elias, M., Kismihok, G., & Auer, S. (2021). Metadata Analysis of Open Educational Resources. *LAK21: 11th International Learning Analytics and Knowledge Conference*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.07735>
41. Varghese, A., Kolamban, S., Sreedhar, J. P., & Nayaki, S. S. (2017). Outcome based Assessment using Fuzzy Logic. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 8. <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2017.080115>
42. Wan, S., & Niu, Z. (2018). An e-learning recommendation approach based on the self-organization of learning resource. *Knowledge-Based Systems*, 160, 71–87. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2018.06.014>
43. Yadav, R. S., & Patel, J. (2022). A Study of Students Academic Performance Using Artificial Intelligence: A Fuzzy Logic Approach. *Innovations in Science and Technology* 7, 132–141. <https://doi.org/10.9734/bpi/ist/v7/15701D>
44. Yunchyk, V. L., Fedoniuk, A. A., & Pasichnyk, V. V. (2022). Protsedury otsiniuvannia yakosti elektronnykh navchalnykh resursiv z vykorystanniam peliustkovykh diahram. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politehnika". Informatsiini systemy ta merezhi*, 11, 87–102.
45. Yunchyk, V., Fedonuyk, A., Khomyak, M., & Yatsyuk, S. (2021). Cognitive modeling of the learning process of training IT specialists. In *CEUR Workshop Proceedings*, 141–150.
46. Yuriy Hrytsiuk, Orest Bilas. (2019). Visualization of Software Quality Expert Assessment. *IEEE 2019 14th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT 2019)*, (Vol. 2, pp. 156–160), 17–20 September, Lviv, Ukraine. Lviv: Lviv Polytechnic National University, 206 p. <https://doi.org/10.1109/stc-csit.2019.8929778>

## USING FUZZY LOGIC IN THE PROCESS OF EXPERT EVALUATION OF ELEARNING RESOURCES

The paper deals with expert evaluation of eLearning resources based on the theory of fuzzy logic using the method of hierarchy analysis. The concept of fuzzy logic was used to quantify qualitative data in real decision-making tasks. The authors propose to develop a recommender system based on fuzzy logic methods for expert evaluation of eLearning resources, including computer mathematics systems and for deciding on the selection of the most effective ones for use in the educational process. In the course of research the concept of recommender systems is considered and analyzed according to the field of application. The concept of the recommender system was introduced to support decision-making on the selection of the most effective eLearning resources. A literature review on expert evaluation, on using of fuzzy logic methods and recommender systems in the decision-making process is presented. The general structure of the recommender system of decision support with the description of all subsystems is given as well. The basic information of the theory of fuzzy logic concerning the decision-making process is described. The practical use of fuzzy logic theory in the process of choosing computer mathematics systems is considered. The main criteria for evaluating computer mathematics systems are given. The method of pairwise comparisons was used to calculate the importance of the criteria. The process of evaluating eLearning resources using fuzzy logic methods is described in detail and the algorithm of this approach is given. As a result of the expert assessment, a list of recommended alternatives to eLearning resources that meet the set criteria was obtained. The general structure of the recommender system of decision support for the selection of eLearning resources is given.

**Keywords:** system computer mathematics; recommender system; eLearning resources; fuzzy logic; expert evaluation.