

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 004.942; 674.047

*Проф. Я.І. Соколовський, д-р техн. наук;
аспір. І.Д. Капран – НЛТУ України, м. Львів*

МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕТИКИ ДИФУЗІЙНО-ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ У ДЕРЕВИНІ

Наведено дослідження одновимірних рівнянь тепловологоперенесення з урахуванням градієнта тиску як моделі зі зосередженими параметрами.

Актуальність досліджень та аналіз результатів. Важливим завданням енерго- та ресурсозберігаючих технологічних процесів оброблення капілярно-пористих матеріалів є синтез та аналіз математичних моделей тепло- і вологоперенесення. Стосовно процесу сушіння на перенесення тепла і вологи впливають показники температури, вологості й тиску. Зазвичай для дослідження процесів тепло- і масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах використовують систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь [1]. При цьому використовують різні способи вибору основних потенціалів перенесення. Залежно від них, математичні моделі відрізняються різними коефіцієнтами перенесення.

Аналіз теоретичних та прикладних досліджень [1-3] свідчить про те, що система диференціальних рівнянь тепловологоперенесення розв'язувалась за умови відсутності градієнта загального тиску (сталого тиску). Використовуючи аналітичні та чисельні методи, отримано розподіли температурних та вологісних полів у капілярно-пористих тілах класичної форми. Врахування залежності фізичних властивостей матеріалу від потенціалів перенесення ускладнює реалізацію математичних моделей та зумовлює вдосконалення чисельних методів. У роботах [4, 5] з використанням методу скінченних елементів наведено чисельно реалізацію двовимірних задач неізотермічного вологоперенесення в капілярно-пористих матеріалах, що дало змогу визначити зміну у часі та розподіл в об'ємі матеріалу взаємопов'язаних полів температури та вологості.

У цій роботі наведено розв'язання осереднених за координатами зв'язаних рівнянь тепломасоперенесення з врахуванням фільтраційного перенесення за рахунок врахування градієнта тиску.

Математична модель та її реалізація. Для моделювання нестационарних полів дифузійно-фільтраційного вологоперенесення скористаємось системою диференціальних рівнянь [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 u + a_m \delta \nabla^2 t + (k_p / \rho_0) \nabla^2 p; \quad (1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{r\varepsilon}{c} a_m \nabla^2 u + \left(a_q + \frac{r\varepsilon}{c} a_m \delta \right) \nabla^2 t + \frac{r\varepsilon}{c} a_m \delta_p \nabla^2 p; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon a_m}{c_p} \nabla^2 u - \frac{\varepsilon a_m \delta}{c_p} \nabla^2 t + \left(a_p \frac{\varepsilon}{c_p} a_m \delta \right) \nabla^2 p, \quad (3)$$

де: u , t , p – вологовміст, температура і тиск у капілярно-пористому матеріалі; τ – час; a_m , a_q , a_p – коефіцієнти дифузії вологи, температуропровідності і фільтраційної дифузії; δ – відносний коефіцієнт термодифузії і фільтраційного потоку вологи; k_p – коефіцієнт фільтраційного перенесення вологи; ρ – густина матеріалу; ε – коефіцієнт газового переходу; r – питома теплота випаровування рідини; c_p – теплоємність повітря.

Граничні умови мають вигляд:

$$-\lambda_q \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n + q_q(\tau) - (1 - \varepsilon) j_m(\tau) = 0; \quad (4)$$

$$\lambda_m \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_n + \delta \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n + \delta_p \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_n \right) + j_m(\tau) = 0; \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_n = 0, \quad (6)$$

де: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_n$, $\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n$, $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_n$ – градієнти відповідних потенціалів перенесення на поверхні матеріалу; $q_q(\tau)$, $q_m(\tau)$ – потоки тепла і вологи на поверхні матеріалу; λ_q , λ_m – коефіцієнти тепло- і вологопровідності.

Початкові умови:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad t(x, 0) = t_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x). \quad (7)$$

Для замикання математичної моделі необхідно додати умови симетричності

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Використовуючи методи теорії подібності [1, 2] у рівняннях (1)-(8) перейдемо від звичайних фізичних величин до безрозмірних величин. Для цього введемо безрозмірні змінні:

$$T = \frac{t - t_0}{t_c - t_0}; \quad U = \frac{u - u_0}{u_p - u_0}; \quad P = \frac{p - p_0}{p_0}; \quad X = \frac{x}{l}, \quad (9)$$

де: t_0 , u_0 , p_0 – початкові значення температури, вологовмісту і тиску у матеріалі; t_c , u_p – температура і рівноважний вологовміст середовища, l – геометричний розмір ($0 \leq x \leq l$).

Перейдемо у рівнянні моделі до безрозмірних координат. Підставивши значення для u і поділивши рівняння на $u_p - u_0$, з доповненням величини a_q , отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{a_m}{a_q} \frac{a_q}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{a_m}{a_q} \delta \frac{a_q}{l^2} \frac{t_c - t_0}{u_c - u_0} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{k_p p_0}{a_m \rho_0 (u_c - u_0)} \frac{a_m}{a_q} \frac{a_q}{l^2} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}. \quad (10)$$

Надалі використовуються критерії Ликова $Lu = a_m / a_q$ (визначає інтенсивність поля вологоперенесення відносно поля температури) і Поснова

$Pn = \frac{\delta(t_c - t_0)}{(u_c - u_0)}$; $Pn_p = \frac{k_p p_0}{a_m \rho_0 (u_p - u_0)}$. Критерії Pn і Pn_p визначають відносний перепад потенціалів масоперенесення, відповідно викликаних різницею температур і тиску.

Тоді рівняння (10) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial F_0} = Lu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + Pn \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + Pn_p \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right). \quad (11)$$

Переведемо друге рівняння моделі (1)-(8) до безрозмірного виду. Для цього поділимо його на $(t_c - t_0)$, скористаємось (9) і такими рівностями:

$$\begin{aligned} \frac{r\varepsilon}{c} \frac{a_m}{l^2} \frac{u_p - u_0}{t_c - t_0} &= \frac{r\varepsilon\delta}{c} \frac{a_m}{a_q} \frac{a_q}{l^2} \frac{1}{\delta} \frac{u_p - u_0}{t_c - t_0} = \frac{a_q}{l^2} \frac{Fe \cdot Lu}{Pn}; \\ \left(a_q + \frac{\varepsilon r}{c} a_m \cdot \delta \right) l^{-2} &= \left(1 + \frac{\varepsilon r \delta}{c} \frac{a_m}{a_q} \right) \frac{a_q}{l^2} = (1 + FeLu) \frac{a_q}{l^2}; \\ \frac{r\varepsilon}{c} \frac{a_m}{t_c - t_0} \delta_p \frac{p_0}{l^2} &= FeLu \frac{a_q}{l^2} \frac{1}{\delta} \frac{u_p - u_0}{t_c - t_0} \cdot \frac{\delta_p p_0}{u_p - u_0} = FeLu \frac{Pn_p}{Pn} \frac{a_q}{l^2}, \end{aligned}$$

де $Fe = \frac{\varepsilon \delta r}{c}$ – критерій Федорова, який залежить лише від коефіцієнтів ε і δ , та термодинамічних характеристик і не залежить від потенціалів тепломасоперенесення.

Отже, отримаємо

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{FeLu}{Pn} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (1 + FeLu) \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{FeLu Pn_p}{Pn} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}. \quad (12)$$

Враховуючи співвідношення:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon a_m}{c_p} \frac{u_p - u_0}{p_0 l^2} &= \varepsilon Lu \frac{a_q}{l^2}; \quad -\frac{\varepsilon a_m \delta}{c_p} \frac{t_c - t_0}{p_0 l^2} = \varepsilon Lu Pn \frac{a_q}{l^2}; \\ \left(a_p - \frac{\varepsilon a_m}{c_p} \delta_p \right) l^{-2} &= (Lu_p + \varepsilon Lu \cdot Pn_p) a_q l^{-2}, \end{aligned}$$

рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial F_0} = \varepsilon Lu \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \varepsilon Lu Pn \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + (Lu_p + \varepsilon Lu Pn_p) \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}, \quad (13)$$

$Lu_p = a_p / a_q$, фільтраційний критерій Ликова.

Таким чином, математична модель (1)-(3) у безрозмірному вигляді задається рівняннями (11)-(13). Аналогічно у безрозмірному вигляді можна записати початкові (7) та граничні (4)-(6) умови та умови симетрії (8).

Наведемо таку математичну модель:

$$\frac{\partial U}{\partial F_0} = Lu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + Pn \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + Pn_p \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right); \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial F_0} = \frac{FeLu}{Pn} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (1 + FeLu) \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{FeLu Pn_p}{Pn} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Fo} = \varepsilon Lu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \varepsilon Pn \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right) + (Lu_p + \varepsilon Lu Pn_p) \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}. \quad (16)$$

Граничні умови:

$$\frac{\partial T(1, Fo)}{\partial X} + Bi_q(T(1, Fo) - 1) + (1 - \varepsilon)KoLu(U(1, Fo) - 1) = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial U(1, Fo)}{\partial X} + Pn \frac{\partial T(1, Fo)}{\partial X} + Pn_p \frac{\partial P(1, Fo)}{\partial X} + Bi_m(U(1, Fo) - 1) = 0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial P(1, Fo)}{\partial X} + Bi_q(P(1, Fo) - 1) = 0, \quad (19)$$

де: $Bi_q = l\alpha_q / \lambda_q$, $Bi_m = a_m l / \lambda_m$ – критерії Біо (теплообмінний і масообмінний); λ_q, λ_m – коефіцієнти тепло- і масообміну; $Ko = r(u_0 - u_p) / (c_q(t_c - t_0))$ – критерій Косовича.

Початкові умови:

$$U(X, 0) = 0; \quad T(X, 0) = 0; \quad P(X, 0) = 0. \quad (20)$$

Для дослідження кінетики процесу сушіння капілярно-пористих матеріалів розглянемо потенціали перенесення для пластини:

$$\bar{T}(Fo) = \int_0^1 T(Fo, X) dx; \quad \bar{U}(Fo) = \int_0^1 U(Fo, X) dx; \quad \bar{P}(Fo) = \int_0^1 P(Fo, X) dx.$$

Проінтегрувавши рівняння (14)-(17) та врахувавши однорідні граничні умови (17)-(19) та умови симетрії для потенціалів перенесення (8), отримаємо такі рівняння:

$$\frac{d\bar{U}}{dFo} = LuBi_m\bar{U} - LuPnBi_q\bar{T} - LuPn_pBi_q\bar{P}, \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{T}}{dFo} = -\frac{LuFe}{Pn}Bi_m\bar{U} - (1 + LuFe)Bi_q\bar{T} - \frac{FePn_p}{Pn}Bi_q\bar{P}, \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{P}}{dFo} = -\varepsilon Lu(Bi_m\bar{U} + PnBi_q\bar{T}) - (Lu + \varepsilon LuPn_p)Bi_q\bar{P}. \quad (23)$$

Початкові умови для розв'язання системи рівнянь (21), (22) мають вигляд (20).

Зазначимо, що з урахуванням однорідності граничних умов (17)-(19) для розв'язання системи (21)-(23), початковими умовами (20) можна скористатися перетворенням Лапласа за зміною Fo [6]. Відповідні зображення для потенціалів перенесення мають вигляд:

$$\bar{\Phi}_L = \int_0^\infty \bar{\Phi}(X, Fo) \exp(-Fo \cdot s) dFo; \quad (24)$$

де s – зображення Fo , $\Phi_L = (\bar{U}_L, \bar{T}_L, \bar{P}_L)$.

Застосовуючи перетворення Лапласа до диференціальних рівнянь (21)-(23), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно зображень $\bar{U}_L, \bar{T}_L, \bar{P}_L$.

$$A\Phi_L^T = B^T, \quad (25)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} s + LuBi_m & LuPnBi_q & LuPn_pBi_p \\ LuFeBi_m / Pn & s + Bi_q(1 + LuFe) & FePn_pBi_p / Pn \\ \varepsilon LuBi_m & \varepsilon LuPnBi_q & s + Bi_p(Lu_p + \varepsilon LuPn_p) \end{pmatrix}$$

$$B = (-1; -1; -1).$$

Розв'язок системи (25) має вигляд

$$\Phi_L = -\frac{s^2 + d_L s + k_L}{s^3 + \bar{a}_L s^2 + \bar{b}_L s + \bar{c}_L}, \quad (26)$$

де $d_L = (d_u, d_T, d_p)$, $k_L = (k_u, k_T, k_p)$, а також $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ є функціональні залежності коефіцієнтів матриці A системи рівнянь (25).

Для знаходження оригіналів зображень $\bar{U}_L, \bar{T}_L, \bar{P}_L$, які визначають розв'язанням системи рівнянь (25), розглянемо характеристичне рівняння

$$s^3 + \bar{a}s^2 + \bar{b}s + \bar{c} = 0. \quad (27)$$

Розглянемо випадки, коли рівняння (27) має три дійсних від'ємних і два комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною. Оригінал зображення має вигляд [6]

$$L^{-1}(\Phi_L) = A^* \exp(s_1 Fo) + B^* \exp(s_2 Fo) + C^* \exp(s_3 Fo), \quad (28)$$

де величини A^*, B^*, C^* приймають різні значення залежно від різних значень коренів s_1, s_2, s_3 рівняння (27). Зокрема, якщо дійсні корені рівняння (27) $s_i < 0$ ($i = 1, 2, 3$), то маємо:

$$A_L^* = \frac{s_1^2 + s_1 d_L + k_L}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}; \quad B_L^* = \frac{s_2^2 + s_2 d_L + k_L}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)}; \quad C_L^* = \frac{s_3^2 + s_3 d_L + k_L}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}. \quad (29)$$

Якщо s_1, s_3 – комплексно-спряжені корені, а s_2 – від'ємний дійсний корінь, то отримаємо:

$$\begin{aligned} A_L^* &= \sqrt{\frac{(s_1^2 - s_2^2 + s_1 d_L + k_L)^2 + s_L^2 (2s_1 + k_L)^2}{(s_1^2 + s_L^2)((s_1 - s_2)^2 + s_L^2)s_L^2}}; \\ B_L^* &= \frac{s_2^2 + s_2 d_L + k_L}{(s_2 - s_1)^2 + s_L^2}; \\ C_L^* &= \arctg \frac{s_L(d_L + 2s_1)}{s_1^2 + s_1 d_L + k_L - s_L^2} - \arctg \frac{s_2 s_L}{s_1(s_1 - s_2) + s_L^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

де s_L визначається за умовою

$$(s - s_1)^2 + s_L^2 = 0.$$

Індекс "L" у формулах (29) і (30) приймає значення "U", "T", "P". Тому величини A_L^*, B_L^*, C_L^* у виразах (29), (30) розраховуються для різних значень потенціалів тепломасоперенесення.

Таким чином, після того, як визначені оригінали зображень (28), (30), можемо записати розв'язок системи рівнянь (21)-(23). Представимо його у векторній формі

$$\Phi^T(Fo) = D^* E^T(Fo), \quad (31)$$

де $E(Fo) = (\exp(s_1 Fo); \exp(s_2 Fo); \exp(s_3 Fo))$, а матриця D має такий вигляд

$$D = \begin{pmatrix} A_u^* & B_u^* & C_u^* \\ A_T^* & B_T^* & C_T^* \\ A_p^* & B_p^* & C_p^* \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці D визначаються залежно від коренів характеристичного рівняння (27) за співвідношеннями (29) або (30).

Література

1. **Лыков А.В.** Теория сушки / А.В. Лыков. – М. : Изд-во "Энергия", 1968. – 470 с.
2. **Михайлов И.А.** Эволюция полей фильтрационного массопереноса во влажных дисперсных средах / И.А. Михайлов, И.В. Романов. – ИФИС. – 1964. – № 1. – С. 49-54.
3. **Шубин Г.С.** Сушка и тепловая обработка древесины / Г.С. Шубин. – М. : Изд-во "Лесн. пром-сть", 1990. – 236 с.
4. **Соколовський Я.І.** Моделирование деформационно-релаксационных процессов в древесине во время сушки / Я.І. Соколовський, М.В. Дендюк // Лесной журнал : изв. ВУЗов России. – Архангельск. – 2007. – № 1. – С. 75-83.
5. **Соколовський Я.І.** Розрахунок нестационарних температурно-вологісних полів у висушуваній деревині методом скінченного елемента / Я.І. Соколовський, А.В. Бакалець // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвідомч. наук.-техн. зб. – Львів : Вид-во НЛТУ України. – 2004. – Вип. 29. – С. 110-118.
6. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 2001. – 550 с.

Соколовский Я.И., Капран И.Д. Моделирование кинетики диффузионно-фильтрационного влагоперемещения в древесине

Приведены исследования одномерных уравнений тепло-влагоперемещения с учетом градиента давления как модели со сосредоточенными параметрами.

Sokolovskiy Ya.I., Kapran I.D. Simulation of kinetics diffusive lauter moisture transfer in wood.

The resulted researches of dimensional equalizations of heat and moisture transfer are taking into account the gradient of pressure as model with the concentrated parameters.

УДК 674-412:674.09:519.87:519.23

Доц. А.Я. Вус¹, канд. фіз.-мат. наук;
доц. В.О. Маєвський², канд. техн. наук

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПРОСТОЇ КРИВИЗНИ РЕАЛЬНОЇ КОЛОДИ ТА ЇЇ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Розглянуто особливості ідентифікації простої кривизни реальної колоди за результатами сканування форми поверхонь поперечних перетинів колоди за її довжиною. Запропоновано модифікацію методики математичного моделювання форми поверхні реальної колоди з урахуванням наявності простої кривизни, що також передбачає перевірку можливості зменшення недопустимої кривизни за рахунок розрізування колоди за її довжиною на декілька частин та відповідність їх довжини мінімально допустимій довжині колоди у специфікації.

Ключові слова: колода, проста кривизна, апроксимуючий поліном, вісь колоди, мультиколінеарність, математичне моделювання, спектр колоди, довжина колоди.

¹ Львівський НУ ім. Івана Франка;

² НЛТУ України, м. Львів