

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЮВАЛЬНИХ РЕЧОВИН У РІЧКАХ

Розглянуто математичну модель розрахунку розповсюдження забруднювальних речовин у річках в одновимірному випадку з урахуванням турбулентної дифузії, швидкості течії та швидкості розпаду речовини (самоочищення потоку). Побудовано різницеву схему визначення концентрації забруднювальних речовин у річці для обрахунку динаміки процесу. Розроблено алгоритм визначення фізичних параметрів моделі, що дає змогу на основі експериментальних досліджень розрахувати концентрації забруднення в наступні моменти часу для кожної точки (створу).

Ключові слова: математичне моделювання, концентрація забруднювальних речовин, джерело викидів, турбулентна дифузія, самоочищення потоку, метод скінчених різниць, матриця спостережень.

Актуальність проблеми. Загострення екологічних проблем здебільшого зумовлене хімічним забрудненням території внаслідок викидів і скидів з промислових об'єктів забруднювальних речовин, повсякдним використанням добрив і пестицидів, що потрапляють у прісну воду.

Для прогнозування якості води річок і водоймищ використовують найрізноманітніші методи, за допомогою яких надається можливість запобігати зниженню якості води нижче від санітарно-гігієнічних нормативів (гранично-допустимих концентрацій – ГДК). На сьогодні якість води є вже важливою екологічною проблемою, вирішення якої набуває дедалі більшої актуальності.

Постановка завдання. Якщо розглядати водоймище як складну систему, де відбувається комплекс біо-фізико-хімічних процесів самоочищення, наперед важливо знати, який характер має трансформація забруднювальних речовин, тобто одну з тенденцій:

- забруднення безперервно зростає (нестійкість системи);
- самоочищення й розведення компенсують надходження забруднювальних речовин (рівноважність системи).

Трансформацію забруднювальних речовин можна розглядати як відображення

$$F_j(\vec{S}) = L(F_j(\vec{S}), F_{j+1}(\vec{S}), \dots, F_{j+k}(\vec{S})), \quad (1)$$

де: $F_j(\vec{S}), \dots, F_{j+k}(\vec{S})$ – деякі вектор-функції у відповідних створах; L – оператор трансформації якості води; $\vec{S}$ – вектор вхідних змінних.

Характер перенесення й розщеплення речовин визначається оператором L . Отже, математичне моделювання якості води має два етапи:

- визначення адекватної структури оператора L (вигляду рівняння (1));
- розв'язування цього рівняння за різних початкових і граничних умов та змінної функції джерела.

Структуру оператора L звичайно визначають на підставі вивчення фізичних закономірностей екологічних процесів. Так, дифузію й розклад органічної речовини, що надходить у водоймище, можна описати рівнянням (1) або змодельовувати методом Монте-Карло. При цьому натурні дані використовують для по-

рівняння результатів моделювання і даних спостережень або для знаходження коефіцієнтів (ідентифікації) для заданої структури рівняння.

Математична модель. За умови поширення забруднювальних речовин у річках рівняння в частинних похідних має такий вигляд [1]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda(t, x)U - V \frac{\partial U}{\partial x} + f(t, x), \quad (2)$$

з крайовими умовами:

$$\begin{aligned} U(t, x_0) &= \xi x_0(t); \\ U(t, x_N) &= \xi x_N(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $U = U(t, x)$ – концентрація забруднювальної речовини; α – коефіцієнт турбулентної дифузії, м²/с; $V(t, x)$ – швидкість течії, м/с; $\lambda(t, x)$ – величина, що характеризує швидкість розпаду речовини (самоочищення потоку), 1/с; $f(t, x)$ – функція потужності джерела викидів, що лежить у початку координат

$$f(x, t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases} \quad (4)$$

Алгоритм реалізації. Розіб'ємо відрізок $[x_0, x_N]$ на N рівних частин точками $x_k = kh_x + x_0$, де $h_x = (x_N - x_0)/N$, і виберемо крок за часом, що дорівнює τ . Відомі різні методи побудови різницевої схеми [2] вихідного диференціального оператора залежно від структури розв'язання, неперервності або розривності коефіцієнтів, які дають змогу побудувати різницевий аналог у вигляді співвідношення концентрації речовини забруднення у вузлах схеми (шаблону).

Так, якщо припускається гладкість точного розв'язку, можна (2) розкласти в ряд:

$$\begin{aligned} U_{k,n+1} &= U_{k,n} + \tau \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{k,n} + O(\tau^2); \\ U_{k+1,n} &= U_{k,n} \pm h_x \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{k,n} + \frac{1}{2} h_x^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{k,n} \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{k,n} \pm O(h_x^4). \end{aligned} \quad (5)$$

Замінивши в рівнянні (2) похідні різницями [2], дістанемо його різнице-вий аналог:

$$\frac{U_{k,n+1} - U_{k,n}}{\tau} = \alpha \frac{U_{k+1,n} - 2U_{k,n} + U_{k-1,n}}{\Delta x^2} - V \frac{U_{k+1,n} - U_{k-1,n}}{2\Delta x} + \lambda U_{k,n} + f(x_n, t_n). \quad (6)$$

Підставляючи формулу (5) в рівняння (6), переконаємося, що вихідне диференціальне рівняння апроксимується з точністю до $O(h^4, \tau^2)$. Крім умов апроксимації, для збіжності розв'язку задачі (6) до розв'язку задачі, що описується неперервним оператором (2), перевіряється ще умова стійкості різницевої схеми.

Задача ідентифікації різницевого рівняння (6) – це знаходження числових значень (оцінок) коефіцієнтів α , V , λ . Якщо коефіцієнт дифузії α , швидкість перенесення забруднень V ще піддаються оцінці, то $\lambda(x, t)$ – функція, що харак-

теризує розпад забруднень за рахунок механічних і біологічних перетворень, визначається у природних умовах надто складно.

Виходячи з різницевої схеми (6) одновимірного рівняння процесів дифузії, переносу й самоочищення (2), запишемо структуру різницевого оператора у вигляді [3]:

$$U_{k,n+1} = a_{-1}U_{k-1,n} + a_0U_{k,n} + a_1U_{k+1,n}, \quad (7)$$

$$\text{де } a_{-1} = \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} + \frac{V}{2\Delta x} \right) \tau, \quad a_0 = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2\alpha}{(\Delta x)^2} + \lambda \right) \tau, \quad a_1 = \left(\frac{\alpha}{(\Delta x)^2} - \frac{V}{2\Delta x} \right) \tau. \quad (8)$$

Якщо швидкість течії на модельованому відрізку річки вважати постійною, умови самоочищення також ідентичними, то синхронними вимірюваннями в три моменти часу $n = 0, \tau, 2\tau$ у точках концентрацій $U_{k-1,n}, U_{k,n}, U_{k+1,n}$ (рис. 1) дістанемо матрицю спостережень X та вектор вихідної величини Y :

$$X = \begin{bmatrix} U_{k-1,0} & U_{k,0} & U_{k+1,0} \\ U_{k-1,1} & U_{k,1} & U_{k+1,1} \\ U_{k-1,2} & U_{k,2} & U_{k+1,2} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} U_{k,0} \\ U_{k,1} \\ U_{k,2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

що дає змогу знайти невідомий вектор $a^T = (a_{-1}, a_0, a_1)$ з системи алгебраїчних рівнянь

$$(X^T X)a = X^T Y. \quad (10)$$

Виходячи з рівнянь (8) за умови відомих значень a^T , можна визначити фізичні параметри: α – коефіцієнт турбулентної дифузії, V – швидкість течії, λ – швидкість розпаду речовини (самоочищення потоку).

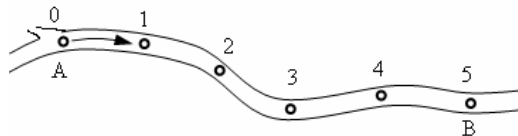


Рис. Схема розташування гідрохімічних спостережень на річці

Окремо треба ідентифікувати функцію джерела викидів $f(t, x)$, тобто залежність концентрації забруднювальних речовин у точці А (рис.) як функцію викиду стічних вод M за час τ , m^3 ; витрат води в річці Q , m^3/c .

Якщо швидкість течії або коефіцієнти самоочищення істотно відрізняються на різних ділянках річки, моделі необхідно ідентифікувати для кожної точки (створу) окремо [4].

Висновки. Для ідентифікації коефіцієнтів моделі, зокрема швидкості розпаду забруднювальних речовини, турбулентної дифузії та швидкості течії річки, необхідно провести збирання даних натурних спостережень у k точках річки у три послідовні моменти часу. Задавши початкові умови $U_{k,0} = U_0$ та граничну умову $U_{k,n} = U_{k,n+1}$, можемо розрахувати концентрації забруднення в наступні моменти часу $n = 3\tau, 4\tau, 5\tau, \dots, t$ у визначених точках, що дасть змогу

розробити інформаційну систему підтримки прийняття рішень щодо якості води з цієї річки у найближчому майбутньому.

Література

1. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р.И. Трухаев. – М.: Изд-во "Наука". – 1981. – 257 с.
2. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – Изд. 4-ое, [перераб. и доп.]. – М.: Изд-во "Физматлит". – 2006. – 400 с.
3. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: навч. посібн. / П.І. Ковальчук. – К.: Вид-во "Либідь". – 2003. – 208 с.
4. Мокін Б.В. Новый подход до моделирования качества воды у розгалуженных речковых системах с использованием засобів паралельних обчислень / Б.В. Мокін, В.Ю. Булига // Вісник Вінницького політехнічного інституту: зб. наук. праць. – 2011. – № 3. – С. 21-23.

Дендюк М.В., Сало М.Ф., Тарасюк О.Л. Математическое моделирование распространения загрязняющих веществ в реках

Рассмотрена математическая модель расчета распространения загрязняющих веществ в реках в одномерном случае с учетом турбулентной диффузии, скорости течения и скорости распада веществ (самоочистка потока). Построена разностная схема определения концентрации загрязняющих веществ в реке для расчета динамики процесса. Разработан алгоритм определения физических параметров модели, что дает возможность на основании экспериментальных исследований рассчитать концентрации загрязнения в следующие моменты времени для каждой точки (створа).

Ключевые слова: математическое моделирование, концентрация загрязняющих веществ, источник выбросов, турбулентная диффузия, самоочистка потока, метод конечных разностей, матрица наблюдений.

Dendyuk M.V., Salo M.F., Tarasyuk O.L. Mathematical modeling dissemination pollutants in rivers

We had examined a mathematical model for computation dispersion of pollutants in the rivers, considering the turbulent diffusion, flow speed and self-cleaning of flow (self-cleaning flow). Were build difference scheme for determination of pollutants in the river for calculating dynamics of the process. Developed algorithm for determination physical parameters of the model, which makes it possible on the basis of experimental studies calculate concentration of pollution at the following time points for each point.

Keywords: mathematical modeling, concentration of pollutants, emission source, turbulent diffusion, self-cleaning of flow, finite difference method, matrix of observations.