

РОЗРАХУНОК ТРИВИМІРНИХ ВИХРОВИХ МАГНІТНИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Виведено основні формули методу кінцевих елементів для розрахунку тривимірних статичних вихрових магнітних полів в областях, заповнених нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами.

Ключові слова: вихрове магнітне поле, магнітна характеристика, лагранжевий тетраедр, метод кінцевих елементів, кубатурна формула.

Розглянемо краєву задачу розрахунку статичного магнітного поля у тривимірній області D об'ємом V з розподіленням постійним струмом густиною $\bar{J}$. Для зручності міркувань припустимо, що всередині області D маємо однорідне, безгістерезисне середовище з нелінійними магнітними властивостями. Це вихрове магнітне поле описується рівняннями:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}, \quad (1)$$

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A}, \quad (2)$$

де: $\bar{A}$ – векторний магнітний потенціал; $\bar{H}$, $\bar{B}$ – відповідно вектор напруженості магнітного поля і вектор магнітної індукції, пов'язані між собою через магнітну характеристику середовища

$$\bar{H} = \bar{H}[\bar{B}]. \quad (3)$$

Відповідно до відомого принципу мінімуму збереженої енергії магнітного поля, розподіл потенціалу $\bar{A}$ в області D повинен бути таким, щоб мінімізувати цю енергію. Знаходження мінімуму енергії вихрового магнітного поля математично еквівалентне розв'язанню рівнянь (1), (2).

Нехай на межі Γ області розрахунку D задано розподіл потенціалу $\bar{A}$, тоді всередині області встановлюється таке магнітне поле, якому відповідає мінімум збереженої магнітної енергії, представленої функціоналом

$$F = \int_V (W - C) dV, \quad (4)$$

де:

$$W = \int_0^{\bar{B}} \bar{H} d\bar{B}; \quad (5)$$

$$C = \bar{A} \bar{J}. \quad (6)$$

Розподіл потенціалу $\bar{A}$ всередині області D , що мінімізує функціонал F , забезпечує розв'язання краєвої задачі. Умову мінімуму функціонала представляємо у вигляді

$$\delta F = \left(\frac{dF}{d\bar{A}} \right) \delta \bar{A} = 0. \quad (7)$$

Враховуючи довільність варіації $\delta \bar{A}$, визначаємо

$$\frac{dF}{d\bar{A}} = 0, \quad (8)$$

що рівноцінно трьома скалярними рівняннями:

$$\frac{dF}{dA_x} = 0; \quad \frac{dF}{dA_y} = 0; \quad \frac{dF}{dA_z} = 0, \quad (9)$$

де A_x, A_y, A_z – проекції вектора $\bar{A}$.

Для побудови кінцево-елементної моделі заповнимо область розрахунку сукупністю лагранжевих тетраедрів n -го порядку [1].

Нехай внаслідок дискретизації (триангуляції) тривимірної області розрахунку D маємо M лагранжевих кінцевих елементів (КЕ). Кожному з них присвоїмо порядковий номер m ($m = \overline{1, M}$) і локальну мерецію вузлів, згідно з якою i -му вузлу m -го КЕ відповідає номер mi . Для всієї області розрахунку встановимо сіткову (наскрізну) нумерацію R внутрішніх вузлів і G граничних вузлів. Поточні значення порядкових номерів внутрішніх вузлів позначимо r .

Для кінцево-елементної області функціонал F з урахуванням (4)–(6) набуде вигляду

$$F = \sum_{m=1}^M F_m = \sum_{m=1}^M (W_m - C_m), \quad (10)$$

де:

$$W_m = \int_{V_m} W dv; \quad (11)$$

$$C_m = \int_{V_m} C dv; \quad (12)$$

V_m – об'єм m -го КЕ. Утворимо $3R$ -мірний вектор-рядок і вектор-стовпець проекцій потенціалу $\bar{A}$ у внутрішніх вузлах

$$\bar{A} = (A_{x1}, \dots, A_{xR}, A_{y1}, \dots, A_{yR}, A_{z1}, \dots, A_{zR}); \quad \bar{A}^* = (A_{x1}, \dots, A_{xR}, A_{y1}, \dots, A_{yR}, A_{z1}, \dots, A_{zR})^* \quad (13)$$

Умова мінімуму функціонала F з урахуванням (9) рівносильна нелінійній системі алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\varphi}^*[\bar{A}^*] = \frac{dF}{d\bar{A}} = 0. \quad (14)$$

Застосуємо для (11), (12) кубатурні формули чисельного інтегрування за об'ємом лагранжевого тетраедра [1]. Наприклад, у випадку використання лагранжевих тетраедрів першого порядку, кількість вузлів у яких $p=4$, одержимо

$$F_m = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (W_{mi} - C_{mi}), \quad (15)$$

де:

$$C_{mi} = \bar{A}_{mi} \bar{J}_{mi}; \quad (16)$$

$$W_{mi} = \int_0^{\bar{B}_{mi}} \bar{H} d\bar{B}. \quad (17)$$

Представимо залежності компонентів потенціалу $\bar{A}$ в межах m -го КЕ повними поліномами першого степеня

$$A_x = \bar{A}_{xm} k_m^{-1} \bar{k}^* = \bar{k} k_m^{-1} \bar{A}_{xm}^*; \quad A_y = \bar{A}_{ym} k_m^{-1} \bar{k}^* = \bar{k} k_m^{-1} \bar{A}_{ym}^*; \quad A_z = \bar{A}_{zm} k_m^{-1} \bar{k}^* = \bar{k} k_m^{-1} \bar{A}_{zm}^*, \quad (18)$$

$$\text{де} \quad \vec{A}_{xm} = (A_{xm1}, \dots, A_{xm4}); \quad \vec{A}_{ym} = (A_{ym1}, \dots, A_{ym4}); \quad \vec{A}_{zm} = (A_{zm1}, \dots, A_{zm4}) \quad (19)$$

- вектори-рядки значень відповідно A_x, A_y, A_z у вузлах m -го КЕ;

$$\vec{k} = (1, x, y, z) \quad (20)$$

- координатний вектор-рядок поточної точки з координатами x, y, z ;

$$k_m^* = \begin{pmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & z_{m1} \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & z_{m2} \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & z_{m3} \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & z_{m4} \end{pmatrix} \quad (21)$$

- координатна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (20) у вузлах m -го КЕ,

де $\vec{A}_{xm}^*, \vec{A}_{ym}^*, \vec{A}_{zm}^*, \vec{k}^*, k_m$ – відповідно вектори-стовпці і матриця, транспоновані по відношенню до $\vec{A}_{xm}, \vec{A}_{ym}, \vec{A}_{zm}, \vec{k}, k_m^*$.

Проекції B_x, B_y, B_z вектора $\vec{B}$ в m -му вузлі з урахуванням (2) і (18) набудуть вигляду

$$B_{xmi} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = \vec{A}_{zm} \vec{K}_{mi}^{(y)} - \vec{A}_{ym} \vec{K}_{mi}^{(z)} = \vec{K}_{mi}^{(y)} \vec{A}_{zm}^* - \vec{K}_{mi}^{(z)} \vec{A}_{ym}^*; \quad (22)$$

$$B_{ymi} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = \vec{A}_{xm} \vec{K}_{mi}^{(z)} - \vec{A}_{zm} \vec{K}_{mi}^{(x)} = \vec{K}_{mi}^{(z)} \vec{A}_{xm}^* - \vec{K}_{mi}^{(x)} \vec{A}_{zm}^*; \quad (23)$$

$$B_{zmi} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = \vec{A}_{ym} \vec{K}_{mi}^{(x)} - \vec{A}_{xm} \vec{K}_{mi}^{(y)} = \vec{K}_{mi}^{(x)} \vec{A}_{ym}^* - \vec{K}_{mi}^{(y)} \vec{A}_{xm}^*, \quad (24)$$

$$\text{де} \quad \vec{K}_{mi}^{(x)} = \vec{k}_{mi}^{(x)} k_m^{-1}; \quad \vec{K}_{mi}^{(y)} = \vec{k}_{mi}^{(y)} k_m^{-1}; \quad \vec{K}_{mi}^{(z)} = \vec{k}_{mi}^{(z)} k_m^{-1}; \quad (25)$$

$$\vec{K}_{mi}^{(x)*} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi}^{(x)*}; \quad \vec{K}_{mi}^{(y)*} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi}^{(y)*}; \quad \vec{K}_{mi}^{(z)*} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi}^{(z)*}; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \vec{k}_{mi}^{(x)} &= \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = (0, 1, 0, 0); \\ \vec{k}_{mi}^{(y)} &= \frac{\partial \vec{k}}{\partial y} \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = (0, 0, 1, 0); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\vec{k}_{mi}^{(z)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial z} \Big|_{x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}} = (0, 0, 0, 1);$$

$\vec{k}_{mi}^{(x)*}, \vec{k}_{mi}^{(y)*}, \vec{k}_{mi}^{(z)*}$ – стовпці, одержані транспонуванням рядків (27).

Диференціюючи вираз (15) по вектору $\vec{A}_{xm}$ і враховуючи (22)–(24), одержуємо

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_{xm}^* &= \frac{dF_m}{d\vec{A}_{xm}} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 \frac{d}{d\vec{A}_{xm}} \left(\int_0^{\vec{B}_{mi}} (d\vec{B}) \vec{H} + \vec{A}_{mi} \vec{J}_{mi} \right) = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 \left(\frac{d\vec{B}_{mi}}{d\vec{A}_{xm}} \vec{H}_{mi} + \vec{J}_{xmi} \frac{dA_{xmi}}{d\vec{A}_{xm}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 \left(\frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{xm}} H_{xmi} + \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{xm}} H_{ymi} + \frac{dB_{zmi}}{d\vec{A}_{xm}} H_{zmi} + \vec{J}_{xmi} \frac{dA_{xmi}}{d\vec{A}_{xm}} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} H_{ymi} - \vec{K}_{mi}^{(y)} H_{zmi}) + \frac{1}{4} V_m \vec{J}_{xm*}, \quad (28)$$

$$\text{де} \quad \vec{J}_{xm*} = (J_{xm1}, \dots, J_{xm4})^* \quad (29)$$

- вектор-стовпець заданих значень проекції J_x вектора $\vec{J}$ у вузлах m -го КЕ.

Диференціюючи вираз (15) за вектором $\vec{A}_{ym}$ і $\vec{A}_{zm}$ з врахуванням (22) – (24) одержуємо

$$\vec{\phi}_{ym*} = \frac{dF_m}{d\vec{A}_{ym}} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(x)} H_{zmi} - \vec{K}_{mi}^{(z)} H_{xmi}) + \frac{1}{4} V_m \vec{J}_{ym*}; \quad (30)$$

$$\vec{\phi}_{zm*} = \frac{dF_m}{d\vec{A}_{zm}} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(y)} H_{xmi} - \vec{K}_{mi}^{(x)} H_{ymi}) + \frac{1}{4} V_m \vec{J}_{zm*}, \quad (31)$$

$$\text{де} \quad \vec{J}_{ym*} = (J_{ym1}, \dots, J_{ym4})^*; \quad \vec{J}_{zm*} = (J_{zm1}, \dots, J_{zm4})^* \quad (32)$$

- вектори-стовпці заданих значень відповідно J_y , J_z вектора $\vec{J}$ у вузлах m -го КЕ.

Нелінійну систему рівнянь (14) розв'язується, зазвичай, ітераційним методом Ньютона. Для визначення внеску m -го КЕ в систему рівнянь (14) необхідно:

- знайти вектори $\vec{\phi}_{xm*}$, $\vec{\phi}_{ym*}$, $\vec{\phi}_{zm*}$ на кожній ітерації за формулами (28, 30, 31);
- за таблицею відповідності локальної і сіткової нумерації встановити номери r вузлів, які збігаються з вузлами $m_1, \dots, m_4$;
- кожний елемент векторів $\vec{\phi}_{xm*}$, $\vec{\phi}_{ym*}$, $\vec{\phi}_{zm*}$, який відповідає r -ому внутрішньому вузлу, внести відповідно в r -е, $(r+1)$ -е, $(r+2)$ -е рівняння системи (14).

Повну систему рівнянь (14) одержимо, виконавши цю процедуру для всіх M елементів. В цьому випадку викладена вище процедура використовується на етапі формування вектора нев'язок. Більш трудомісткою операцією є складання для векторної функції $\vec{\phi}^* = (\phi_{x1}, \dots, \phi_{xR}, \phi_{y1}, \dots, \phi_{yR}, \phi_{z1}, \dots, \phi_{zR})^*$ матриці Якобі ϕ розмірності $3R \times 3R$. Виведемо загальні вирази, що використовуються для цієї мети.

Диференціюючи вираз (28) за вектором $\vec{A}_{xm*}$, отримуємо матрицю розмірності 4×4 :

$$\phi_{xxm} = \frac{d\vec{\phi}_{xm*}}{d\vec{A}_{xm*}} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{A}_{xm*}} - \vec{K}_{mi}^{(y)} \frac{dH_{zmi}}{d\vec{A}_{xm*}}). \quad (33)$$

З врахуванням (22)–(24) і магнітної характеристики середовища (3), яка рівноцінна трьом скалярним залежностям

$$H_x = H_x[B_x, B_y, B_z]; \quad H_y = H_y[B_x, B_y, B_z]; \quad H_z = H_z[B_x, B_y, B_z], \quad (34)$$

маємо

$$\begin{aligned} \phi_{xxm} = & \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{yxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{xm*}} + v_{yyi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{xm*}} + v_{yzmi} \frac{dB_{zmi}}{d\vec{A}_{xm*}}) - \vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{zxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{xm*}} + v_{zyi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{xm*}} + \\ & + v_{zzmi} \frac{dB_{zmi}}{d\vec{A}_{xm*}})) = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{yzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)}) - \vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{zyi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{zzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)})), \quad (35) \end{aligned}$$

де v_{yymi} , v_{yzmi} , v_{zymi} , v_{zzmi} – елементи тензора диференціального питомого магнітного опору середовища

$$v = \frac{d\bar{H}}{d\bar{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial B_x} & \frac{\partial H_x}{\partial B_y} & \frac{\partial H_x}{\partial B_z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial B_x} & \frac{\partial H_y}{\partial B_y} & \frac{\partial H_y}{\partial B_z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial B_x} & \frac{\partial H_z}{\partial B_y} & \frac{\partial H_z}{\partial B_z} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xx} & v_{xy} & v_{xz} \\ v_{yx} & v_{yy} & v_{yz} \\ v_{zx} & v_{zy} & v_{zz} \end{Bmatrix}, \quad (36)$$

обчислювані в i -му вузлу m -го КЕ.

Для безгістерезисного середовища на основі теореми взаємності $v_{yz} = v_{zy}$, ТОМУ $v_{yzmi} = v_{zymi}$.

Диференціюючи вираз (28) за векторами $\vec{A}_{ym}^*$ і $\vec{A}_{zm}^*$, отримуємо матриці

$$\phi_{xym} = \frac{d\vec{\phi}_{xm}^*}{d\vec{A}_{ym}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{yzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)}) - \vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{zzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{zxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)})) \quad (37)$$

$$\phi_{xzm} = \frac{d\vec{\phi}_{xm}^*}{d\vec{A}_{zm}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{yymi} \vec{K}_{mi}^{(x)}) - \vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{zxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{zymi} \vec{K}_{mi}^{(x)})). \quad (38)$$

Продиференціювавши вирази (30), (31) за векторами $\vec{A}_{xm}^*$, $\vec{A}_{ym}^*$ і $\vec{A}_{zm}^*$, отримаємо такі матриці:

$$\phi_{yxm} = \frac{d\vec{\phi}_{ym}^*}{d\vec{A}_{xm}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{zymi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{zzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)}) - \vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{xymi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{xzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)})); \quad (39)$$

$$\phi_{yym} = \frac{d\vec{\phi}_{ym}^*}{d\vec{A}_{ym}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{zzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{zxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)}) - \vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{xzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{xxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)})); \quad (40)$$

$$\phi_{yzm} = \frac{d\vec{\phi}_{ym}^*}{d\vec{A}_{zm}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{zxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{zymi} \vec{K}_{mi}^{(x)}) - \vec{K}_{mi}^{(z)} (v_{xxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{xymi} \vec{K}_{mi}^{(x)})); \quad (41)$$

$$\phi_{xzm} = \frac{d\vec{\phi}_{zm}^*}{d\vec{A}_{xm}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{xymi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{xzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)}) - \vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{yymi} \vec{K}_{mi}^{(z)} - v_{yzmi} \vec{K}_{mi}^{(y)})); \quad (42)$$

$$\phi_{zym} = \frac{d\vec{\phi}_{zm}^*}{d\vec{A}_{ym}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{xzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{xxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)}) - \vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{yzmi} \vec{K}_{mi}^{(x)} - v_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(z)})); \quad (43)$$

$$\phi_{zzm} = \frac{d\vec{\phi}_{zm}^*}{d\vec{A}_{zm}^*} = \frac{1}{4} V_m \sum_{i=1}^4 (\vec{K}_{mi}^{(y)} (v_{xxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{xymi} \vec{K}_{mi}^{(x)}) - \vec{K}_{mi}^{(x)} (v_{yxmi} \vec{K}_{mi}^{(y)} - v_{yymi} \vec{K}_{mi}^{(x)})). \quad (44)$$

Для того, щоб визначити вклад m -го КЕ в матрицю Якобі ϕ , необхідно обчислити матриці ϕ_{xxt} , ϕ_{xym} , ϕ_{xzm} , ϕ_{yxt} , ϕ_{yym} , ϕ_{yzm} , ϕ_{zxt} , ϕ_{zym} , ϕ_{zzm} на кожній ітерації за формулами (35), (37) – (44) і підсумувати всі їхні елементи з відповідними елементами матриці ϕ за такими правилами:

- елемент ϕ_{xxtij} , ϕ_{xymij} , ϕ_{xzmij} належить відповідно ns -й, $n(s+R)$ -й, $n(s+2R)$ -й клітині матриці ϕ , де n , s – сіткові номери вузлів з локальними номерами mi і mj ;

- елемент ϕ_{xymij} , ϕ_{yymij} , ϕ_{zymij} належить відповідно $(n+R)s$ -й, $(n+R)(s+R)$ -й, $(n+R)(s+2R)$ -й клітині матриці ϕ ;
- елемент ϕ_{xzmij} , ϕ_{zymij} , ϕ_{zzmij} належить відповідно $(n+2R)s$ -й, $(n+2R)(s+R)$ -й, $(n+2R)(s+2R)$ -й клітині матриці ϕ .

Повну матрицю Якобі ϕ одержимо, виконавши цю процедуру для всіх КЕ елементів.

У випадку використання лагранжевих тетраедрів 2-го, 3-го і 4-го порядків потрібно застосувати відповідні кубатурні формули чисельного інтегрування[1] і провести вивід основних залежностей за викладеною вище методикою.

Література

1. Карашецький В.П. Кубатурні формули чисельного інтегрування за об'ємом тетраедра на основі інтерполяційних повних поліномів // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2007. – Вип. 17.6. – С. 258-264.

Карашецький В.П. Расчет трехмерных вихревых магнитных полей методом конечных элементов

Выведены основные формулы метода конечных элементов для расчета трехмерных статических вихревых магнитных полей в областях, заполненных нелинейными безгистерезисными анизотропными средами.

Ключевые слова: вихревое магнитное поле, магнитная характеристика, лагранжевый тетраэдр, метод конечных элементов, кубатурна формула.

Karashetsky V.P. Calculation of three-dimensional eddy magnetic fields of the method finite element

Basic formulas of the finite element method for calculating of three-dimensional static eddy magnetic fields filled with nonlinear without hysteresis anisotropic environments were obtained.

Keywords: eddy magnetic field, magnetic characteristic, Lagrangian tetrahedron, finite element method, cubature formula.

УДК 519.718.3

Бакалавр Д.І. Кутянський; доц. М.В. Дідковська,
канд. техн. наук – НТУ України "Київський політехнічний інститут"

ПОБУДОВА СТІЙКОЇ ДО ВІЗАНТІЙСЬКИХ ЗБОЇВ СИСТЕМИ

Проаналізовано різні види збоїв, що можуть виникнути в роботі програмних систем. Продемонстровано загальний підхід до побудови відмовостійкої системи та розглянуто одну з можливих задач проектування відмовостійких систем та її розв'язок.

Ключові слова: відмовостійкість, відмовостійкі системи, візантійські збої.

Вступ. З поширенням використання комп'ютерних систем у різних сферах діяльності зростають і вимоги до надійності роботи програмно-апаратних комплексів. У роботі багатьох систем необхідною умовою є відсутність збоїв, або, принаймні, утримання імовірності їх появи нижче певного рівня. При цьому часто бажаного результату не вдається досягти лише за допомогою використання надійних компонентів, а потрібно модифікувати архітектуру системи так, щоб вона була толерантною до різних видів збоїв. Наприклад, під час контролю температури певного критичного об'єкта, датчик