

Klymash R.R., Shostak V.V., Tysovskij L.O., Dorundiak L.M., Liashenyk A.V. Research of the field of speeds of dust-laden blast in pipeline of decentralizing aspiration system

The complete system of equalizations motion of dust-laden air is built in the pipeline of decentralizing aspiration system with autonomous ventilators. Expressions are got for determination of the field speeds dusted blast. The numerical analysis of task is conducted.

УДК 621.39

*Проф. Я.І. Соколовський, д-р техн. наук;
асист. В.М. Шиманський – НЛТУ України, м. Львів*

**ДВОВИМІРНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ
ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ У КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ
МАТЕРІАЛАХ ІЗ ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ**

Розглянуто математичну модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою, що описується диференціальним рівнянням у частинних похідних із дробовим порядком. Різницеvim методом отримано чисельний розв'язок задачі для різних значень дробової похідної.

Актуальність досліджень. На сьогодні актуальною є наукова задача створення адекватних математичних моделей нерівноважних фізичних процесів. Особливо це важливо, коли йдеться про системи із фрактальною структурою. Адже для опису властивостей систем із фрактальною структурою не можна використовувати уявлення евклідової геометрії. Тут необхідно залучити представлення геометрії дробової розмірності. Особливість фізичних систем із фрактальною структурою полягає в тому, що для них істотні такі властивості, як: "пам'ять", складна природа просторових кореляцій та ефекти самоорганізації. Створення адекватних математичних моделей для систем, у яких проявляються властивості самоорганізації, детермінованого хаосу також потребує залучення нетрадиційних підходів, заснованих на застосуванні математичного апарату диференціальних рівнянь дробового порядку.

Розвиток прикладних аспектів математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку викликає інтерес не тільки щодо створення адекватних математичних моделей для вирішення практичних завдань, але і стосовно розвитку самого математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку.

На відміну від традиційного підходу, коли для кількісного опису досліджуваного явища використовувалися відповідні рівняння, що мають заданий клас розв'язків, застосування апарату інтегро-диференціювання дробової розмірності дає змогу використовувати однопараметричний континуум диференціальних рівнянь. Це принципово змінює підхід до аналізу експериментальних даних, дозволяючи використовувати новий параметр, який є дробовим показником похідної. Фрактальний підхід вносить новий рівень розуміння динаміки співвідношення обігових і необігових процесів, в основі яких лежать самоорганізація та врахування ефектів "пам'яті".

Застосування апарату диференціальних рівнянь дробового порядку дає змогу глибше зрозуміти відомі результати й отримати новий клас рішень, а також охопити широке коло завдань, які раніше не пояснювалися з позицій

традиційних підходів. Таким чином, розроблення методів математичного моделювання фізичних процесів у середовищах із фрактальною структурою засноване на математичному апараті інтегро-диференціювання дробового порядку. Математичний апарат дробових похідних і дробових інтегралів має давню історію. У створенні основ математичного апарату інтегро-диференціювання дробового порядку брали участь відомі математики: Ейлер, Г. Лейбніц, Абель, Ріман. З огляду на розвиток концепції фрактала підвищився інтерес до прикладних аспектів дробового числення в теорії тепло-масоперенесення, обчислювальної математики, біофізики, теорії інформації та соціології.

Хоча сам математичний апарат інтегро-диференціювання дробового порядку досить розвинений, однак його використання для створення математичних моделей систем із фрактальною структурою розпочато порівняно недавно. Низка фізико-технічних систем, які можуть бути описані рівняннями в дробових похідних, повинні містити в собі канали, що входять до складу розгалуженої фрактальної структури. Такими системами можуть бути процеси тепло- та масоперенесення в пористих середовищах. Показник дробової похідної за часом відповідає долі каналів (гілок), відкритих для протікання.

Незважаючи на підвищений інтерес до досліджень процесу тепломасоперенесення у капілярно-пористих середовищах, у теорії досі залишається ряд невирішених проблем, пов'язаних з особливостями просторової структури багатозадачних систем, для опису яких немає адекватного математичного апарату. Глибока фізична природа системи, яка криється за фрактальністю, полягає в тому, що характерний просторовий масштаб неоднорідності системи може зрівнятися з характерними мікроскопічними просторовими параметрами, що, своєю чергою, зумовлює необхідність аналізу властивостей у рамках концепції просторової не локальності [13-14].

Зокрема, говорячи про відсутність традиційної структури ієрархії часів релаксації, маємо на увазі те, що зазвичай між мікроскопічними часами τ_l , (наприклад часом релаксації, протягом якого встановлюється термодинамічна рівновага) і характерними макроскопічними часами τ_m , має місце співвідношення $\tau_l \ll \tau_m$, яке лежить в основі виведення рівнянь руху для опису властивостей капілярно-пористих середовищ. Для цього використовують різні процедури усереднення багаточасткових функцій розподілу. Однак у випадку гетерогенних середовищ для фрактальних систем має місце співвідношення $\tau_l \leq \tau_m$. Це робить проблематичним застосування традиційних процедур усереднення багаточасткових функцій розподілу.

Особливий інтерес у застосуванні фракталів із використанням дробової похідної за часом полягає у можливості врахування ефектів "пам'яті" фізичних систем у контексті моделювання дисипації механічної енергії системи. "Пам'ять" для деякої фізичної величини $F(t)$, пов'язаної з іншою фізичною величиною $f(t)$, означає наявність між ними причинно-наслідкового

зв'язку $F(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau$, де $K(t, \tau)$ – функція "пам'яті". Для випадку мар-

ківського процесу (відсутність "пам'яті") функція $K(t, \tau)$ має вигляд $K(t, \tau) = \eta \delta(t - \tau)$, де: η – додатна константа, $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака. За

наявності повної "пам'яті" системи має місце співвідношення $K(t, \tau) = t^{-1}O(t - \tau)$, де $O(t)$ – одинична функція Хевісайда. Існує етап "часткової" еволюції системи, що займає проміжне положення між двома граничними етапами еволюції від повної втрати до повної присутності "пам'яті" [4]. Такий зв'язок між величинами $F(t)$ і $f(t)$ задається дробовим інтегралом

$$F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau, \text{ де } \Gamma(x) - \text{гамма-функція Ейлера.}$$

Аналіз існуючих досліджень [1-4, 10-12] свідчить про те, що аналітичні методи рішення рівнянь дробової дифузії виявляються малоефективними, а теорія чисельних методів їх вирішення має фрагментарний характер і далека від завершення. У цій роботі було використано чисельний метод скінчених різниць для знаходження розв'язку диференціального рівняння з частковими похідними дробового порядку.

Постановка задачі. Математична модель вологоперенесення у капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою описується диференціальним рівнянням у частинних похідних із дробовим порядком

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = D_x^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

і відповідними граничними умовами 3-го роду

$$D^\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = \beta (U_P - U_R) \quad (2)$$

та початковою умовою $U|_{t=0} = U_0, \quad (3)$

де: u – вологовміст, кг/кг; t – час, с; D^α – коефіцієнти вологопровідності ($D^\alpha = [D_x^\alpha; D_y^\alpha]$), м²/с; n – зовнішня нормаль; β – коефіцієнт вологообміну, м²/с; U_P – вологовміст на поверхні; U_R – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури t_c та відносної вологості зовнішнього середовища; U_0 – початковий розподіл вологості; α – дробовий порядок похідної (що характеризує долю каналів відкритих для протікання).

Параметр $0 < \alpha < 2$. Можна визначити два типи дифузії. Субдифузія характеризується значенням параметра $0 < \alpha < 1$, супердифузія – $1 < \alpha < 2$. У субдифузії частинки рухаються повільніше, у супердифузії – швидше, ніж у звичайній дифузії ($\alpha = 1$) [10-12]. Чисельний метод розв'язку диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку.

Розглянемо рівняння масоперенесення у середовищах із фрактальною структурою, що має вигляд (1). Приймається, що дробова похідна порядку α на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ є похідною Рімана-Ліувілля:

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_{t^n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(t^n)}{(t^{n+1} - t^n)^\alpha} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{u'(\tau)}{(t^{n+1} - \tau)^\alpha} d\tau \right], \quad (4)$$

де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

n – індекс відповідного часового інтервалу $[t^n; t^{n+1}]$.

Представимо похідну $u'(\tau)$ на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ у виді скінченної різниці:

$$\frac{du}{d\tau} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} (\Delta t = t^{n+1} - t^n).$$

Запишемо різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α на відрізку $[t^n; t^{n+1}]$ таким чином:

$$\left. \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right|_{t^n} = \frac{u^{n+1} - \alpha u^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta t^\alpha}. \quad (5)$$

Звідси, різницева схема для рівняння (1) з дробовою похідною порядку α ($0 < \alpha < 1$) набуде такого вигляду:

$$-s_x U_{j-1,k}^{n+1} + (1 + 2s_x + 2s_y) U_{j,k}^{n+1} - s_x U_{j+1,k}^{n+1} - s_y U_{j,k-1}^{n+1} - s_y U_{j,k+1}^{n+1} = \alpha U_{j,k}^n, \quad (6)$$

де

$$s_x = D_x^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta t^\alpha}{\Delta x^2}, \quad s_y = D_y^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta t^\alpha}{\Delta y^2}.$$

Це абсолютно стійка схема, яка має похибку апроксимації $O(\Delta t^\alpha, \Delta x^2, \Delta y^2)$.

Програмна реалізація. Для знаходження чисельного розв'язку математичної моделі вологоперенесення у процесі сушіння деревини, було використано середовище MATLAB 6.5. Програма складається з основного файлу-сценарію (Main.m) та допоміжних файлів-функцій (roch_znach.m, koef_gran_umov.m, fun_gamma.m, fun_u0.m).

Переважно файл-сценарію задаються всі параметри, що описують математичну модель вологоперенесення у процесі сушіння деревини. Також там знаходиться програмна реалізація неявного методу скінченних різниць, для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь з похідною дробового порядку.

Допоміжна файл-функція roch_znach.m слугує для задавання початкових значень основним параметрам моделі, а саме: $[ax; bx] \times [ay; by]$ – меж зміни просторової компоненти (просторові координати меж візря); t_end – кінцевого моменту часу; (k, hx, hy) – кількості точок та кроків розбиття по просторові координати; (n, tau) – кількості точок та кроку розбиття по часовій змінній; α – порядку дробової похідної; D_alfa_x, D_alfa_y – коефіцієнти вологопровідності вздовж осей Ox та Oy відповідно.

Файл-функція koef_gran_umov.m обчислює коефіцієнти граничних умов, коефіцієнт вологопровідності, коефіцієнт вологообміну, коефіцієнт рівноважної вологості.

Файл-функція fun_u0.m задає початкові значення вологовмісту. А файл-функція fun_gamma.m обчислює значення гамма-функції Ейлера.

Отримані результати. Чисельний експеримент визначення розподілу вологості у процесі сушіння деревини на основі наведеного алгоритму реалізації фізико-математичної моделі (1-3) наведемо для сосни з початковим значенням вологовмісту $u_0 = 0.3$ кг/кг і температурою середовища $t_c = 60$ °C та наступними умовами процесу сушіння: $\varphi = 60\%$, $v = 2$ м/с (φ, v – відповідно відносна вологість та швидкість агента сушіння).

На рис. 1, 2 наведено розподіл води у взірці в момент часу $T = 15$ год та $T = 30$ год відповідно за порядком дробової похідної, рівному $\alpha = 1$. Розподіл води розглянуто за перші 30 год сушіння, за ширини взірця, рівному 2 см, довжині – 5 см. Надалі будемо розглядати розподіл води на такому ж взірці та за таких самих моментах часу сушіння, але за різних значень порядку дробової похідної.

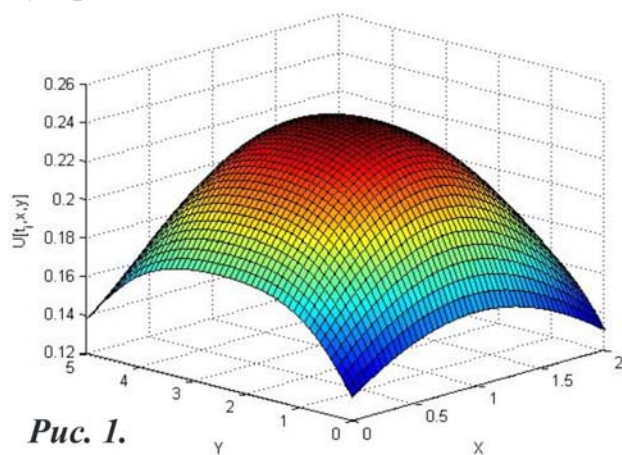


Рис. 1.

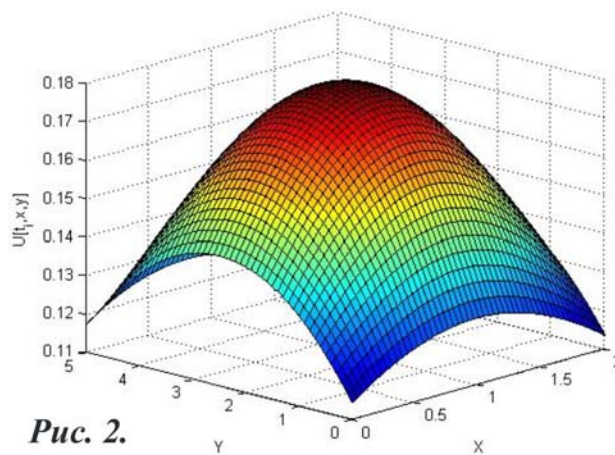


Рис. 2.

На рис. 3, 4 наведено розподіл води за порядком дробової похідної, рівному $\alpha = 0.9$.

З графіків на рис. 1 та рис. 2 видно, що значення вологовмісту на границі взірця є меншим, ніж у його центрі, і воно поступово зростає в міру просування від границі до центру взірця. Ці результати також є зрозумілими на інтуїтивному рівні, адже якщо помістити взірець у сушильну камеру, то природним є те, що він зовні висохне швидше, аніж усередині.

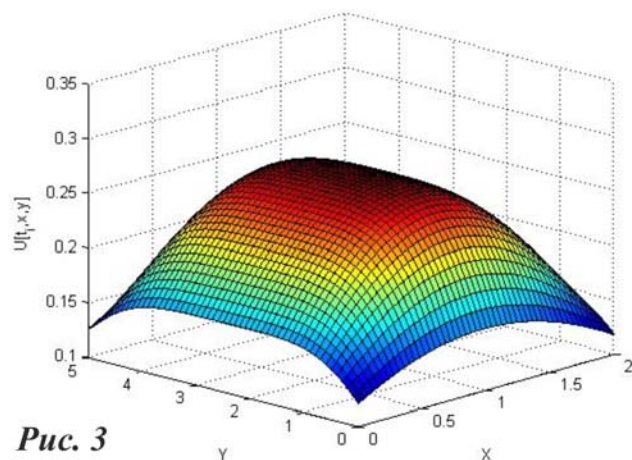


Рис. 3

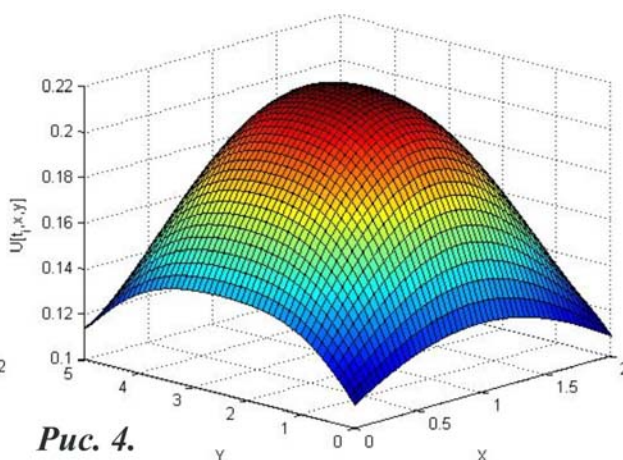


Рис. 4.

Як відомо, деревина є капілярно-пористим матеріалом із фрактальною структурою. Зважаючи на це, потрібно більше уваги приділяти аномальності процесу вологоперенесення у таких матеріалах, а саме наявності процесу субдифузії. Ця аномальність описується диференціальним рівнянням у час-

тинних похідних з дробовим порядком. Проаналізувавши отримані результати чисельного експерименту та порівнявши графіки на рис. 1-4, доходимо висновку, що внаслідок зменшення порядку дробової похідної спостерігається явище сповільнення процесу вологоперенесення, що є характерним для явища субдифузії. Це видно з того, що у відповідних точках візрця значення вологовмісту у випадку, коли порядок дробової похідної $\alpha = 0.9$ є вищим, аніж при $\alpha = 1$.

Висновок. У дослідженні розглянуто математичну модель розподілу вологи у деревині під час сушіння. Для опису цієї моделі використовувалось диференціальне рівняння з частинними похідними дробового порядку з відповідними початковими умовами та граничними умовами третього роду. Також було наведено відповідний метод для знаходження чисельного розв'язку цієї моделі. Основною задачею було проаналізувати поведінку розв'язку моделі за різних порядків дробової похідної. Зважаючи на отримані чисельні результати розв'язку моделі зроблено висновок, що диференціальні рівняння із дробовою похідною за часом є ефективнішими для опису процесу сушіння деревини, ніж диференціальні рівняння із звичайною похідною. Адже, вибравши відповідне значення порядку дробової похідної, можна враховувати аномальність процесу вологоперенесення у деревині.

Література

1. Nigmatullin R.R. Phys. stat. Solidi (b). – 1986. – Vol. 133. – P. 425.
2. Nigmatullin R.R. Ibid. – 1986. – Vol. 133. – P. 713.
3. Бабенко Ю.И. Теплообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю.И. Бабенко. – Л. : Изд-во "Химия", 1986. – 144 с.
4. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация / Р.Р. Нигматуллин // ТМФ. – 1992. – Т. 90. – № 3. – 354-368.
5. Суханов А.Д. Журнал физической химии / А.Д. Суханов, С.Ф. Тимашев. – 1998. – Т. 72, № 11. – С. 2073.
6. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины / Г.С. Шубин. – М. : Изд-во "Лесн. пром-сть", 1990. – 336 с.
7. Соколовський Я.І. Моделювання нелінійних теплообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів / Я.І. Соколовський, А. Бакалець // Вісник НУ "ЛП": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – Львів : НУ "Львівська політехніка". – 2005. – Вип. 543. – С. 129-134.
8. Дендюк В.М. Застосування методу кінцевих елементів для розрахунку нестационарних полів вологоперенесення у висушуваній деревині / В.М. Дендюк, В.П. Поберейко, Я.І. Соколовський // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвідомч. наук.-техн. зб. – Львів : Вид-во УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С. 100-106.
9. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Изд-во "Наука и техника", 1987. – 688 с.
10. Povstenko Y.Z. International Journal of Engineering Science / Y.Z. Povstenko, 43 (2005): 977-991.
11. Povstenko Y.Z. International Journal of Solids and Structures / Y.Z. Povstenko, 44 (2007): 2324-2348.
12. Povstenko Y.Z. Journal of Thermal Stresses / Y.Z. Povstenko, 28: 83-102, 2005.
13. Бейбалаев В.Д. Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой : автореф. дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. – Махачкала, 2009. – 18 с.
14. Назаралиев М.А. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка / М.А. Назаралиев, В.Д. Бейбалаев // Вестник ДГУ. – 2008. – Вып. 6. – С. 46-54.

Соколовский Я.И. Шиманский В.М. Двумерная математическая модель влагопереноса в капиллярно-пористых материалах с фрактальной структурой

Рассмотрена математическая модель влагопереноса в капиллярно-пористых материалах с фрактальной структурой, которая описывается дифференциальным уравнением в производных частей с дробным порядком. Разностным методом получено численное решение задачи для разных значений дробной производной.

Sokolovsky Ya.I., Shymanskyi V.M. Two dimension mathematical model of a moisture transfer in capillary-porous materials with fractal structure

There was considered mathematical model of a moisture transfer in capillary-porous materials with fractal structure which is described by the differential equation in derivatives with fractional order. The difference method receives the numerical decision of a problem at various orders of a fractional derivative.
