

ма для оценки степени достижения целевых показателей. Определено влияние международных программ развития на реализацию потенциала местных сообществ на примере Львовской области.

Ключевые слова: развитие, сельская территория, микропроект, устойчивое развитие.

Chemerys V.A. Program-project approach of strategic development of regional rural areas

In the article analysis of project that spur competitiveness of development in regional rural areas. System management of rural development policy proved possibility of program-project mechanism in evaluating level of main quantitative indicators. Influence of international development program on realization of potential in rural territories in the example of Lviv region are considered.

Keywords: development, rural area, micro-project, sustainable development.

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 504.03:330.101

Доц. В.М. Онишкевич, канд. фіз.-мат. наук;
магістр Х.О. Гапалюк – НЛТУ України, м. Львів

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНОСТІ ПЕРЕБІГУ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Проаналізовано передумови врахування еколого-економічних суперечностей в імітаційному моделюванні глобальних процесів. З'ясовано потребу в прогнозуванні впливу екологічного ефекту на економічні результати матеріального виробництва і невиробничої сфери. З метою відображення випадкового характеру зміни основних економіко-екологічних чинників розвитку суспільства запропоновано враховувати стохастичність при математичному моделюванні таких процесів. На основі моделі Дж. Форрестера у відповідні диференціальні рівняння введено деякі стохастичні коефіцієнти, які характеризують імовірності перебігу певних процесів та явищ. В часткових випадках при граничних значеннях стохастичних коефіцієнтів отримано аналог кривих вихідної моделі. Зроблено висновки щодо прогнозованих тенденцій розвитку, наведено відповідні графіки.

Ключові слова: імітаційна модель, екологічна економіка, стохастичні фактори, система диференціальних рівнянь.

Імітаційні системи як інструмент моделювання еколого-економічних процесів. Для забезпечення ефективності будь-якої діяльності є необхідним постійне підвищення рівня наукової обґрунтованості рішень та прогнозування можливих результатів. Одним із таких підходів є імітаційне моделювання, що полягає у відтворенні досліджуваного процесу при деяких варіантах керування, що визначаються експертами, з подальшим аналізом отриманого результату. При цьому використовується такий алгоритм побудови імітаційної системи: системний аналіз проблеми; вибір якісних альтернатив її розв'язування; побудова основної моделі об'єкта дослідження; побудова системи спрощених моделей; вибір розв'язку; верифікація отриманих результатів [2].

Математичному моделюванню має передувати системний аналіз досліджуваної проблеми, важливою є організація взаємодії між особою, що приймає рішення, та математиком – автором моделі. Для математика, як правило, складно самому розібратися в нюансах функціонування конкретної системи, однак ознайомлення його з суттю справи, відповідною нормативною чи законодавчою базою (документацією, літературою тощо) є обов'язковим. Однак і особа, що приймає рішення, не завжди може чітко поставити задачу і сформулювати вимоги до моделі. Тому тільки в процесі тривалого спільного обговорення (бажано неформалізованого) поступово може вдатися адекватна постановка імітаційної моделі. Існує низку методів, що забезпечують процедуру системного аналізу. Наприклад, для аналізу складних еколого-економічних проблем доцільно використовувати так званий граф цілей і задач, який має вигляд ієрархічної структури, що складається зі скінченної кількості рівнів. На кожному проміжному рівні розміщені певні задачі, які необхідно вирішити для досягнення цілей вищого рівня. Зокрема, для розв'язування задач конкретного проміжного рівня необхідно за допомогою наявних ресурсів розв'язати задачі нижчого рівня. По-

будова графу цілей і задач починається з найвищого рівня, тобто з формулювання кінцевих цілей, потім формується рівень задач, які необхідно розв'язати для досягнення цих цілей. Поступово вдається підійти до проблеми, розв'язання якої є метою створення імітаційної системи. Етап системного аналізу завершується побудовою концептуальної моделі об'єкта дослідження, яка відображає уявлення про об'єкт аналізу дослідника і замовника (особи, що приймає рішення). Ступінь формалізації конкретної моделі залежить від складності об'єкта (проблеми), яка вивчається і може істотно змінюватися – від чіткої математичної моделі для простих систем до суто вербального опису дуже складних ситуацій. Концептуальна модель займає проміжне місце між цими двома граничними випадками, зручним засобом для її побудови є розроблення графів, блок-схем, графіків, діаграм тощо. Формулювання критеріїв оцінки якості розв'язання проблеми також є важливим результатом системного аналізу.

Для вирішення наявної проблеми можна розробити велику кількість варіантів, однак знання і досвід особи, що приймає рішення, та експертів дає змогу заздалегідь відкинути більшість з них і залишити лише ті, аналіз яких можливий з використанням наявних математичних моделей. При цьому формується перелік якісних альтернатив розв'язку і наводиться аргументація, що обґрунтовує непридатність відкинутих варіантів. Вибрані альтернативи можуть бути основою для сценаріїв можливих майбутніх імітаційних експериментів. У зв'язку з високою розмірністю імітаційна модель має блочну структуру, кожен блок описує сукупність однорідних процесів – наприклад, функціонування різних галузей промисловості і аграрного сектора, соціально-демографічних явищ тощо. Кожну таку групу відносно незалежних процесів слід описувати за допомогою найбільш адекватного для неї математичного апарату, при цьому дотримуються принципу рівної точності опису блоків. Важливе значення при побудові математичних моделей має інформаційне забезпечення. Традиційними джерелами інформації є різні звіти, матеріали натурних досліджень, літературні джерела, INTERNET тощо. У разі недостатності цих відомостей необхідно використовувати експертні оцінки. Якщо ж висновки різних експертів є розбіжними, то застосовують спеціальні методи колективної експертизи.

Побудована модель, яка описує досліджуваній об'єкт достатньо детально, як правило, є настільки складною, що імітація залишається єдиним методом її аналізу. При цьому може вдатися здійснити тільки невелику кількість розрахунків, тоді як кількість допустимих варіантів розв'язку є дуже великою. Тому в імітаційній системі, крім основної моделі, будують низку спрощених моделей, які призначені для попереднього наближеного (спрощеного) аналізу проблеми загалом і вибору тих варіантів розв'язку, які є сенс перевіряти в імітаційних експериментах з основною моделлю. Доцільно будувати не одну спрощену модель, а ієрархічну систему таких моделей, при переході до верхніх рівнів якої відповідні моделі стають щораз простішими і зручнішими для аналізу, а при русі вниз – щораз ближчими до основної моделі. Процес спрощення починається уже з концептуальної моделі, що дає змогу перейти від неї до моделі імітаційного рівня. На наступному рівні спрощення може знаходитися модель, яку, як і основну, можна досліджувати лише методами імітації, але кожен розрахунок займає значно менше часу. В процесі подальшого спрощення на певному

рівні має з'явитися модель, яку можна було б досліджувати за допомогою методів оптимізації. Тоді на найвищому рівні доцільно побудувати найбільш спрощені моделі, на основі яких замовник зможе окреслити ефективну множину оптимальних рішень в просторі критеріїв.

Прийняття рішення в імітаційній системі ґрунтується на послідовному стисненні множини можливих варіантів шляхом відкидання неконкурентних або нездійснених альтернатив. Методи відкидання базуються як на математичних, так і на неформальних процедурах. При цьому дуже важливого значення набуває той факт, що в процесі відбраковування варіантів особа, що приймає рішення, може залучати соціальні й організаційні міркування, які погано формалізуються, але врахування яких є необхідною умовою для практичного застосування математичних моделей.

У підсумку необхідною є верифікація – перевірка якості, ступеня точності та надійності отриманого результату. Верифікацію можна здійснити теоретичним шляхом, порівнявши її з результатами застосування іншого методу, аналізом проблеми заново іншим спеціалістом (групою спеціалістів); вивченням і усуненням джерел виникнення помилок; шляхом захисту отриманих результатів перед опонентом; зрештою, можливою є верифікація практикою.

Недоліком використання імітаційних моделей є складність організації і висока вартість, можливість аналізувати невелику кількість наперед підібраних варіантів, певні вимоги щодо інформаційного забезпечення. Одним із прикладів імітаційного моделювання можуть бути еколого-економічні моделі.

Постановка задачі. Вперше потребу в зміні традиційної економічної ментальності та необхідність формування нового еколого-економічного світогляду було відзначено на радянсько-американському симпозіумі "Економічні аспекти охорони навколишнього середовища", (м. Цахкадзор, жовтень 1977 р.) у доповіді Ю.Ю. Туниці "Еколого-економічна оцінка виробництва як фактор охорони навколишнього середовища". Там було вперше обґрунтовано доцільність застосування ринкових підходів до вирішення проблеми охорони природи і раціонального використання природних ресурсів. Поставлена тоді проблема подолання еколого-економічних суперечностей ринкової економіки за допомогою гармонізації взаємодії суспільства і природи й зараз є ключовою проблемою сучасності, а дослідження внутрішніх глибинних суперечностей між суто економічними та екологічними вимогами є важливим науковим питанням [5]. Як відомо, середовище життєдіяльності людини і природні ресурси становлять матеріальну основу як економічної, так і екологічної систем. Але традиційна економічна система враховує лише природні ресурси як сировинну базу різних секторів економіки, тоді як екологічна економіка природокористування розглядає триєдиний процес використання, охорони та відтворення об'єднаних компонентів еколого-економічної системи – навколишнього природного середовища і природних ресурсів. Природокористування, як і взагалі увесь процес виробництва матеріальних благ, супроводжується не лише економічними затратами, а й екологічними ефектами: змінами у просторі та часі якості навколишнього середовища, кількості та якості природних ресурсів. Ці зміни можуть мати як позитивний, так і негативний характер: поліпшення або погіршення природних умов життєдіяльності, зростання чи зниження кількості та якості природних ресур-

сів. Екологічний ефект може вплинути на економічні результати матеріального виробництва і невіробничої сфери, і тому екологічні витрати (сукупність витратків і збитків як у галузі природокористування та охорони природи, так і у господарській діяльності загалом) необхідно враховувати, у суспільному виробництві вони неминує зростатимуть. Відповідно адекватні компенсаційні витрати на відтворення якісних умов природного середовища повинні відповідати рівню інтенсивності використання природних ресурсів та рівню забруднення навколишнього природного середовища. Усвідомлення цього дасть змогу підтримувати баланс між екологічною та економічною системами, забезпечувати постійний соціально-економічний прогрес суспільства. Ігнорування ж може спричинитися до погіршення якості навколишнього природного середовища, виснаження ресурсів, потреби у нових, екологічних видатках, ймовірності екологічних збитків, зрештою – до сповільнення, а то й припинення розвитку [6].

Таким чином, складність проблеми полягає в тому, що ринкова економіка руйнує природу, а нищення природи руйнує саму економіку. Відсутність екологічної компоненти в традиційних економічних системах можна пояснити тим, що значна частина екологічних ефектів господарської діяльності не піддається точним економічним оцінкам [1]. Отже, подальший соціально-економічний розвиток суспільства є неможливим без розв'язання наявних екологічних проблем.

Імітаційна математична модель. Існуючі природні системи є досить гнучкими й стійкими, проте такі їх властивості не є безмежними. Якщо на ранніх стадіях розвитку суспільства його вплив на природу був незначним і не викликав помітних змін у навколишньому середовищі, то зараз тиск факторів антропогенного походження стає таким потужним, що людина вже не може собі дозволити, як це було раніше, нехтувати його негативними наслідками. Масштаби впливу людини на різні компоненти біосфери з року в рік розширюються, і це призводить до зміни життєво важливих параметрів довкілля. Відповідно побудова еколого-економічних математичних моделей глобального розвитку сучасного світу є актуальною задачею [2].

Однією з перших спроб такого економіко-екологічного моделювання була модель Дж. Форрестера [7], яка містить п'ять змінних у часі параметрів: P – чисельність населення Землі, V – виробничий капітал (основні фонди), S – частка сільськогосподарського капіталу в загальному виробничому капіталі, R – невідновлювальні природні ресурси, Z – забруднення навколишнього середовища. Ці параметри визначають ряд функцій, що характеризують взаємозв'язок найважливіших економіко-екологічних факторів розвитку суспільства.

Зміна чисельності населення відображає баланс між народжуваністю B та смертністю D (з урахуванням основних демографічних залежностей) $dP/dt = f_1(B, D)$. Диференціальне рівняння зменшення невідновлювальних природних ресурсів $dR/dt = f_2(P, V, S, M_S, E_R)$. Вважається, що природні ресурси зникають зі швидкістю, яка пропорційна до чисельності населення та деякого фактора R_M , який враховує уповільнення темпів видобутку ресурсів із зростанням матеріального рівня життя M_S . Ця залежність пов'язана з використанням

природних ресурсів, перш за все, на предмети промислового виробництва, потреба в яких асимптотично прямує до насичення з підвищенням матеріального рівня життя M_S . Водночас, M_S виражається через параметри P , V , S та функцію $E_R(R_R)$, яка відображає зростання затрат на видобуток корисних копалин зі зменшенням їх запасів. Динаміка капіталовкладень описується рівнянням $dV/dt = f_3(P, M_S, C_V, T_V)$. Функція $V_M(M_S)$ характеризує приріст вкладів коштів населення у виробництво під впливом зростання матеріального рівня життя M_S ; сталі C_V та T_V – коефіцієнти, визначені на основі вивчення інвестиційних процесів та процесів зношення основних фондів. Динаміку сільськогосподарського капіталу $dS/dt = f_4(S_F, F_R, S_Q, Z, T_S)$ описують функції S_F – вплив на величину сільськогосподарського капіталу рівня харчування F_R ; T_S – час, необхідний для перерозподілу капіталу; S_Q – залежність між сільськогосподарським капіталом і якістю життя. В свою чергу, якість життя визначається матеріальним рівнем життя M_S , кількістю продуктів на душу населення, щільністю населення та рівнем забруднення навколишнього середовища Z . Динаміка забруднення моделюється рівнянням $dZ/dt = f_5(P, Z_N, V_R, T_Z)$. Перший доданок описує генерацію забруднення і є пропорційним до чисельності населення P , сталої Z_N , яка відображає нормальний рівень забруднення, та функції $Z_V(V_R)$ – швидкості забруднення середовища при збільшенні граничного капіталу. Другий доданок характеризує процес природного розпаду забруднення, T_Z визначає час, який необхідний для зміни у певну кількість разів показника забруднення за відсутності нових забруднень.

Урахування стохастичності в математичній моделі. Оскільки зміна в часі значної частини параметрів, які входять у зазначені вище диференціальні рівняння, має випадковий характер, то цю математичну модель можна вдосконалити. Введемо стохастичні коефіцієнти γ_i , які характеризують ймовірності того, що відповідні явища (процеси) відбудуться. При цьому вважаємо, що $0 \leq \gamma_i \leq 1$, ($i = \overline{1,5}$). Граничне значення $\gamma_i = 0$ відповідає практичній неможливості процесу, а $\gamma_i = 1$ – достовірності його перебігу. Модифіковані таким чином співвідношення утворюють систему диференціальних рівнянь, яка є стохастичною моделлю розвитку:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \gamma_1 f_1(B, D) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_2 f_2(P, V, S, M_S, E_R) \\ \frac{dV}{dt} = \gamma_3 f_3(P, M_S, C_V, T_V) \\ \frac{dS}{dt} = \gamma_4 f_4(S_F, F_R, S_Q, Z, T_S) \\ \frac{dZ}{dt} = \gamma_5 f_5(P, Z_N, V_R, T_Z) \end{cases}.$$

Зміни в поведінці функції Форрестера та закон наростання швидкості забруднення середовища із збільшенням граничного капіталу за різних значень стохастичних коефіцієнтів γ_i подано відповідно на рис. 1 та рис. 2.

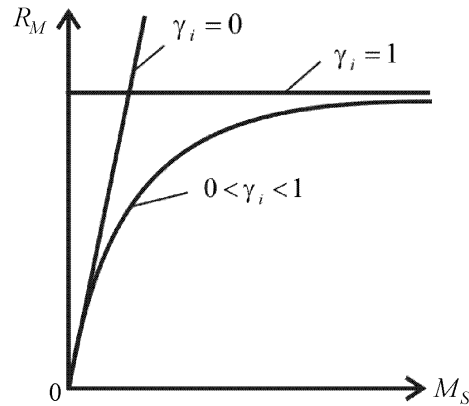


Рис. 1. Функція Форрестера з урахуванням стохастичності

Даними для визначення функціональних зв'язків між параметрами системи є усереднені дані світової статистики. При граничних значеннях $\gamma_i = 1, (i = \overline{1,5})$ отримаємо (рис. 3) аналог кривих вихідної моделі [7]. Всі криві мають чітко виражені максимуми (крива рівня життя приблизно в 1960 р., чисельності населення в 2020 р., капіталовкладень – у 2040 р., рівня забруднення природного середовища – у 2050 р.)

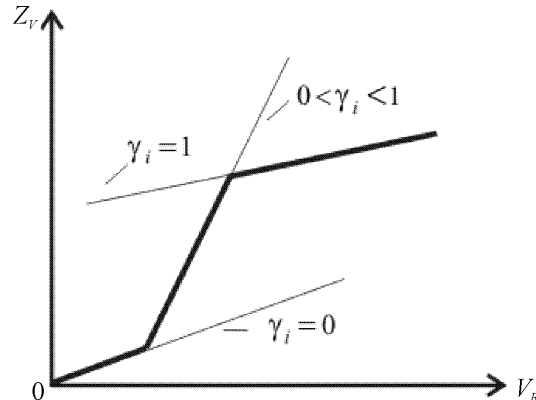


Рис. 2. Закон наростання швидкості забруднення середовища з урахуванням стохастичності

Висновки. Зменшення природних ресурсів спричиняє спад у промисловості, оскільки зростання цін на ресурси внаслідок виснаження їхніх запасів уповільнює темпи зростання капіталовкладень та призводить до скорочення виробництва.

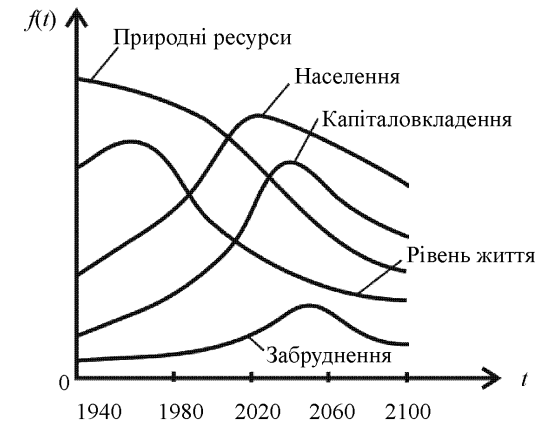


Рис. 3. Прогнозовані тенденції розвитку

Це відображається на рівні життя, погіршення якого спочатку призводить до зниження темпу його зростання, а згодом – і до зменшення чисельності населення. Навіть найзначиміші економічні цілі нівелюються екологічними потребами, а суспільство з ринковою економікою постає перед необхідністю видозміни своєї життєдіяльності і потребою в усезагальному пристосуванні до відтворювальних можливостей природи [4].

Недоліком імітаційних систем є складність такого моделювання, яка полягає в необхідності адекватного відображення екологічних та економічних законів, потребі повноти статистичних даних, вирішенні питань допустимості екстраполяцій функцій, побудові та знаходженні розв'язку системи диференціальних рівнянь і тому подібних труднощах [3, 8].

Література

1. Буркинський Б.В. Екологічний імператив ринкової економіки. Передмова до книги акад. НАН України, проф. Ю.Ю. Туниці "Екоекономіка і ринок: подолання суперечностей". – К. : Вид-во "Знання", 2006. – С. 9-19.
2. Ляшенко І.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів / І.М. Ляшенко, М.В. Коробова, А.М. Столяр. – Тернопіль : Вид-во "Навчальна книга – Богдан", 2006. – 304 с.
3. Онишкевич В.М. Урахування стохастичності в глобальних еколого-економічних математичних моделях / В.М. Онишкевич, Х.О. Гапал'як // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.1. – С. 361-366.
4. Реймерс Н.Ф. Екологія: теорії, закони, правила, принципи и гіпотези / Н.Ф. Реймерс. – М. : Изд-во "Россия молодая", 1994. – 367 с.
5. Туниця Ю.Ю. Екоекономіка і ринок: подолання суперечностей / Ю.Ю. Туниця. – К. : Вид-во "Знання", 2006. – 314 с.
6. Успіх – у балансі екологічної та економічної систем. Редакційна стаття // Вісник Національної академії наук України : загальнонаук. та громадсько-політичний журнал. – 2003. – № 12. – С. 3-6.
7. Форрестер Дж. Мировая динамика : пер. с англ. / Дж. Форрестер. – М. : Изд-во "Наука", 1978. – 167 с.
8. Onyshkevych V.M. Taking into account stochastic factors in the global environmental economics mathematical models / V.M. Onyshkevych, Ch.O. Gapalyak // Scientific and technical research collection "Forestry, Forest, Paper and Woodworking Industry" of the Ukrainian National Forestry University. – 2011. – Vol. 37.2. – Pp. 143-147.

Онышкевич В.М., Гапалек К.О. Имитационное моделирование стохастичности протекания эколого-экономических процессов

Проанализированы предпосылки учета эколого-экономических противоречий при имитационном моделировании глобальных процессов. Выявлена потребность в прогнозировании влияния экологического эффекта на экономические результаты материального производства и непродуцированной сферы. С целью отображения случайного характера изменений основных эколого-экономических факторов развития общества предложено учитывать стохастичность при математическом моделировании таких процессов. На основании модели Дж. Форрестера в соответствующие дифференциальные уравнения введены некоторые стохастические коэффициенты, характеризующие вероятности протекания определенных процессов и явлений. В частных случаях при граничных значениях стохастических коэффициентов получен аналог кривых исходной модели. Сделаны выводы относительно прогнозируемых тенденций развития, приведены соответствующие графики.

Ключевые слова: имитационная модель, экологическая экономика, стохастические факторы, система дифференциальных уравнений.

Onyshkevych V.M., Gapalyak Ch.O. Simulation modeling of stochastic running of environmental economic processes

Prerequisites to accounting for environmental and economic contradictions in simulation modeling of global processes have been examined. The necessity of predicting environmental effects on economic results of the material production and non-material sphere is motivated. For the purpose of demonstrating a random character of changes in the main environmental and economic factors of the human society development, it has been suggested that stochasticity should be taken into account in mathematical modeling of such processes. On the basis of the J. Forrester model, certain stochastic factors have been introduced into corresponding differential equations to characterize the probability of occurrence of certain processes and phenomena. In some instances, the analog of curves of the source model was obtained at boundary values of stochastic factors. Certain conclusions have been made concerning the predicted tendencies of development and relevant plots are presented.

Keywords: simulation model, environmental economics, stochastic factors, system of differential equations.

УДК 539.3 Викл. Д.М. Неспляк; доц. Т.В. Магеровська, канд. фіз.-мат. наук – Львівський ДУВС

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ПРОМІЖНОЇ ТОЧКИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРИРОСТІВ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Викладено методику якісного дослідження числового розв'язку нестационарної задачі термопластичності із використанням методу проміжної точки для визначення скінчених приростів пластичних деформацій. Показано узгодженість результатів, отриманих за представленою безумовно стійкою числовою схемою, із аналітичним розв'язком. Визначено ефективність запропонованої безумовно стійкої числової схеми для задачі термопластичності з використанням методу проміжної точки для визначення скінчених приростів пластичних деформацій у товстостінній трубі під дією внутрішнього тиску та отримано нові якісні висновки.

Ключові слова: метод проміжної точки, метод Ньютона-Рафсона, задача термопластичності, метод скінчених елементів, безумовно стійка числова схема.

Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Використання методу проміжної точки для визначення приростів пластичних деформацій в

ітераційному процесі Ньютона-Рафсона розглянуто у працях J.C. Simo, R.K. Taylor, I.C. Muxi та P.I. Кісіля [2, 3, 8]. Розв'язування задач термопластичності з використанням методу проміжної точки для визначення приростів пластичних деформацій в ітераційному процесі Ньютона-Рафсона викладено у працях [4-7]. Дослідження ефективності безумовно стійкої числової схеми для задачі термопластичності із використанням методу проміжної точки для визначення приростів пластичних деформацій у товстостінній трубі під дією внутрішнього тиску є складною і актуальною задачею.

Постановка задачі. Формулювання результату. Розглянемо процес деформування твердого ізотропного тіла, яке знаходиться в об'ємі V , обмежене поверхнею S та піддається одночасній дії силових і теплових навантажень, які не призводять до втрати його стійкості. Використаємо математичну модель, що ґрунтується на теорії нелінійної незв'язної термопластичності під час нестационарного теплового процесу і теорії неізотермічного пружнопластичного течіння. При цьому будемо враховувати залежність теплофізичних і механічних властивостей матеріалу від температури. Припустимо, що процеси термосилового деформування відбуваються достатньо повільно, що дає змогу використовувати квазістатичні співвідношення термодинаміки. Рівновагу тіла будемо визначати, виходячи з принципу віртуальних робіт.

Фізичні співвідношення запишемо у вигляді узагальненого закону Гука

$$\sigma_{ij}(\bar{u}, T) = a_{ijks}(T) \varepsilon_{ks}^e(\bar{u}, T), \quad (1)$$

де: $a_{ijks}(T)$ – компоненти матриці пружних констант матеріалу A при значенні температури T , $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p - \varepsilon^{th}$ – пружна складова тензора деформацій, ε^p – пластична складова, ε^{th} – температурна складова.

Цілісний процес навантаження розділимо на достатньо малі етапи, кількість і тривалість яких дає змогу з необхідною точністю описати процес деформування як квазістатичний. Нехай задача теплопровідності [4] вже розв'язана, і відомий розподіл поля температури $\dot{T}^{(m)}$ у моменти часу τ_m . Припустимо далі, що розв'язана і задача про деформування тіла у момент часу τ_m та у попередні моменти. Тоді у тілі, яке знаходиться у стані рівноваги, присутні переміщення точок $\bar{u}^{(m)}$, повні деформації $\hat{\varepsilon}^{(m)}$ і напруження $\hat{\sigma}^{(m)}$, які виникли під дією температурного поля $\dot{T}^{(m)}$, масових сил $\bar{Q}^{(m)}$ і поверхневих навантажень $\bar{\sigma}_V^{(m)}$ на частині поверхні S_σ . Переміщення $\bar{u}^{(m)}$ також задовольняють головні краєві умови на частині поверхні S_u . Нехай далі за час $\Delta\tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m$ тіло навантажали додаткові масові сили $\bar{Q}^{(m)}$, поверхневі навантаження $\bar{\sigma}_V^{(m)}$, і точки тіла змінили свою температуру на $T^{(m)}$. Під дією цих факторів тіло змінило свою конфігурацію, у ньому виникли додаткові переміщення $\bar{u}^{(m)}$, деформації $\hat{\varepsilon}^{(m)}$ і напруження $\hat{\sigma}^{(m)}$.

Рівновагу тіла після довантаження будемо визначати, виходячи з принципу віртуальних робіт: