



## ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У ПЛАСТИНІ З ЛОКАЛЬНИМ НАГРІВАННЯМ

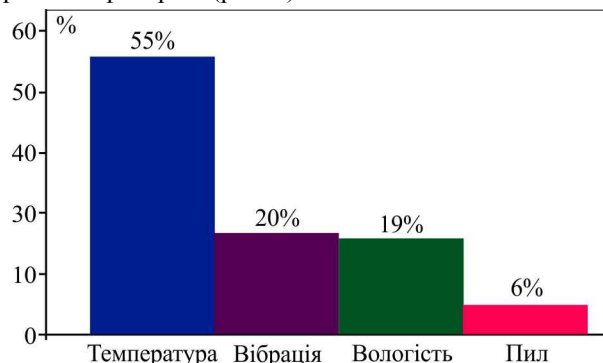
Розроблено математичні моделі аналізу температурних режимів у ізотропній пластині, яка нагрівається локально зосередженими джерелами тепла. Для цього теплоактивні зони пластини описано з використанням теорії узагальнених функцій. З огляду на це рівняння теплопровідності та крайові умови містять сингулярні праві частини. Для розв'язування крайових задач теплопровідності, що містять ці рівняння та крайові умови на межових поверхнях пластини, використано інтегральне перетворення Фур'є і внаслідок отримано аналітичні розв'язки задач у зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є, яке дало змогу отримати остаточні аналітичні розв'язки вихідних задач. Отримані аналітичні розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. За методом Ньютона (трьох восьмих) отримано числові значення цих інтегралів з певною точністю для заданих значень товщини пластини, просторових координат, питомої потужності джерел тепла, коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу пластини та ширини теплоактивної зони. Матеріалом пластини є кремній та германій. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообмінних процесів у середині пластини, зумовлених нагріванням локально зосередженими джерелами тепла, розроблено обчислювальні програми. Із використанням цих програм наведено графіки, що відображають поведінку кривих, побудованих із використанням числових значень розподілу температури залежно від просторових координат, коефіцієнта теплопровідності, питомої густини теплового потоку. Отримані числові значення температури свідчать про відповідність розроблених математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у пластині з локально зосередженими джерелами тепла, реальному фізичному процесу. Програмні засоби також дають змогу аналізувати такого роду середовища, які піддаються локальному нагріванню, щодо їх термостійкості. Як наслідок, стає можливим її підвищити і захистити від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й усієї конструкції.

**Ключові слова:** температурне поле; ізотропна пластинка; теплопровідність; теплоізолювана поверхня; ідеальний тепловий контакт; локальне нагрівання.

### Вступ / Introduction

Для сучасного суспільства характерний високий рівень використання електронних пристроїв сучасної техніки для різноманітних потреб. Їх експлуатують у певних температурних режимах, що приводять до потреби забезпечення надійної роботи, зменшення ваги і габаритів (мініатюризації), збільшення терміну служби. Внаслідок мініатюризації пристроїв та їх елементів у невеликих об'ємах концентруються високі потужності тепловиділення. Причому під час експлуатації мікроелектронні пристрої піддаються впливу як внутрішніх теплових потоків, так і зовнішніх. Тому залишається актуальною задача визначення температурних полів та аналізу температурних режимів у окремих елементах та вузлах електронних пристроїв, оскільки саме температура є вагомим чинником, який істотно впливає на їх ефективну роботу. На діаграмі наведено вплив різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв (рис. 1).

тронних пристроїв (рис. 1).



**Рис. 1.** Вплив різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв / Influence of various external factors on the reliability of microelectronic devices

Результати дослідження свідчать, що кількість відмов під час експлуатації мікроелектронних пристроїв

### Інформація про авторів:

**Гавриш Василь Іванович**, д-р техн. наук, професор, кафедра програмного забезпечення. Email: [gavryshvasyl@gmail.com](mailto:gavryshvasyl@gmail.com);

<https://orcid.org/0000-0003-3092-2279>

**Майхер Вікторія Юрївна**, канд. техн. наук, ст. викл., кафедра програмного забезпечення. Email: [viktoria.y.maikher@lpnu.ua](mailto:viktoria.y.maikher@lpnu.ua);

<https://orcid.org/0000-0003-0786-6950>

**Цитування за ДСТУ:** Гавриш В. І., Майхер В. Ю. Температурне поле у пластині з локальним нагріванням. Науковий вісник НЛТУ України. 2021, т. 31, № 4. С. 120–125.

**Citation APA:** Havrysh, V. I., & Mayher, V. Yu. (2021). Temperature field in a plate with local heating. *Scientific Bulletin of UNFU*, 31(4), 120–125. <https://doi.org/10.36930/40310420>

тісно пов'язана з рівнем температури. Так, для германієвих елементів кількість відмов для температури 140 °C у 7,5 раза є більшою, ніж для температури 20 °C. Ще більшою є ця кількість для кремнієвих елементів. Температурний рівень в елементах мікроелектронних пристроїв може зростати внаслідок підвищення температури довкілля, нагрівання від сусідніх елементів, які виділяють тепло, теплової потужності самих елементів та пристроїв.

Тому моделювання процесів поширення тепла у різних конструкціях та їх елементах є важливим напрямом теоретичних і практичних досліджень. Відомо, що елементи сучасних електронних пристроїв піддаються впливу внутрішнього нагрівання під час експлуатації. Саме тому задачі математичного моделювання процесів, пов'язаних із теплоперенесенням, не втрачають актуальності і зараз, адже аналіз розв'язків таких задач має велике наукове, практичне, а також і економічне значення.

Експериментальні дослідження полів температури у різних конструкціях і, зокрема у мікроелектронних пристроях, не завжди дають змогу отримати необхідні результати для аналізу теплової поведінки пристрою. Варто зазначити також, що у багатьох випадках такі експерименти є просто неможливими. Тому математичне моделювання процесів, пов'язаних із теплообміном, залишається важливим напрямом наукових досліджень. Важливою особливістю моделювання та аналізу процесу теплопровідності в елементах конструкцій і, зокрема мікроелектронних пристроїв, є врахування впливу внутрішніх джерел тепла.

Отже, проблема розроблення нових математичних моделей як для однорідних середовищ, так і неоднорідних, а також удосконалення уже розроблених математичних моделей для аналізу процесу теплопровідності та теплообміну і надалі актуальна.

*Об'єкт дослідження* – теплопровідність у середовищах із локальним нагріванням.

*Предмет дослідження* – математичні моделі процесу теплопровідності та методи визначення аналітичних розв'язків відповідних крайових задач для середовищ із локальним нагріванням.

*Мета роботи* – розроблення математичних моделей теплопровідності для пластини, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла та тепловим потоком, зосередженим на її межовій поверхні, які дають змогу підвищити точність визначення температурного поля, що у подальшому вплине на ефективність методів проектування пристроїв цифрових технологій.

Для досягнення зазначеної мети визначено такі основні завдання дослідження:

- проаналізувати основні літературні джерела у напрямку розроблення математичних моделей теплопровідності;
- навести об'єкт дослідження та його математичні моделі;
- отримати аналітичні розв'язки крайових задач теплопровідності;
- розробити алгоритм та програмні засоби його числової реалізації для аналізу температурних режимів у пластині.

*Наукова новизна отриманих результатів дослідження* – вперше розроблено спосіб отримання в замкнутому вигляді аналітичні розв'язки крайових задач теплопровідності для середовищ з локальним нагріванням.

*Практична значущість результатів дослідження* – отримані аналітичні розв'язки крайових задач теплопровідності для середовища з локальним нагріванням да-

ють змогу розробляти алгоритми та програмні засоби їхньої числової реалізації для аналізу температурних режимів у окремих конструкційних елементах та вузлах цифрових пристроїв для прогнозування їхніх режимів роботи, ідентифікування невідомих параметрів та підвищення термостійкості, що збільшує їх термін експлуатації.

*Аналіз останніх досліджень та публікацій.* Визначення температурних режимів як в однорідних, так і в неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників [2, 10, 11, 14, 13, 15]. У роботі [3] наведено ізотропні пологі тонкі оболонки, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла, зосередженими у квадраті та еліпсі, на межових поверхнях яких відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем [4]. Задачу теплопровідності розв'язано за умов, коли температура навколишнього середовища є сталою, а на безмежності прямує до нуля. Теплові джерела з інтенсивністю, що дорівнює одиниці, розміщено на серединній поверхні, де вибрано початок системи координат. Об'ємну густину джерел нагрівання описано за допомогою двовимірної функції Дірака. Досліджено поведінку температурного поля у середовищі та залежність температури від відстані до джерел тепла.

Розроблено інженерну методику дослідження теплових режимів у елементах та вузлах конструкцій радіоелектронної апаратури, яка ґрунтується на розв'язанні рівняння теплопровідності для прямокутного паралелепіпеда з джерелами тепла такої самої геометричної форми. Розроблені модель та алгоритм визначення та аналізу теплових режимів в елементах конструкцій – стійка, блок, мікросхема електронної апаратури – дають змогу отримати значення температури для довільної точки структури в аналітичному вигляді. Із розв'язку рівняння теплопровідності отримано співвідношення для визначення ефективної теплопровідності елементів конструкції вздовж основних координатних осей із врахуванням максимально заданого їх перегрівання [1].

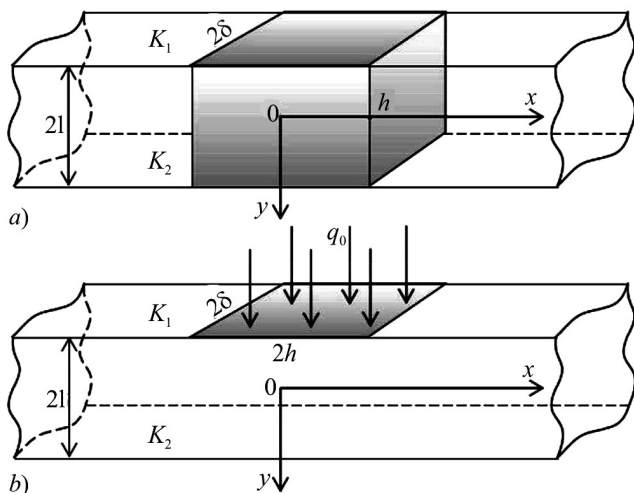
У працях [4, 5, 6] удосконалено наявні та розроблено нові підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми.

У роботах [8, 12] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Огляд основних літературних джерел показав, що малодослідженими та не розробленими є моделі, які враховували б інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими джерелами тепла. Це приводить до розроблення математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у елементах складних електронних і електромеханічних систем, які функціонують у подібних температурних режимах. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування наведених систем щодо їх термостійкості.

## Результати дослідження та їх обговорення / Research results and their discussion

**Математична модель 1.** Розглянемо ізотропну відносно теплофізичних параметрів пластину товщиною  $2\delta$  з теплоізолюваними лицевими поверхнями  $|z| = \delta$ , віднесена до декартової прямокутної системи координат  $(x, y, z)$ . Всередині пластини в об'ємі паралелепіпеда  $V = 8hd\delta$  діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю  $q_0 = const$ . На межових поверхнях  $K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  та  $K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  пластини задано крайові умови другого роду (рис. 2, а).



**Рис. 2.** Ізотропна пластина / Isotropic plate: а) із внутрішніми джерелами тепла / with internal heat sources; б) під впливом теплового потоку / under the influence of heat flow

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури  $t(x, y)$  за просторовими координатами, який отримуємо, розв'язавши рівняння теплопровідності [8, 12]

$$\Delta t = -q_0 S_-(h - |x|) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=|l|} = 0, \quad (2)$$

де:  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності пластини;  $t_c$  – температура навколишнього середовища;  $S_-(\zeta)$  – асиметрична одинична функція [9],

$$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$$

$\Delta$  – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (1) і крайових умов (2), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{2q_0}{\sqrt{2\pi\lambda\xi^3}} \sin \xi h \quad (3)$$

з крайовою умовою

$$\frac{d\bar{\theta}}{dy} \Big|_{y=|l|} = 0, \quad (4)$$

де  $\bar{\theta}(y)$  – трансформанта функції  $\theta(x, y)$ ,

$$\bar{\theta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \theta(x, y) d\xi; \quad \xi - \text{параметр інтегрального перетворення Фур'є, } i^2 = -1.$$

Загальний розв'язок рівняння (3) знайдемо за допомогою методу варіації сталих у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} + \frac{2q_0}{\lambda\sqrt{2\pi\xi^3}} \sin \xi h, \quad (5)$$

де  $c_1, c_2$  – сталі інтегрування.

Використавши крайову умову (8) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задач (3), (4), а саме

$$\bar{\theta}(y) = \frac{2q_0}{\lambda\sqrt{2\pi\xi^3}} \sin \xi h. \quad (6)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (6), отримуємо розв'язок задач (1), (2) у вигляді

$$\theta(x, y) = \frac{2q_0}{\lambda\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^3} \sin \xi h d\xi. \quad (7)$$

Отже, шукане температурне поле у пластині, зумовлене зосередженими внутрішніми джерелами тепла, визначено формулою (7), з якої отримуємо значення температури в довільній точці наведеної конструкції.

**Математична модель 2.** Розглянемо випадок, коли геометричні параметри теплоактивного паралелепіпеда  $h, \delta$  є малими порівняно зі шириною пластини  $2l$ . Тому рівняння теплопровідності запишемо у вигляді

$$\Delta t = -\frac{q_0}{\lambda} \delta(x), \quad (8)$$

де:  $\delta(\zeta) = \frac{dS(\zeta)}{d\zeta}$  – дельта-функція Дірака;  $S(\zeta)$  – симетрична одинична функція [14], має такий вигляд:

$$S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до нього, отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\theta} = -\frac{q_0}{\sqrt{2\pi\lambda}},$$

розв'язок якого із урахуванням крайових умов (4) визначимо у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = \frac{q_0}{\lambda\sqrt{2\pi\xi^2}}. \quad (9)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (9), отримуємо розв'язок задач (8), (2), а саме

$$\theta(x, y) = \frac{q_0}{\lambda\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^2} d\xi,$$

який описує розподіл температури за просторовими координатами у пластині.

**Математична модель 3.** Розглянемо випадок, коли пластину нагрівають тепловим потоком, поверхнева густина якого дорівнює  $q_0 = const$ , зосередженим у прямокутнику площею  $V = 4h\delta$  на межовій поверхні  $K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ . На іншій межовій поверхні

пластини  $K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$  задано крайові умови другого роду (див. рис. 2, b).

Для визначення розподілу температури  $t(x, y)$  за просторовими координатами скористаємось рівнянням теплопровідності [8, 12]

$$\Delta t = 0 \quad (10)$$

з такими крайовими умовами:

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-l} = -q_0 S_-(h - |x|), \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0. \quad (11)$$

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (10) і крайових умов (11), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\theta} = 0 \quad (12)$$

з такими крайовими умовами:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dy} \Big|_{y=-l} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi} \sin \xi h, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dy} \Big|_{y=l} = 0. \quad (13)$$

Загальний розв'язок рівняння (12) знайдемо у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y}. \quad (14)$$

Використавши крайові умови (13) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (12), (13), а саме

$$\bar{\theta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda \xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (15)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (15), отримаємо розв'язок задачі (10), (11) у вигляді

$$\theta(x, y) = \frac{2q_0}{\lambda \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l} d\xi. \quad (16)$$

Отже, шукане температурне поле у пластині, зумовлене зосередженим тепловим потоком на межовій поверхні, визначено виразом (16), з якого отримуємо значення температури в довільній точці наведеної конструкції.

**Математична модель 4.** Розглянемо випадок, коли геометричні параметри прямокутника  $h, \delta$ , в якому зо-

середжено тепловий потік, є малими порівняно зі шириною пластини  $2l$ . Тому рівняння (10) не зміниться, а тільки крайові умови (11), які запишемо у вигляді

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = t_c, \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=-l} = -q_0 \delta(x), \quad \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0. \quad (17)$$

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за координатою  $x$  до рівняння (10) та крайових умов (17). Тоді отримаємо звичайне диференціальне рівняння (12) і такі крайові умови:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dy} \Big|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda \sqrt{2\pi}}, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dy} \Big|_{y=l} = 0,$$

розв'язок якого із урахуванням цих умов визначимо у вигляді

$$\bar{\theta}(y) = \frac{q_0}{\lambda \sqrt{2\pi} \xi} \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (18)$$

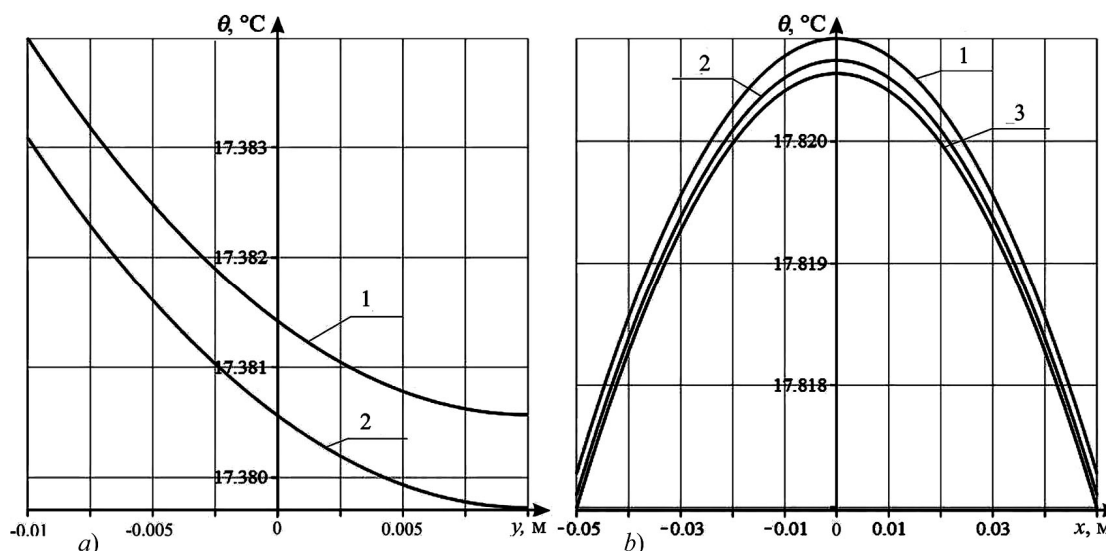
Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (18), отримаємо розв'язок задачі (10), (17)

$$\theta(x, y) = \frac{q_0}{\lambda \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x ch \xi (y-l)}{\xi sh 2 \xi l} d\xi,$$

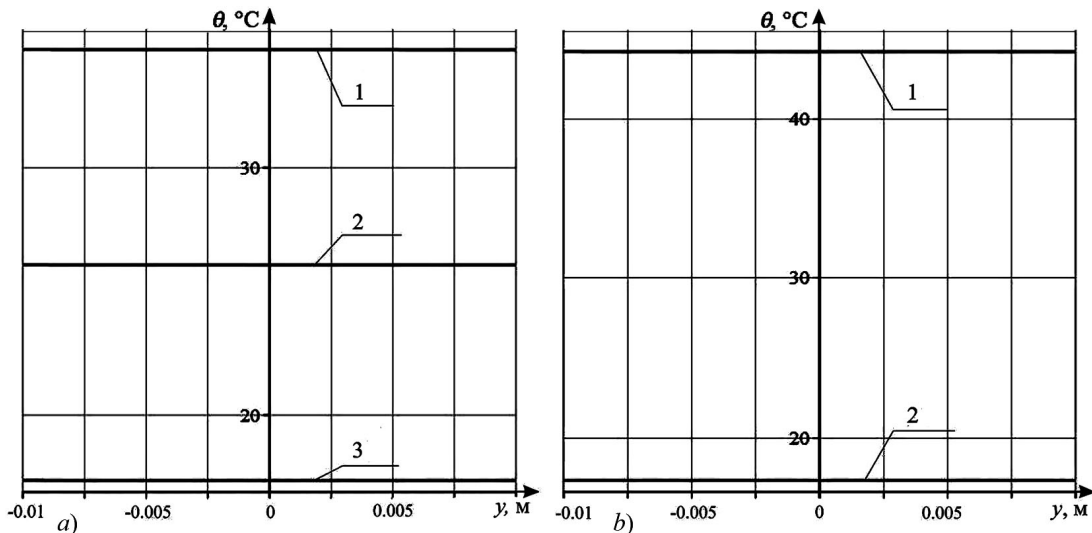
який описує розподіл температури за просторовими координатами  $x$  та  $y$  в пластині.

За формулою (16) проведено обчислення та виконано числовий аналіз розподілу температури  $\theta(x, y)$  у пластині для таких вихідних даних: матеріали пластини – кремній ( $\lambda = 154,7$  Вт/(м·град)) та германій ( $\lambda = 60,8$  Вт/(м·град)) за температури  $t = 27$  °С [7];  $l = h = 0,01$  м.

**Обговорення результатів дослідження.** Проілюстровано (рис. 3, a) зміну температури  $\theta(x, y)$  залежно від просторової координати  $y$ , заданих значень координати  $x$  та  $q_0 = 200$  Вт/м<sup>2</sup>, коли матеріалом пластини є кремній. Із поведінки кривих видно, що температура, як функція координати  $y$ , монотонно спадає і досягає максимального значення на межовій поверхні пластини  $K_1$ , на якій зосереджено тепловий потік.



**Рис. 3.** Залежність температури  $\theta(x, y)$  від / Dependence of temperature  $\theta(x, y)$  on: a) координати  $y$  для  $q_0 = 200$  Вт/м<sup>2</sup> і заданих значень координати  $x$ : крива 1 –  $x = 0$ ; крива 2 –  $x = 0,01$  / coordinate and given values of coordinate  $x$ : curve 1 –  $x = 0$ ; curve 2 –  $x = 0,01$ ; b) координати  $x$  для  $q_0 = 200$  Вт/м<sup>2</sup> та заданих значень координати  $y$ : крива 1 –  $y = -0,005$ ; крива 2 –  $y = 0$ ; крива 3 –  $y = 0,005$  /  $x$  coordinates and given values of  $y$  coordinates: curve 1 –  $y = -0,005$ ; curve 2 –  $y = 0$ ; curve 3 –  $y = 0,005$



**Рис. 4.** Залежність температури  $\theta(x,y)$  від координати  $y$  для / Dependence of temperature on the  $y$  coordinate for: a) заданих значень густини теплового потоку  $q_0$ : крива 1 –  $q_0=400$  Вт/м<sup>2</sup>; крива 2 –  $q_0=300$  Вт/м<sup>2</sup>; крива 3 –  $q_0=200$  Вт/м<sup>2</sup> / given values of heat density current  $q_0$ : curve 1 –  $q_0=400$  W/m<sup>2</sup>; curve 2 –  $q_0=300$  W/m<sup>2</sup>; curve 3 –  $q_0=200$  W/m<sup>2</sup>; b) заданих значень  $x=0$ ,  $q_0=200$  Вт/м<sup>2</sup> та матеріалів пластини: крива 1 – германій; крива 2 – кремній / given values  $x=0$ ,  $q_0=200$  W/m<sup>2</sup> and materials of the plate: curve 1 – germanium; curve 2 – silicon

На рис. 3, б зображено зміну температури  $\theta(x,y)$  залежно від просторової координати  $x$ , заданих значень координати  $y$  та  $q_0=200$  Вт/м<sup>2</sup>. Матеріалом пластини вибрано кремній. Із поведінки кривих видно, що температура, як функція координати  $x$ , є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимального значення в точці  $(0; -0,005)$ . У разі збільшення за абсолютною величиною значень просторової координати  $x$  температура знижується, що свідчить про адекватність математичної моделі реальному фізичному процесу.

На рис. 4,а зображено зміну температури  $\theta(x,y)$  залежно від просторової координати  $y$  для  $x=0$  та заданих значень густини теплового потоку  $q_0$ . Із поведінки кривих видно, що збільшення інтенсивності нагрівання значно впливає на значення температури у пластині (матеріалом пластини є кремній).

На рис. 4,б зображено зміну температури  $\theta(x,y)$  залежно від просторової координати  $y$  для  $x=0$  і  $q_0=200$  Вт/м<sup>2</sup> для наведених матеріалів пластини. Із поведінки кривих видно, що коефіцієнт теплопровідності є важливим параметром, який впливає на температурне поле. Збільшення його значення призводить до зменшення значень температури в середовищі.

## Висновки / Conclusions

Із використанням узагальнених функцій та інтегрального перетворення Фур'є для пластини, яка піддається локальному нагріванню, побудовано аналітичні розв'язки крайових задач теплопровідності, диференціальні рівняння та крайові умови яких містять праву частину у вигляді розривної та сингулярної функцій. Розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. Розроблено алгоритм і програмні засоби для визначення температурного поля в довільній точці пластини з локальним нагріванням. На цій основі отримано числові значення температурного поля, із використанням яких виконано геометричне зображення поведінки розподілу температури залежно від просторових координат, інтенсивності нагрівання та теплофізичних параметрів. Наведені математичні моделі дають змогу аналізувати температурні режими у середовищах, які під-

даються локально зосередженим тепловим навантаженням щодо їх термостійкості внаслідок інтенсивного нагрівання, а також захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

## References

- Azarenkov, V. I. (2012). Issledovanie i razrabotka teplovoi modeli i metodov analiza temperaturikh polei konstrukticii radioelektronnoi apparatury. *Technology audit and production reserves*, 3/1(5), 39–40. [In Russian].
- Carpinteri, A., & Paggi, M. (2008). Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams. *Journal of Engineering Mathematics*, 61(2–4), 371–384. <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>
- Dovbnia, K. M., & Dundar, O. D. (2016). Statsionarnyi teploobmin tonkykh polohykh izotropnykh obolonok, yaki znakhodiatsia pid diieiu dzherel tepla, zoseredzhenykh po dvovymirni oblasti. *Visnyk DonNU. Series A: Pryrodnychi nauky*, 1–2, 107–112. [In Ukrainian].
- Havrysh, V. I., & Fedasjuk, D. V. (2012). *Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures*. Lviv: Publishing house of Lviv Politechnic National University, 176 p.
- Havrysh, V. I., Baranetskiy, Ya. O., & Kolyasa, L. I. (2018). Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices. *Radio electronics, computer science, management*, 3(46), 7–15. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>
- Havrysh, V. I., Kolyasa, L. I., & Ukhanska, O. M. (2019). Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions. *Naukovi Visnyk NHU*, 1, 94–100. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>
- Kikoïna, I. K. (1976). *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik*. Moscow: Atomizdat, 1008 p. [In Russian].
- Koliano, Iu. M. (1992). *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela*. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. <https://doi.org/10.1192/bjp.161.2.280b>
- Korn, G., & Korn, T. (1977). *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow: Nauka, 720 p. [In Russian].
- Noda, N. (1991). Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews*, 44, 383–397. <https://doi.org/10.1115/1.3119511>
- Otao, Y., Tanigawa, O., & Ishimaru, O. (2000). Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm. *Journal of Thermal Stresses*, 23, 257–271. <https://doi.org/10.1080/014957300280434>

12. Podstrigach, Ia. S., Lomakin, V. A., & Koliano, Iu. M. (1984). *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. Moscow: Nauka, 368 p. [In Russian].
13. Tanigawa, Y., & Otao, Y. (2002). Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation. *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, 2, 133–134. [https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0\\_133](https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0_133)
14. Tanigawa, Y., Akai, T., & Kawamura, R. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, 19(1), 77–102. <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>
15. Yangian, Xu, & Daihui, Tu. (2009). Analysis of steady thermal stress in a ZrO<sub>2</sub>/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM. *2009-WA-SE Int. Conf. on Informa. Eng. Vol. 2*, 433–436. <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.842>

**V. I. Havrysh, V. Yu. Mayher**

*Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine*

## TEMPERATURE FIELD IN A PLATE WITH LOCAL HEATING

The paper presents the research of the temperature field in a plate with local heating. In the course of research mathematical models for the analysis of temperature regimes in an isotropic plate heated by locally concentrated heat sources have been developed. For this purpose, the heat-active zones of the plate are described using the theory of generalized functions. Given this equation of thermal conductivity and boundary conditions contain singular right-hand sides. To solve the boundary value problems of thermal conductivity containing these equations and boundary conditions on the boundary surfaces of the plate, the integral Fourier transform was used, and as a result, analytical solutions of the problems in the images were obtained. The inverse integral Fourier transform was applied to these solutions, which made it possible to obtain the final analytical solutions of the initial problems. The obtained analytical solutions are presented in the form of improper convergent integrals. According to Newton's method (three eighths), numerical values of these integrals are obtained with a certain accuracy for given values of plate thickness, spatial coordinates, specific power of heat sources, thermal conductivity of the structural material of the plate, and the width of the heat-active zone. The material of the plate is silicon and germanium. To determine the numerical values of temperature in the above structure, as well as the analysis of heat transfer processes in the middle of the plate due to heating by locally concentrated heat sources, computer programs have been developed. Using these programs, graphs showing the behaviour of curves constructed using numerical values of temperature distribution depending on spatial coordinates, thermal conductivity, specific heat flux density are given. The obtained numerical values of temperature testify to the correspondence of the developed mathematical models of the analysis of heat exchange processes in the plate with locally concentrated heat sources to the real physical process. Software also allows analyzing this kind of environment, which is subject to local heating, in terms of their heat resistance. As a result, it becomes possible to increase it and protect it from overheating, which can cause the destruction not only of individual elements, but also of the entire structure.

**Keywords:** temperature field; isotropic plate; thermal conductivity; heat-insulated surface; perfect thermal contact, local heating.