



**З. А. Стоцько, Д. П. Ребот, В. Г. Топільницький**

*Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна*

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИПКОВОГО МАТЕРІАЛУ В ПРОЦЕСІ ВІБРАЦІЙНОЇ СЕПАРАЦІЇ

Розглянуто вплив швидкості руху сипкого матеріалу на його амплітудо-частотні характеристики, за умови що частота зовнішнього збурення збігається або наближається до частоти коливання сипкого матеріалу. Встановлено, що попередні дослідження повністю не можуть описати закон руху сипкого матеріалу при його вібраційній сепарації, а дають змогу розглянути тільки часткові випадки руху. Тому запропоновано метод для визначення зміни частоти та амплітуди коливань сипкого матеріалу за певної довільної швидкості його руху вздовж сита вібраційного сепаратора. Побудовано математичну модель руху сипкого матеріалу за умови його горизонтальних коливань у контейнері вібраційного сепаратора. Для побудови математичної моделі використано асимптотичні методи нелінійної механіки. Отримані результати показали, що за великих швидкостей руху сипкого матеріалу вздовж сита вібраційного сепаратора амплітуда та частота його коливань зменшуються, на відміну від невеликої швидкості руху матеріалу вздовж сита. Це призводить до того, що навіть за умови резонансу велика швидкість руху сипкого матеріалу вздовж сита призводить до сповільнення процесу сепарації та зменшення його ефективності. Отримані результати можуть бути використані для подальших досліджень процесів вібраційної сепарації, а також можуть бути узагальнені на складніші моделі середовищ.

**Ключові слова:** математична модель; вібраційний сепаратор; сипкий матеріал; амплітудо-частотні характеристики; динамічний процес.

**Вступ.** У сучасному виробництві вібраційні сепаратори мають значний попит. Це пов'язано із високою ефективністю їх роботи. Вібраційну сепарацію використовують для по-фракційного поділу сипкої продукції різних розмірів, відділення сторонніх домішок або браку. Процес сепарації забезпечує належну якість продукції, запобігає пошкодженню транспортного та переробного обладнання під час подальшого оброблення продукції. На відміну від інших типів сепараторів, вібраційні сепаратори характеризуються простою конструкцією та можливістю регулювання амплітуди та частоти коливання, що гарантує високу якість сортування. Відкрита конструкція сепараторів дає змогу забезпечити легкий доступ до сит та їх швидку заміну. Вібраційні сепаратори забезпечують вищу чіткість розділення та продуктивність за менших витрат електроенергії, завдяки тому, що під час вібрування шар сипкого матеріалу інтенсивно розрихлюється, частинки стають рухомішими, зменшується тертя між ними, що спричиняє їх перерозподіл за величиною та пришвидшує відділення. Інтенсивність та продуктивність процесу вібраційної сепарації залежить від впливу багатьох внутрішніх і зовнішніх чинників на нього. Можливість

коригування зміни частоти сепарації, швидкості руху продукту по ситі, товщини, кута нахилу сит та розмірів отворів впливає на вибір оптимальної ефективності процесу сепарування. Завдяки вібрації зростає швидкість просіювання частинок середовища, зменшуються його втрати. Також перевагою таких сепараторів є можливість зміни амплітуди та частоти робочого органу, що сприяє підвищенню інтенсивності оброблення.

Усе зазначене вище сприяє розробленню та впровадженню нових типів вібросепараторів у виробництво та вдосконаленню вже наявних розробок. Для підвищення ефективності та продуктивності роботи вібраційних сепараторів проводять дослідження їх динаміки у процесі роботи, а також дослідження динаміки сипких середовищ у процесі сепарації (Bak et al., 2013; Xiaodong et al., 2017; Lapshin, Rudin, & Glukhov, 2015; Zheng et al., 2016). З огляду на те, що контейнер вібросепаратора та сипке середовище в ньому здійснюють складний просторовий рух, він розглядається на основі певних припущень та охоплює окремі випадки коливань (Topilnytskyi et al., 2014, 2017). Тому важливою задачею є огляд руху сипкого матеріалу при вібросепарації з використанням нових гіпотез та дослідження впливу різ-

### Інформація про авторів:

**Стоцько Зіновій Антонович**, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри проектування та експлуатації машин.

Email: stotsko@lp.edu.ua; <https://orcid.org/0000-0003-0423-8561>

**Ребот Дарія Петрівна**, канд. техн. наук, асистент, кафедра проектування та експлуатації машин. Email: dasha\_kotlyarova@ukr.net;

<https://orcid.org/0000-0002-3583-0800>

**Топільницький Володимир Григорович**, канд. техн. наук, доцент, кафедра проектування та експлуатації машин.

Email: topilnvol@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0001-5246-3400>

**Цитування за ДСТУ:** Стоцько З. А., Ребот Д. П., Топільницький В. Г. Дослідження динамічних характеристик сипкого матеріалу в процесі вібраційної сепарації. Науковий вісник НЛТУ України. 2019, т. 29, № 6. С. 83–86.

**Citation APA:** Stotsko, Z. A., Rebot, D. P., & Topilnytskyi, V. G. (2019). Investigation of dynamic characteristics of bulk material during vibration separation. *Scientific Bulletin of UNFU*, 29(6), 83–86. <https://doi.org/10.15421/40290617>

них чинників на ефективність процесу сепарації.

**Матеріал та методи дослідження.** Усі сипкі матеріали мають складну структуру, їх властивості визначаються розмірами, фізико-механічними характеристиками окремих елементів, їх взаємодією між собою. Дослідження динаміки сипких матеріалів на основі окремих частинок не дають бажаних успіхів, тому що взаємодія між частинками є доволі складною та не може бути описаною кількома диференціальними рівняннями. Простішим припущенням у дослідженні можна вважати інтегральний підхід. На основі нього сипкий матеріал характеризується деякими параметрами та вважається суцільним тілом. Побудована відповідна математична модель динаміки таких матеріалів може повніше оцінити вплив структури матеріалу, його усереднених характеристик на процес віброепарації. Сипкий матеріал моделюється у вигляді нашарування балок із певними фізико-механічними характеристиками (Topilnytskyu et al., 2014, 2017; Stotsko, Topilnytskyj, & Rebot, 2013).

Розглянемо випадок поздовжнього руху сипкого матеріалу по сити віброепаратора. З урахуванням, що шар сипкого матеріалу рухається із певною сталою швидкістю, рівняння його руху матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - (\alpha^2 - V^2) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \varepsilon f \left( x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right), \quad (1)$$

де:  $\alpha$  – функція, яка враховує фізико-механічні характеристики сипкого матеріалу;  $\partial u(x,t) / \partial x$  – відносна деформація умовно виділеного шару сипкого матеріалу вздовж осі  $x$ ; а  $\partial u(x,t) / \partial t$  – його швидкість;

$\varepsilon f \left( x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)$  – функція, яка характеризує нелінійне відхилення пружних властивостей матеріалу від лінійного закону;  $\varepsilon$  – малий параметр, який вказує на незначне відхилення інтегральних пружних властивостей матеріалу сипкого середовища від лінійного закону (Stotsko, Topilnytskyj, & Rebot, 2013).

Крайові умови, за припущення, що шар матеріалу контактує зі стінками контейнера жорстко, пружно, або як шарнірно закріплені, матимуть вигляд

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$\text{де} \quad u(x,t) = a \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi, \quad (3)$$

$a$ ,  $\psi$  – відповідно амплітуда і фаза одночастотного процесу:  $\psi = \omega t + \varphi$ ,  $\omega = \alpha \cdot k\pi / l$ .

Резонансний випадок коливань шару сипкого матеріалу є складнішим з практичної сторони досліджень динамічних процесів. Під час проведення досліджень впливу зовнішньої збурюючої сили на сипкий матеріал при резонансі, варто відзначити, що особливістю динамічних процесів нелінійних систем є те, що резонансні явища у них існують не тільки за умови  $\mu \approx \omega$ , як у звичайних лінійних системах, але і у випадку, коли одна із комбінаційних частот зовнішнього збурення близька до власної частоти системи, тобто  $n\mu + m\omega \approx \omega$ .

У нелінійних системах резонанс настане за умови

$$\mu \approx \frac{p}{q} \omega, \quad (4)$$

де  $p$  і  $q$  – взаємно прості числа.

Найважливішим одночасно і найскладнішим у дослідженні є випадок періодичного збурення. Періодичні сили частоти яких є близькими до частоти власних коливань сипких матеріалів, тобто знаходяться в раціональному співвідношенні із головною частотою частотного спектру, призводять до значного росту амплітуди коливань, а отже – до виникнення у сипких матеріалах значних амплітуд коливань, цим самим покращуючи процес подрібнення середовища та його сепарацію. У випадку, якщо  $p = q = 1$  (тобто  $\mu \approx \omega$ ), резонанс називають головним або звичайним. Випадок  $q = 1$  (тобто  $\mu \approx p\omega$ ) – це резонанс на обертонах власної частоти. (Якщо ж  $p = 1$  (тобто  $\omega \approx q\mu$ )), то існує резонанс на обертонах зовнішньої частоти. Зауважимо, що такого типу резонанс можливий у лінійній моделі коливань сипких матеріалів, за умови періодичної зміни зовнішньої сили. Отже, для неавтономних систем необхідно врахувати той факт, що на характер динамічного процесу істотно впливають не тільки нелінійні сили, але й співвідношення між частотами власних і вимушених коливань. Його вплив найбільш істотно проявляється для резонансного випадку, тобто коли між власною частотою  $\omega$  та частотою періодичного збурення  $\mu$  існує зв'язок у вигляді раціонального співвідношення (Topilnytskyu et al., 2014).

Враховуючи, що значення зовнішнього збурення  $p/q\mu$  буде достатньо близьким до власної частоти  $\omega$ , то

$$\omega^2 = \left( \frac{p}{q} \mu \right)^2 + \varepsilon \Lambda, \quad (5)$$

де  $\varepsilon \Lambda$  – відхилення квадрата власної частоти від частоти зовнішнього збурення.

До того ж, у резонансному випадку, різниця фаз між зовнішнім збуренням та власними коливаннями істотно впливає на амплітуду та частоту резонансних коливань. Тому для побудови диференціальних рівнянь, що описують зміну амплітуди та фази коливань, зручно ввести різницю фаз у вигляді  $\vartheta = \psi - \theta = \omega t + \varphi - \theta$ ,  $\psi = \theta + \vartheta$ .

Тоді для резонансного випадку розв'язок буде мати такий вигляд:

$$u(x,t) = a(t) (\cos(kx + \theta(t) + \vartheta(t)) - \cos(kx - \theta(t) - \vartheta(t))). \quad (6)$$

Окрім цього, на відміну від розглянутих раніше випадків (Stotsko, Topilnytskyj, & Rebot, 2013; Stotsko, Rebot, & Topilnytskyi, 2016), у резонансному величини  $da/dt$  та  $d\vartheta/dt$ , є функціями, що залежать не тільки від амплітуди  $a$ , але і від різниці фаз  $\vartheta$ . Отже, базою для визначення основних амплітудно-частотних характеристик динамічного процесу є диференціальні рівняння:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \Lambda(a, \vartheta); \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \frac{p}{q} \mu + \varepsilon \Xi(a, \vartheta), \quad (7)$$

де  $\Lambda(a, \vartheta)$ ,  $\Xi(a, \vartheta)$  – поки що невідомі функції, котрі необхідно знайти таким способом, щоб залежність після підстановки у неї розв'язку системи задовольняла вихідну задачу (1). Варто зауважити, що функції  $\Lambda(a, \vartheta)$ ,  $\Xi(a, \vartheta)$  повинні бути періодичними за змінною  $\vartheta$  із періодом  $2\pi$ .

З урахуванням наведеного вище, отримуємо:

$$u_t = a\vartheta [-\sin(kx + \vartheta + \theta) - \sin(\chi x - \vartheta - \theta)] + a_t [\cos(kx + \vartheta + \theta) - \cos(\chi x - \vartheta - \theta)] - apq^{-1} \mu [-\sin(kx + \vartheta + \theta) + \sin(\chi x - \vartheta - \theta)];$$

$$u_{tt} = a_{tt}[\cos(\kappa x + \vartheta + \theta) - \cos(\chi x - \vartheta - \theta)] - 2a_t(pq^{-1}\mu + \vartheta_t) \times \\ \times [\sin(\kappa x + \theta + \vartheta) + \sin(\chi x - \theta - \vartheta)] - a\vartheta_{tt}[\sin(\kappa x + \vartheta + \theta) + \\ + \sin(\chi x - \vartheta - \theta)] - a(pq^{-1}\mu + \vartheta_t)^2[\cos(\kappa x + \theta + \vartheta) - \\ - \cos(\chi x - \theta - \vartheta)]; \quad (8)$$

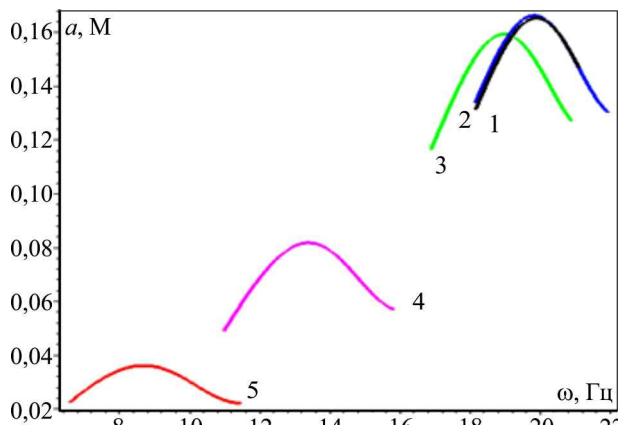
$$u_{xt} = a_t[-\kappa \sin(\kappa x + \vartheta + \theta) + \chi \sin(\chi x - \vartheta - \theta)] - \\ - a(pq^{-1}\mu + \vartheta_t)[\kappa \cos(\kappa x + \vartheta + \theta) + \chi \cos(\chi x - \vartheta - \theta)]; \\ u_{xx} = a[-\kappa^2 \cos(\kappa x + \vartheta + \theta) + \chi^2 \cos(\chi x - \vartheta - \theta)].$$

Отримуємо систему рівнянь відносно  $a_t$  та  $\vartheta_t$ :

$$a_t \{-2\omega \sin(\kappa x + \vartheta + \theta) - 2\omega \sin(\chi x - \vartheta - \theta) - \\ - 2V\kappa \sin(\kappa x + \vartheta + \theta) + 2V\chi \sin(\chi x - \vartheta - \theta)\} + \\ + a(\vartheta_t + pq^{-1}\omega) \{-2\omega \cos(\kappa x + \vartheta + \theta) + \\ + 2\omega \cos(\chi x - \vartheta - \theta) - 2V\kappa \cos(\kappa x + \vartheta + \theta) - \\ - 2V\chi \cos(\chi x - \vartheta - \theta)\} = \varepsilon \bar{f}(a, x, \vartheta + \theta, \theta). \quad (9)$$

Зв'язок між амплітудою та різницею фаз отримаємо у вигляді:

$$a_t = \frac{\varepsilon}{4\pi l [(\omega + V\kappa)^2 + (\omega - V\chi)^2]} \times \\ \times \int_0^l \left( \Psi(x) \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, \vartheta + \theta, \theta) \cos(\vartheta + \theta) d\theta + \right. \\ \left. + \Theta(x, y) \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, y, \vartheta + \theta, \theta) \sin(\vartheta + \theta) d\theta \right) dx dy; \quad (10) \\ \vartheta_t = \omega - pq^{-1}\mu - \\ - \frac{\varepsilon}{4\pi l a [(\omega + V\kappa)^2 + (\omega - V\chi)^2]} \times \int_0^l \left( \Psi(x) \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, y, \vartheta + \theta, \theta) \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin(\vartheta + \theta) d\theta - \Theta(x) \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x, y, \vartheta + \theta, \theta) \cos(\vartheta + \theta) d\theta \right) dx.$$



**Рисунок.** Зміна амплітуди коливань сипкого середовища від частоти коливань вібросепаратора при переході через резонанс за різних швидкостей позадвжнього руху шару завантаження:

$$V_1 = 0 \text{ м/с}; \quad V_2 = 1,2 \text{ м/с}; \quad V_3 = 2 \text{ м/с}; \\ V_4 = 6 \text{ м/с}; \quad V_5 = 8 \text{ м/с}; \quad h = 0,001; \quad l = 1,5 \text{ м}; \quad k_1 = -10$$

Отже, у першому наближенні резонансні коливання шару сипкого матеріалу описуються співвідношенням (6), а параметри  $a(t)$  і  $\vartheta(t)$ , що входять до нього, визначаються отриманими вище залежностями.

На рисунку представлено закони зміни амплітуди при переході через головний резонанс.

**Результати дослідження.** Проведені дослідження показали, що найпродуктивнішим для процесу сепарації є випадок резонансних коливань сипкого матеріалу, або коливань, які близькі до резонансу. В цьому випадку інтенсивність сепарації зростає за рахунок збільшення амплітуди коливань. За великих швидкостей руху сипкого матеріалу вздовж сита резонансна амплітуда та частота його коливань значно зменшують порівняно із резонансними коливаннями за умови невеликої швидкості руху матеріалу. Із останнього випливає, що процес сепарації для значних швидкостей навіть при резонансних коливаннях сипких матеріалів є дуже повільним.

### Перелік використаних джерел

- Bak, L., Strzat, A., Noga, S., & Stachowicz, F. (2013). Dynamic analysis of vibrating screener system. *Journal of Physics Conference Series*, 451(1), 20–28. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/451/1/012028>
- Lapshin, V. L., Rudin, A. V., & Glukhov, A. V. (2015). Matematicheskoe modelirovanie protessa vibratsionnogo dvizheniia chastitcy materiala po rabochemu organu separatora. *Scientific journal of the Irkutsk National Technical University*, 3(98), 49–55. [In Russian].
- Stotsko, Z., Rebot, D., & Topilnytskiy, V. (2016). Modeling and optimization of the parameters of loose environment vibratory separation. *Scientific Journal Technological Complexes*, 1(13), 86–90.
- Stotsko, Z., Topilnytskiy, V., & Rebot, D. (2013). The influence of the loose medium parameters on the process of vibratory separation. *Journal of Manufacturing and Industrial Engineering*, 1–2, 17–19. <https://doi.org/10.12776/mie.v12i1-2.179>
- Topilnytskiy, V. G., Stotsko, Z. A., Kysyj, J. M., & Rebot, D. P. (2014). Investigation of the dynamics of vibratory separator with unbalanced drive. *Scientific Bulletin of NULP*, 786, 53–65.
- Topilnytskiy, V., Rebot, D., et al. (2017). Modeling the dynamics of vibratory separator of the drum type with concentric arrangement of sieves. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2/7(86), 26–34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.95615>
- Xiaodong, Yu, Zhenfu, Luo, Haibin, Li, & Deqing, Gan. (2017). Effect of vibration on the separation efficiency of oil shale in a compound dry separator. *Fuel*, 214, 242–253. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2017.10.129>
- Zheng Wang, Nicholas J. Miles, Tao Wu, Fu Gu, & Philip Hall. (2016). Recycling oriented vertical vibratory separation of copper and polypropylene particles. *Powder Technology*, 301, 694–700. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.06.003>

**Z. A. Stotsko, D. P. Rebot, V. G. Topilnytskiy**  
Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

## INVESTIGATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF BULK MATERIAL DURING VIBRATION SEPARATION

Vibration separation processes are widely spread in different industries. This is due to greater efficiency and productivity of their work. Therefore, the introduction of new types of vibration separators and the improvement of existing developments, the study of dynamic processes in vibration separators are actuals. The influence of the velocity of the bulk material on its amplitude-frequency characteristics in the resonant case is considered in the article. In the studies the bulk material is modeled as the layering of flat elastic-plastic beams that interact with the walls of the container elastically or as hinge-fastened. Asymptotic methods of nonlinear mechanics are used to construct a mathematical model. Taking into account that the phase difference between external perturbation and own oscillations significantly influences the frequency of resonance oscillations, for the construction of differential equations, the value of the phase difference is introduced. The mathematical model of the longitudinal motion of bulk material on the sieve of a vib-

ration separator with arbitrary given speed of motion along the screen is given. On the basis of the mathematical model, a graph of the dependence of the change in the amplitude and the frequency of the oscillation of the bulk material on its velocity along the screen of the vibration separator was constructed. From the obtained results it can be noted that the most productive for the separation process are cases of resonance in a bulk material. It is also shown that the high velocities of the bulk material lead to a decrease in their amplitude and frequency of oscillation. This leads to the fact that even at resonance, the high velocity of the material along the screen causes a slowdown the separation process and a decrease its efficiency. Therefore, processes with slight material speeds could be optimal. The obtained results can be used for further studies of processes of vibration separation, vibration transport and processing of materials and can be generalized to more complex environment models.

**Keywords:** mathematical model; vibration separator; bulk material; amplitude-frequency characteristics; dynamic process.