

УДК 539.3

Доц. О.В. Тумашова, канд. фіз.-мат. наук –
НУ "Львівська політехніка"; доц. Л.І. Козак, канд. техн. наук –
Львівський ДІНТУ ім. В'ячеслава Чорновола

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОЛОГИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗА РІЗНИХ ВАРІАНТІВ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Запропоновано підхід до чисельного розв'язку крайових задач, які описують геометрично нелінійну деформацію пологих циліндричних панелей за силових навантажень зі змінними параметрами. Досліджено вплив різних варіантів граничних умов на криволінійних краях панелі на її деформацію.

Ключові слова: задача деформації, циліндрична панель, наближений метод.

Постановка проблеми. Відкриті прямокутні в плані циліндричні оболонки зі змінними параметрами широко застосовують як елементи сучасних конструкцій. Наявність достатньо високого рівня навантаження призводить до потреби дослідження їх напружено-деформованого стану в геометрично нелінійній постановці. Крім цього, працездатність і стійкість таких конструкцій істотно залежить від впливу різних варіантів граничних умов на краях пологої оболонки і становить безпосередній теоретичний та практичний інтерес. У цій роботі запропоновано підхід до чисельного розв'язку крайових задач, які описують геометрично нелінійну деформацію пологих циліндричних панелей скінчених розмірів зі змінними параметрами. Він базується на застосуванні наближеного аналітичного методу Власова-Канторовича, методу лінеаризації нелінійних одновимірних крайових задач та стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації розв'язку лінійних крайових задач.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Розвитку теорії та методів дослідження напружено-деформованого стану гнучких циліндричних оболонок під дією силових навантажень присвячено багато робіт вітчизняних та зарубіжних вчених. Проблемою дослідження гнучких оболонок та панелей займалися такі вчені, як В.В. Новожилов, А.С. Вольмир, М.С. Корнишин, Я.М. Григоренко, А.П. Мукоєд [1] та інші вчені. На підставі аналізу наукових джерел можна зробити висновок, що вивчали переважно нескінченні пластини та оболонки довільної конфігурації.

За допомогою цього підходу автори досліджували гнучкі циліндричні пологи оболонки скінчених і нескінченних розмірів зі змінними геометричними параметрами [2, 3], але вплив граничних умов на криволінійних краях пологої оболонки на її напружено-деформований стан не був досліджений і порівняння результатів розв'язку, поставленої двовимірної нелінійної крайової задачі, за лінійною і нелінійною теоріями зумовлює зацікавленість.

Основна частина. Будемо виходити з рівнянь [1,2], які описують нелінійну задачу деформації пологих оболонок, розмірності $2a \times 2b$, які перебувають під дією нормального поверхневого навантаження q , коли товщина та кривизна оболонки є змінними. Середина поверхня оболонки до деформації віднесена до ортогональної системи координат xy .

Задачу статички гнучких оболонок можна сформулювати в такому безрозмірному векторному вигляді:

$$\frac{\partial \vec{N}^*}{\partial x^*} = \vec{F}(x^*, y^*, \vec{N}^*, \frac{\partial \vec{N}^*}{\partial y^*}, \frac{\partial^2 \vec{N}^*}{\partial y^{*2}}, \frac{\partial^3 \vec{N}^*}{\partial y^{*3}}, \frac{\partial^4 \vec{N}^*}{\partial y^{*4}}), \quad (1)$$

де: $\vec{N}^{*T} = \{N_y^*, S_x^*, Q_x^*, M_x^*, u^*, v^*, w^*, \theta_x^*\}$ – вектор розв'язувальних функцій, x^* вздовж x , $-1 \leq x^* \leq 1$ та y^* – вздовж прямої y , $-1 \leq y^* \leq 1$. Для визначення напружено-деформованого стану панелі необхідно задати граничні умови на прямолінійних і криволінійних краях. Покладемо граничні умови на прямолінійних краях у вигляді

$$u^* = N_y^* = w^* = M_y^* = 0, \quad y^* = 1, y^* = -1; \quad (2)$$

Тоді на криволінійних краях можна задати будь-які граничні умови. Для пониження розмірності системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) представимо розв'язувальні функції та навантаження у вигляді розкладання в ряд:

$$\begin{aligned} \{N_y, Q_x, M_x, u, w, \theta_x\} &= \sum_{i=1}^p \{N_{yi}(x), Q_{xi}(x), M_{xi}(x), u_i(x), w_i(x), \theta_{xi}(x)\} \cos \frac{i\pi}{2} y; \\ \{v, S_x\} &= \sum_{i=1}^p \{v_i(x), S_{xi}(x)\} \sin \frac{i\pi}{2} y; \quad q = \sum_{i=1}^p q_i \cos \frac{i\pi}{2} y; \end{aligned} \quad (3)$$

Формули (3) мусять задовольняти граничні умови (2), в них знак * ми опустили. Підставивши розклади (3) у систему нелінійних диференціальних рівнянь (1) та застосувавши процедуру Бубнова-Галеркіна, отримаємо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь порядку 8 р у векторному вигляді

$$\frac{d\vec{R}}{dx} = \vec{\Phi}(x, \vec{R}). \quad (4)$$

Граничні умови на криволінійних краях після перетворення набувають вигляду:

$$C_1 \vec{R} = \vec{c}_1 \quad x = -1; \quad C_2 \vec{R} = \vec{c}_2 \quad x = 1, \quad (5)$$

де: C_1, C_2 – прямокутні матриці розмірності $4 \text{ р} \times 8 \text{ р}$, $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ – 4 р вимірні вектори.

Розв'язок задачі (4), (5) за допомогою методу лінеаризації зведемо до послідовності лінійних крайових задач (6), (7) за ітераційною схемою

$$\frac{d\vec{R}^{(i+1)}}{dx} = \vec{\Phi}(x, \vec{R}^{(i)}) + J(\vec{R}^{(i)})(\vec{R}^{(i+1)} - \vec{R}^{(i)}) \quad (6)$$

$$C_1 \vec{R}^{(i+1)}(x) = \vec{c}_1 \quad x = -1, \quad C_2 \vec{R}^{(i+1)}(x) = \vec{c}_2 \quad x = 1 \quad (7)$$

де $J(\vec{R})$ – матриця Якобі системи. Кожна зі задач цієї послідовності розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

За початкове наближення вибирається розв'язок лінійної задачі. У процесі чисельного розв'язку значення векторів $\vec{R}^{(i)}$ між вузлами інтегрування обчислюються за допомогою лінійної інтерполяції, що дає змогу на кожному наближенні зберігати інформацію сталого об'єму.

Розглянемо ілюстрацію запропонованого методу на прикладі напружено-деформованого стану колової циліндричної панелі сталої товщини

$h = 1$, яка перебуває під дією зовнішнього навантаження $q = q_0 \cos \frac{\pi}{2} y$. На прямолінійних краях виконуються умови (2), а на криволінійних краях $x = \pm 1$ розглядаються два варіанти граничних умов:

- варіант 1: $u = v = w = M_x = 0$.
- варіант 2: $u = v = w = \theta_x = 0$.

Для отримання результатів з достатнім ступенем точності при розв'язку задачі в розкладах (3) отримували сім членів ряду [3], що відповідає системі нелінійних диференціальних рівнянь 56 порядку. Під час інтегрування на відрізку $-1 \leq x \leq 1$ використовували 11 точок видачі результатів, 41 точку ортогоналізації і 81 точку інтегрування. У табл. 1 наведено амплітудні значення прогину w_0 в центрі панелі, в точці $y = 0$ для двох варіантів граничних умов, в лінійній (наближення $n = 1$) і нелінійній (наближення $n = 5$) постановках, і для різних значень навантаження q_0 .

Табл. 1. Амплітудні значення прогину w_0 в центрі панелі

Функція	n	Варіант граничних умов	q_0			
			5	10	20	30
w_0	1	1	0,5250	1,0500	2,1000	3,1500
		2	0,5140	1,0280	2,0560	3,0840
	5-6	1	0,3621	0,5221	0,7041	0,8303
		2	0,3530	0,5060	0,6810	0,8111

З табл. 1 видно, що в випадку граничних умов варіанта 2 прогин панелі w_0 зменшується відносно випадку граничних умов варіанта 1, як в лінійній, так і нелінійній постановках. Різниця результатів за двома теоріями і для двох варіантів граничних умов становить 31 % за $q_0 = 5$ і 74 % за $q_0 = 30$.

Табл. 2. Значення напружень σ_x і σ_y на зовнішній (+) і внутрішній (-) поверхнях оболонки

x	y	σ_x^+	σ_x^-	σ_y^+	σ_y^-
0	0	$0,1341 \cdot 10^2$	$0,5063 \cdot 10$	0,8166	0,6582
		$0,1297 \cdot 10^2$	$0,4654 \cdot 10$	0,7977	0,6418
	0,4	$0,3997 \cdot 10^2$	$0,3414 \cdot 10^2$	0,5402	0,4334
		$0,3774 \cdot 10^2$	$0,3217 \cdot 10^2$	0,5233	0,4191
	0,6	$0,4200 \cdot 10^2$	$0,3823 \cdot 10^2$	0,3370	0,2688
		$0,3950 \cdot 10^2$	$0,3596 \cdot 10^2$	0,3242	0,2569
	1	0,0	0,0	0,0	0,0
		0,0	0,0	0,0	0,0
1	0	$0,3674 \cdot 10$	$0,3674 \cdot 10$	0,0689	0,0689
		$0,1345 \cdot 10^2$	$0,1819 \cdot 10^2$	0,2522	0,3411
	0,4	$0,2385 \cdot 10$	$0,2385 \cdot 10$	0,0447	0,0447
		$0,9843 \cdot 10$	$0,1318 \cdot 10^2$	0,1860	0,2461
	0,6	0,8773	0,8773	0,0165	0,0165
		$0,6513 \cdot 10$	$0,8292 \cdot 10$	0,1211	0,1567
	1	0,0	0,0	0,0	0,0
		0,0	0,0	0,0	0,0

У табл. 2 наведено значення напружень σ_x і σ_y на зовнішній (+) і внутрішній (-) поверхнях оболонки в геометрично нелінійній постановці за $q_0=20$. Над рискою приведені значення напружень для граничних умов варіанта 1, під рискою – для граничних умов варіанта 2 в центрі оболонки за $x=0$ і на самому криволінійному контурі $x=1$ за різних перетинів y . З табл. 2 видно, що внаслідок заміни граничних умов варіанта 1 на варіант 2 напруження σ_x^+ , σ_x^- зменшуються на 5 %, а σ_y^- , σ_y^+ – зменшуються на 20 % за $x=0$. Але для граничних умов варіанта 2 на найбільш криволінійному контурі напруження σ_x і σ_y на зовнішній (+) і внутрішній (-) поверхнях оболонки збільшуються на 75 % за $y=0$ і на 94 % за $y=0,6$.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Побудований ефективний метод розв'язку двовимірних нелінійних крайових задач, за допомогою якого виконано дослідження напружено-деформованого стану пологих циліндричних оболонок з різними варіантами граничних умов.

Застосування цього методу до розв'язку анізотропних оболонок даного класу.

Література

1. Григоренко Я.М. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоєд. – К. : Вид-во "Либідь", 1992. – 147 с.
2. Григоренко Я.М. Тумашова О.В. Розв'язок двовимірних задач про нелінійну деформацію циліндричних панелей зі змінними параметрами // Доповіді АН УРСР. – Сер.: А. – 1988. – № 7. – С. 36-39.
3. Тумашова О. Порівняння точного та наближеного методу розв'язків задачі деформації нескінченно довгої циліндричної панелі / О. Тумашова, Л. Козак // Математичне моделювання складних систем : матер. наук.-практ. конф. – Сер.: Фізико-математичні та технічні науки. – Львів, 16 травня 2007 р. – С. 71-73.

Тумашова О.В., Козак Л.И. Исследование напряженно- деформированного состояния пологих цилиндрических оболочек при разных вариантах граничных условий

Предложен подход к численному решению краевых задач, которые описывают геометрически нелинейную деформацию пологих цилиндрических панелей при силовых нагрузках с переменными параметрами. Исследовано влияние различных вариантов граничных условий на криволинейных контурах панели на её деформацию.

Ключевые слова: задача деформации, цилиндрическая панель, приближенный метод.

Tumashova O.V., Kozak L.I. The investigation of stress-strained state of the flexible shallow cylindrical shells for different types boundary conditions

The present paper is devoted to the approach of numerical research of geometrically nonlinear deformation of flexible shallow cylindrical panels with variable parameters under influence of power load. The investigation of influence of different boundary conditions on the panel curved outlines on her deformation.

Keywords: a deformation problem, the cylindrical panel, the approached method.