

Елементи вектора $H(q, \dot{q})$, утворені коріолісовими і відцентровими силами, отримаємо з виразу

$$H_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{tr}(D_{jkm} J_j D_{ji}^T), \quad (3)$$

де: $i, k, m = 1, 2, \dots, n$.

Розрахунок елементів вектора $C(q)$ виконується за виразом

$$C_i = \sum_{j=i}^n (-m_j g D_{ji} \bar{r}_j), i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де $g = [g_x, g_y, g_z, 0]$ – вектор-рядок, що описує гравітаційне пришвидшення у базовій системі координат.

Висновки та пропозиції. Отже, ми розглянули три методи для формування рівняння динаміки маніпулятора. Метод Ньютона-Ейлера і зв'язних графів – ефективні з обчислювальної точки зору, але непридатні для аналізу. Метод Лагранжа-Ейлера – зручний для аналізу, але основною труднощі методу є розрахунок коефіцієнтів, що водночас вимагає виконання великої кількості математичних операцій. Тому рівняння Лагранжа-Ейлера рекомендуємо використовувати для опису динаміки руху маніпулятора. Надалі розглянемо метод спрощення обчислень.

Література

1. Фу К. Робототехника : пер. с англ. А.А. Сорокина, А.В. Градецкого, М.Ю. Рачкова / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли / под ред. В.Г. Градецкого. – М. : Изд-во "Мир", 1989. – 620 с.
2. Hollerbach J.M. A recursive Lagrangian formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity / J.M. Hollerbach, C. S.G. Lee, R.C. Gonzalez, K.S. Fu, eds. // Tutorial on Robotics. IEEE Computer Society Press. – Maryland, Silver Spring. 1983. – P. 111-117.
3. Luh J. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators / J. Luh, M. Walker, R. Paul // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 102(2). – 1980. – P. 69-76.
4. Lee C. S.G. Development of Generalized d'Alembert Equations of Motion for Mechanical Manipulators / C. S.G. Lee, B.H. Lee, and R. Nigam // Proc. of 22nd IEEE Conf. on Decision and Control, Dec. 14-16, 1983. – San Antonio, Texas. – P. 1205-1210.
5. Bejczy Antal K. Robot Arm Dynamics and Control / Antal K. Bejczy // Jet Propulsion Lab Technical Memo 33-669, Feb. 1974. – Pasadena, CA. – 316 p.
6. Шахинпур М. Курс робототехники : пер. с англ. С.С. Дмитриева / М. Шахинпур / под ред. С.Л. Зенкевича. – М. : Изд-во "Мир", 1990. – 527 с.

Бакай Б.Я. Предварительное представление уравнения динамики манипулятора методом Лагранжа-Эйлера

Рассмотрены три метода для формирования уравнения динамики манипулятора: Лагранжа-Эйлера, Ньютона-Эйлера, связанных графов. Установлена целесообразность использования метода Лагранжа-Эйлера для моделирования динамических нагрузок при перемещении в пространстве манипулятора, которые вызваны кориолисовыми и центробежными силами и имеют значительное влияние на динамику движения.

Ключевые слова: манипулятор, математическая модель, динамика движения.

Bakay B.Ya. Preliminary representation of the equation of dynamics of the manipulator by method Euler-Lagrange

Three methods for formation of the equation of dynamics of the manipulator are considered: Euler-Lagrange, Newton-Euler, coherent counts. The expediency of use of a method of Euler-Lagrange for modelling of dynamic loadings is established during moving to space of the manipulator which are caused forces of Coriolis effect and centrifugal forces and have considerable influence on dynamics of movement.

Keywords: manipulator, mathematical model, dynamics of motion.

УДК 681.3.06;674.032

Здобувач В.С. Гураков – НЛТУ України;

проф. Ю.І. Грицюк, д-р техн. наук – Львівський ДУ БЖД

МАКСИМІННІ СТРАТЕГІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ РОБОТИ ДІЛЬНИЦІ РОЗКРОЮ

Розглянуто особливості прийняття управлінських рішень при оптимізації роботи дільниці розкрою. Наведено загальну постановку багатокритеріальної задачі та деякі методи прийняття рішень як задачу вибору найкращого варіанту (альтернативи) з деякої множини допустимих варіантів. Встановлено, що жоден з розглянутих методів не дає змоги вибрати єдиний оптимальний розв'язок, оскільки вони базуються на різних наборах вагових коефіцієнтів, тому є рівноправними елементами множин ефективних і слабоефективних рішень, які реалізують ядра бінарного відношення Парето і відношень за Слейтером, тобто вони і є шуканими рішеннями.

Ключові слова: постановка багатокритеріальної задачі вибору, методи прийняття рішень, бінарне відношення Парето, відношення за Слейтером, оптимізація технологічного процесу розкрою.

Вступ. З розвитком комп'ютерної техніки значна увага багатьох науковців зосередилась на розробленні спеціалізованих САПР складних виробничих систем. Постійне ускладнення конструкцій технічних об'єктів чи систем, що доводиться проектувати на цей час, необхідність комплексної оцінки їхньої ефективності, а також значний прогрес у розвитку комп'ютерної техніки змусили науковців ввести в теорію проектування деякі нові методи, запозичені зі системотехніки [7, 14], дослідження операцій [1, 10, 11], системного аналізу [2] і т.ін. В основі нового підходу покладено оптимізацію [8, 9, 14], тобто вибір найкращого у певному розумінні розв'язку з деякої сукупності допустимих, які відповідають умовам технічного завдання. Звідси і з'явилося саме поняття "оптимальне проектування".

Велика кількість різноманітних типових задач проектування складних виробничих систем, наприклад структури технологічних процесів [3-5] і планування виробництва [10, 11], організації розподілу ресурсів і розміщення обладнання [7, 12] та ін., формально зводиться до вибору кращих у деякому розумінні значень параметрів з деякої дискретної – кінцевої чи розрахованої – сукупності заданих величин. Інтерес до таких дискретних екстремальних задач визначається не тільки широким колом їх застосування, але й їх органічним зв'язком з іншими розділами математики – комбінаторним аналізом, математичною логікою, теорією кінцевих груп і ін.

На сьогодні в теорії системного аналізу і дослідження операцій зосереджено значну увагу на розв'язанні багатокритеріальних задач [1, 2, 7, 11]. Свого часу найґрунтовніші розробки було проведено за Парето-оптимальними розв'язками багатокритеріальних задач [10, 12]. Досягнуті теоретичні ре-

зультати і практичні навички в цій області математики є придатними для використання їх і для вирішення проблеми проектування технологічного процесу (ТП) розкрою плитних деревних матеріалів (ПДМ) на заготовки.

Таким чином, **метою цієї роботи** є встановлення техніко-економічних показників роботи дільниці розкрою, а також ознайомлення з деякими максимінними стратегіями прийняття оптимальних рішень на підставі отриманих результатів проектування ТП розкрою ПДМ на заготовки.

1. Техніко-економічні показники роботи дільниці розкрою

Результати роботи будь-якої дільниці розкрою, на якій виготовляються заготовки з ПДМ, можуть оцінюватися багатьма технологічними, економічними і техніко-економічними показниками. Основним технологічним показником є **ефективність використання розкроюваного матеріалу**, яка поділяється на **планову** і **фактичну** [4, 5].

Планову ефективність використання матеріалу встановлюють директивні органи і визначають відношенням загального об'єму отриманих деталей до нормативного об'єму використаного матеріалу, виражають у відсотках. Планове значення [10] ефективності використання необлицьованих ДСП має бути не меншим, ніж 92 %, а для облицьованих плит – 90-92 %. Такі норми виконуються не на всіх підприємствах через низку об'єктивних причин: неkratність розмірів заготовок до розмірів розкроюваного матеріалу, незначні можливості розкрійного обладнання, браковані ділянки матеріалу, низька культура організації виробництва тощо.

Фактична ефективність використання матеріалу характеризує результати реального розкрою і визначається відношенням загального об'єму отриманих деталей до фактичного об'єму використаного матеріалу. До загального обсягу отриманих деталей входять також організаційні та технологічні втрати. Оскільки товщини деталей відповідають товщинам ПДМ, то на практиці ефективність використання матеріалу визначається відношенням площі отриманих деталей (S^d) до площі витраченого матеріалу (S^m), %

$$K_{\text{ф}} = \frac{S^d}{S^m} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^M s_i^d m_i}{\sum_{j=1}^N s_j^m x_j^{\Sigma}} \cdot 100, \quad (1)$$

де: M – загальна кількість видів деталей, заданих специфікацією замовника, шт.; s_i^d – площа деталі i -го виду, м^2 ; m_i – отримана кількість деталей i -го виду, шт.; N – кількість типорозмірів плит, використаних для виготовлення деталей, шт.; s_j^m – площа плити j -го типорозміру, м^2 ; x_j^{Σ} – загальна кількість розкромлених плит j -го типорозміру, шт.

Для визначення ефективності роботи дільниці розкрою на виробництві часто застосовують також інші технологічні показники: **загальний обсяг отриманих відходів**, **загальна кількість** або **площа використаного матеріалу**.

Технологічний показник, який характеризує **загальний обсяг отриманих відходів** (Q_{Σ}^B), використовується тоді, коли специфіка виробництва вима-

гає їх обліку або розподілу на ділові та інші відходи, частина з яких признається для подальшої переробки [3]. Визначається цей показник за такою формулою, м^2

$$Q_{\Sigma}^B = S_{\Sigma}^M - S_{\Sigma}^d = \sum_{j=1}^N s_j^M \cdot x_j^{\Sigma} - \sum_{i=1}^M s_i^d \cdot m_i. \quad (2)$$

У випадку розкрою плит одного типорозміру для оцінки ефективності процесу розкрою часто застосовується показник, який вказує на **загальну кількість використаних плит** (P_{Σ}^M), визначається за формулою, шт.

$$P_{\Sigma}^M = \sum_{j=1}^n x_j, \quad (3)$$

де: n – кількість карт розкрою; x_j – кількість плит, розкромлених за j -ою картою, шт. Якщо для отримання заготовок розрізаються плити різних типорозмірів, то для оцінки роботи дільниці розкрою використовується показник, який характеризує їх **загальну площу** (S_{Σ}^M), визначається за формулою, м^2

$$S_{\Sigma}^M = \sum_{j=1}^N s_j^M \cdot x_j^{\Sigma} = \sum_{i=1}^N s_i^M \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}, \quad (4)$$

де: n_i – кількість карт розкрою для плит i -го типорозміру, шт.; $x_{i,j}$ – кількість плит i -го типорозміру, розкромлених за j -ою картою, шт.

Якщо розкрій ПДМ на заготовки здійснюється в умовах масового чи крупносерійного виробництва [5], а плановий період є тривалим, то потреба у деталях на конкретний плановий період може задаватися не фіксованими значеннями, а у певних межах, шт.

$$\left\{ b_{i,k}^H \leq b_{i,k} \leq b_{i,k}^B, i = \overline{1, M} \right\}, k = \overline{1, K^n}, \quad (5)$$

де: K^n – кількість планових періодів; $b_{i,k}$ – номінальна потреба заготовки i -го виду у k -му плановому періоді, шт.; $b_{i,k}^H, b_{i,k}^B$ – нижня та верхня межі потреб заготовки i -го виду у k -му плановому періоді, шт. Здебільшого відхилення від номінальної потреби в k -ому плановому періоді становлять до 10 %. Однак у сукупності на кінець планового періоду отримана кількість деталей i -го виду повинна дорівнювати потрібній кількості, тобто має виконуватися така рівність, шт.

$$\sum_{k=1}^{K^n} b_{i,k}^O = b_i, i = \overline{1, M}, \quad (6)$$

де: $b_{i,k}^O$ – отримана кількість i -ої заготовки у k -му плановому періоді. У такому випадку ні загальна кількість використаних плит P_{Σ}^M , ні загальна їх площа S_{Σ}^M не є найкращими показниками ефективності роботи дільниці розкрою, оскільки їх значення можуть бути найменшими під час виконання нижньої потреби деталей.

Часто на виробництві може траплятися ситуація, коли необхідно виготовляти заготовки з матеріалу різної якості чи вартості, наприклад облицьованих ПДМ різних сортів, різні сорти фанери і т.ін. У цьому випадку для

оцінки ефективності процесу розкрою може використовуватися такий економічний показник, як **загальна вартість розкроюваного матеріалу** (V_{Σ}^M), який визначається за формулою, грн

$$V_{\Sigma}^M = \sum_{i=1}^N v_i^M \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j}, \quad (7)$$

де v_i^M – вартість матеріалу i -го типорозміру, грн/шт.

Окрім названих технологічних і економічних показників, які на сьогодні часто застосовуються в меблевому та плитному виробництві, для оцінки ефективності процесу виготовлення заготовок з ПДМ можуть використовуватися й інші показники [3]: **техніко-економічні** – продуктивність роботи розкрійного обладнання, продуктивність праці, потужність дільниці розкрою; **економічні** – приведені трудовитрати, прибуток, собівартість, рентабельність, приведений прибуток, термін окупності та ін.

Серед техніко-економічних показників найбільший інтерес становить **продуктивність роботи розкрійного обладнання**, оскільки вона безпосередньо характеризує досконалість процесу розкрою на основному обладнанні. На виробництві продуктивність роботи верстата або лінії, призначеної для розкрою ПДМ, визначається за таблицями або графіками, отриманими на основі експериментальних даних. Однак, для обґрунтування вибору того чи іншого розкрійного обладнання з поздовжніми і поперечними пилковими супортами, його **годинну продуктивність** (Π^o) можна визначити за формулою, яка враховує ефективність використання розкроюваного матеріалу і загальну тривалість виконання усіх операцій процесу розкрою, м²/год

$$\Pi^o = \frac{60 \cdot k^n \cdot s_c^M \cdot K_{\phi} \cdot \xi^o}{100 \cdot t_c^n}, \quad (8)$$

де: k^n – кількість одночасно розкроюваних плит, шт.; s_c^M – усереднена площа однієї плити, м²; ξ^o – ефективність використання робочого часу обладнання; t_c^n – усереднена тривалість робочого циклу процесу розкрою, хв.

Для оцінки ефективності роботи дільниці розкрою часто використовується такий показник як **загальні витрати на матеріал і роботу обладнання**. Необхідність введення такого показника пов'язана з відхиленнями розмірів заготовок від стандарту площинних елементів, з керуванням обсягами додаткового розкрою окремих частин матеріалу і з урахуванням випадку, коли розкрій плит здійснюється одночасно на різному основному обладнанні. Значення цього показника визначається за такою формулою, грн:

$$V_{\Sigma}^{MO} = V_{\Sigma}^M + V_{\Sigma}^o = \sum_{i=1}^N v_i^M \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} + \sum_{g=1}^G v_g^o \cdot t_g^o, \quad (9)$$

де: G – кількість одиниць розкрійного обладнання, шт.; v_g^o – вартість роботи g -го розкрійного обладнання, грн/год; t_g^o – тривалість роботи g -го основного розкрійного обладнання, год.

Розглянуті техніко-економічні показники роботи дільниці розкрою можуть застосовувати критерії оптимізації ТП виготовлення заготовок, оскільки вони враховують не тільки сутність різноманітних постановок виробничих задач, але й характеризують різноманітні виробничі витрати, вони не суперечать одна одній, а кожен наступний містить попередню з деякими доповненнями.

2. Максимінні стратегії прийняття оптимальних рішень

У роботі [13, с. 45] наведено загальну постановку задачі прийняття рішень, яку ми розуміємо як задачу вибору найкращого варіанта з деякої множини допустимих, що має такий вигляд:

$$\tilde{F}(\tilde{X}) \rightarrow \max_{\tilde{X} \in \tilde{D}} \Rightarrow \left\{ f_k(\tilde{X}) \rightarrow \max_{\tilde{X} \in \tilde{D}}, k = \overline{1, K} \right\}, \tilde{D} \subseteq R^n,$$

де: $\tilde{X} = \{x_i, i = \overline{1, m}\}$ – множина допустимих варіантів (альтернатив) ТП розкрою ПДМ на заготовки (у багатокритеріальній задачі оптимізації позначається через $\tilde{D}$); $F(\tilde{X}) = \{f_k(\tilde{X}), k = \overline{1, K}\}$ – множина показників якості або "корисності" (значень цільових функцій) очікуваного результату; R^n – множина дійсних чисел.

Нагадаємо [13], що в словесному формулюванні ефективність прийнятого рішення $\tilde{X}^0 \in \tilde{D}$ означає, що його не можна покращити за яким-небудь показником f_k без погіршення ситуації за показниками, що залишилися. Отже, якщо $\tilde{X}^0 = \{x_i^0, i = \overline{1, m}\}$ – **ефективне рішення** (Парето-оптимальне), то не існує інших рішень $\tilde{X}' \in \tilde{D}$, для яких справедливою є така нерівність:

$$\tilde{F}(\tilde{X}') \geq \tilde{F}(\tilde{X}^0) \Rightarrow \left\{ f_k(\tilde{X}') \geq f_k(\tilde{X}^0), k = \overline{1, K} \right\}, \quad (10)$$

де хоч б одна з нерівностей (10) – строга. І аналогічно під **слабо ефективним рішенням** (оптимальним за Слейтером) розумітимемо рішення, яке не можна покращити одночасно за всіма показниками f_k . На рис. 1 слабо ефективним рішенням відповідають "північна, північно-східна і східна частини межі" множини досяжності цільового функціонала $\tilde{F}(\tilde{D})$, тобто це образ множини $\tilde{D}$ для векторного відображення $\tilde{F} = \{f_k, k = \overline{1, K}\}$.

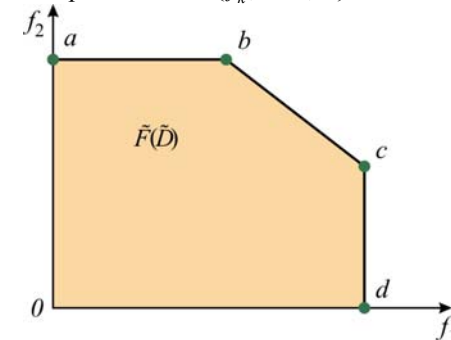


Рис. 1. Множина досяжності багатокритеріальної задачі

Інакше кажучи, в цьому прикладі множина слабоефективних оцінок $S(\tilde{F})$, тобто оптимальних за Слейтером [12], співпадає з об'єднаною множиною $[a, b] \cup [b, c] \cup [c, d]$. Множина ефективних оцінок $P(\tilde{F})$, тобто Парето-оптимальних, дорівнює $[b, c]$ і співпадає з "північно-східною межею" множини досяжності цільового функціонала $\tilde{F}(\tilde{D})$.

Тому основне завдання цього підрозділу полягає в з'ясуванні тих обчислювальних засобів, які можна було б використовувати для побудови апроксимації множини ефективних і слабоефективних рішень і оцінок.

У цьому випадку справедлива така теорема.

Теорема. Нехай задано довільні дійсні числа $\tilde{A} = \{\alpha_k > 0, k = \overline{1, K}\}$ – вагові коефіцієнти. Тоді результатом розв'язання задачі

$$\min \left\{ \alpha_k (f_k(\tilde{X}) - t_k), k = \overline{1, K} \right\} \rightarrow \max_{\tilde{X} \in \tilde{D}} \quad (11)$$

за будь-яких фіксованих значень $\tilde{T} = \{t_k, k = \overline{1, K}\} \in$ слабо ефективний вектор $\tilde{X}^0 = \{x_i^0, i = \overline{1, m}\}$. Навпаки, будь-який слабоефективний вектор $\tilde{X}^0$ можна отримати як результат розв'язання задачі (11) за деяких $\alpha_k > 0$ і $t_k < f_k(\tilde{X}^0)$, $k = \overline{1, K}$.

Доведення. Пряме твердження теореми доведемо від зворотного. Нехай $\tilde{X}^0 \in S(\tilde{D})$ є результатом розв'язання задачі (11) і існує вектор $\tilde{X}' \in \tilde{D}$, для якого

$$\tilde{F}(\tilde{X}') > \tilde{F}(\tilde{X}^0) \Rightarrow \left\{ f_k(\tilde{X}') > f_k(\tilde{X}^0), k = \overline{1, K} \right\},$$

що еквівалентно припущенню про те, що вектор $\tilde{X}^0$ не є слабоефективним. Тоді для будь-яких наборів вагових коефіцієнтів $\{\alpha_k > 0\}$ і за будь-яких фіксованих значень $\tilde{T}$ матимемо

$$\alpha_k (f_k(\tilde{X}') - t_k) > \alpha_k (f_k(\tilde{X}^0) - t_k), k = \overline{1, K}$$

і, як наслідок,

$$\min \left\{ \alpha_k (f_k(\tilde{X}') - t_k), k = \overline{1, K} \right\} > \min \left\{ \alpha_k (f_k(\tilde{X}^0) - t_k), k = \overline{1, K} \right\},$$

а це суперечить припущенню про те, що $\tilde{X}^0$ є результатом розв'язання задачі (11). Пряме твердження теореми доведено.

Доведемо тепер зворотне твердження цієї теореми. Нехай $\tilde{X}^0$ – слабоефективний вектор: $\tilde{X}^0 \in S(\tilde{D})$. Це означає, що не існує іншого вектора $\tilde{X}' \in \tilde{D}$, для якого

$$\forall k: f_k(\tilde{X}') > f_k(\tilde{X}^0), k \in K. \quad (12)$$

За умовою теореми задано такі фіксовані значення $\tilde{T} = \{t_k, k = \overline{1, K}\}$, що $\forall k: f_k(\tilde{X}^0) - t_k > 0$. Введемо числа

$$\alpha'_k = \frac{1}{f_k(\tilde{X}^0) - t_k} > 0, k = \overline{1, K}$$

і покажемо, що

$$\max_{\tilde{X} \in \tilde{D}} \min \left\{ \alpha'_k (f_k(\tilde{X}) - t_k), k = \overline{1, K} \right\} = \min \left\{ \alpha'_k (f_k(\tilde{X}^0) - t_k), k = \overline{1, K} \right\} = 1, \quad (13)$$

тобто, за вибраних вагових коефіцієнтів α'_k максимум реалізується на векторі $\tilde{X}^0$. Цим самим теорема буде доведена.

З нерівності (12) випливає, що для будь-якого вектора $\tilde{X}' \in \tilde{D}$, відмінного від $\tilde{X}^0$, існуватиме такий номер $k = k^0$, для якого

$$f_{k^0}(\tilde{X}') \leq f_{k^0}(\tilde{X}^0), k \in K, \quad (14)$$

тобто це прямий наслідок слабкої ефективності вектора $\tilde{X}^0$. З нерівності (14), шляхом множення на позитивні числа α'_{k^0} , отримуємо таку нерівність:

$$\alpha'_{k^0} (f_{k^0}(\tilde{X}') - t_{k^0}) \leq \alpha'_{k^0} (f_{k^0}(\tilde{X}^0) - t_{k^0}) = 1, k \in K.$$

$$\text{Але тоді} \quad \min \left\{ \alpha'_k (f_k(\tilde{X}') - t_k), k = \overline{1, K} \right\} \leq 1.$$

Таким чином, доведено, що для будь-якого $\tilde{X}'$, відмінного від $\tilde{X}^0$, існуватиме

$$\min \left\{ \alpha'_k (f_k(\tilde{X}') - t_k), k = \overline{1, K} \right\} \leq \min \left\{ \alpha'_k (f_k(\tilde{X}^0) - t_k), k = \overline{1, K} \right\} = 1,$$

а значить, і максимум відносно $\tilde{X}$ лівої частини останньої нерівності також не перевищуватиме одиниці. Співвідношення (13), а разом з ним і теорема, доведені.

Зауваження. Якщо слабоефективне рішення $\tilde{X}^0$ отримано як результат розв'язання задачі (11) за якогось набору вагових коефіцієнтів $\tilde{A} = \{\alpha_k > 0, k = \overline{1, K}\}$, то, очевидно, це ж рішення досягатиметься за будь-якого набору $h \cdot \tilde{A} = \{h \cdot \alpha_k, k = \overline{1, K}\}$, де h – довільне позитивне число. Тому можна вважати, що завжди виконуватиметься умова нормування

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1. \quad (15)$$

Інакше кажучи, замість вагових коефіцієнтів α_k ми розглядатимемо дещо інші коефіцієнти:

$$\tilde{A}' = \left\{ \alpha'_j = \alpha_j / \sum_{k=1}^K \alpha_k, j = \overline{1, K} \right\}.$$

Через наведене вище зауваження далі припускати, що умова (15) завжди виконується.

З доведеної теореми випливають важливі висновки. Для простоти викладання матеріалу вважатимемо, що всі функціонали $\tilde{F} = \{f_k, k = \overline{1, K}\}$ початково позитивні, тобто приймають в усіх точках допустимої множини $\tilde{D}$ тільки строго позитивні значення: $\forall \tilde{X} \in \tilde{D}: f_k > 0, k = \overline{1, K}$. Тоді для будь-якого $\tilde{X}^0 \in S(\tilde{D})$ буде виконуватися умова $f_k > t_k$ за $t_k = 0$. Тому далі замість задачі (11) розглядатимемо таку задачу багатокритеріальної оптимізації:

$$\tilde{F}(\tilde{X}, \tilde{A}) \square \min \left\{ \alpha_k f_k(\tilde{X}), k = \overline{1, K} \right\} \rightarrow \max_{\tilde{X} \in \tilde{D}}, \quad (16)$$

де $\square$ – дорівнює за визначенням.

Позначимо множину розв'язків задачі (16) за фіксованого набору вагових коефіцієнтів $\tilde{A}$ через

$$\tilde{X}(\tilde{A}) = \text{Arg max}_{\tilde{X} \in \tilde{D}} \tilde{F}(\tilde{X}, \tilde{A}),$$

де $\text{Arg max}_{\tilde{X} \in \tilde{D}} \tilde{F}()$ – множина усіх максимізаторів цільового функціонала $\tilde{F}()$

Згідно з доведеною теоремою, множина

$$\bigcup_{\alpha \in \tilde{A}} \tilde{X}(\alpha), \tilde{A} = \left\{ \alpha = \{\alpha_k > 0, k = \overline{1, K}\} : \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \right\}$$

співпадає з множиною слабоефективних рішень:

$$\bigcup_{\alpha \in \tilde{A}} \tilde{X}(\alpha) = S(\tilde{D}).$$

Для розуміння сказаного, наведемо геометричну інтерпретацію доведеному твердженню для випадку двох цільових функціоналів f_1, f_2 . Маємо таку задачу двокритеріальної оптимізації:

$$\tilde{F}(\tilde{X}, \tilde{A}) = \min \{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2\}.$$

Якщо розглядати вказану залежність у просторі двох критеріїв, то отримаємо таку цільову функцію:

$$\Phi(f_1, f_2) = \min \{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2\}.$$

Побудуємо лінії рівня (лінії постійного значення) цільової функції $\Phi()$ на площині (f_1, f_2) . Для цього розглянемо пряму L , задану рівнянням

$$\alpha_1 f_1 = \alpha_2 f_2,$$

за деякого фіксованого набору вагових коефіцієнтів $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Графік прямої

$f_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} f_1$ показано на рис. 2.

У будь-якій точці цієї прямої, наприклад, у точці $a = (f_1^a, f_2^a)$, матимемо $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$. При зсуві з точки a управо паралельно осі абсцис f_1 , отримаємо $\alpha_1 f_1^a > \alpha_2 f_2^a$. Аналогічна ситуація спостерігається і в разі переміщення вгору з точки a паралельно до осі ординат f_2 , матимемо $\alpha_2 f_2^a > \alpha_1 f_1^a$. Тому, згідно з визначенням цільової функції $\Phi()$, її лінія рівня, яка відповідає значенню $\Phi() = \alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$, співпадатиме з "куточком" (a' а a'') з вершиною в точці a , яку показано на рис. 2 (зазвичай, цю лінію рівня доцільно розглядати тільки в межах множини досяжності функціонала $\tilde{F}(\tilde{D})$). Отже, в усіх точках відрізків $[a' a]$ і $[a, a'']$ цільова функція $\Phi()$ матиме одне і те ж значення, яке співпадає з її значенням у вершині "куточка", що дорівнює за побудовою $\alpha_1 f_1^a = \alpha_2 f_2^a$.

Легко побачити, що будь-який аналогічний "куточок" з вершиною, розташованою на прямій L , також буде лінією рівня, що відповідає своєму значенню цільової функції $\Phi()$. Причому, при його віддаленні вздовж прямої

L від початку координат на північний схід, то отримуватимемо лінії рівня, що відповідають більшим значенням цільової функції $\Phi()$. Наприклад, на рис. 2 показана лінія рівня ($b' b b''$), де значення цільової функції $\Phi(b) > \Phi(a)$. Таким чином, для кожного фіксованого набору вагових коефіцієнтів $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ми отримуємо ціле сімейство "куткових" ліній рівня цільової функції $\Phi()$.

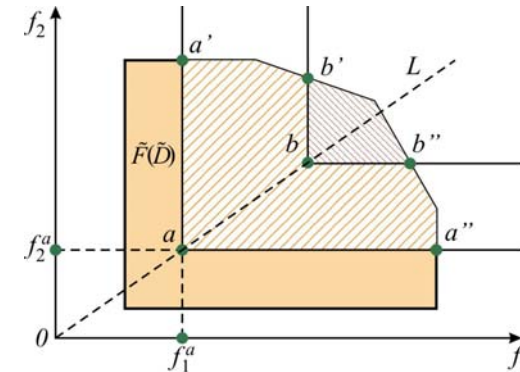


Рис. 2. Ліній рівня функції мінімуму

Зрозуміло, що розв'язок основної задачі багатокритеріальної оптимізації (16) відповідатиме найбільш віддаленому від початку координат положенню "куточка" (у межах множини досяжності цільового функціонала $\tilde{F}(\tilde{D})$), якому відповідає максимально можливе значення цільової функції $\Phi()$, а значить і функціонала $\tilde{F}()$. На рис. 3 показано множину слабоефективних оцінок (відрізок $[c', d']$), отриманих внаслідок розв'язання задачі (16) за деякого набору вагових коефіцієнтів, що відповідають прямій L' . На цьому ж рисунку показано рішення $[c'', d'']$, отримане за іншого набору вагових коефіцієнтів, що відповідають прямій L'' .

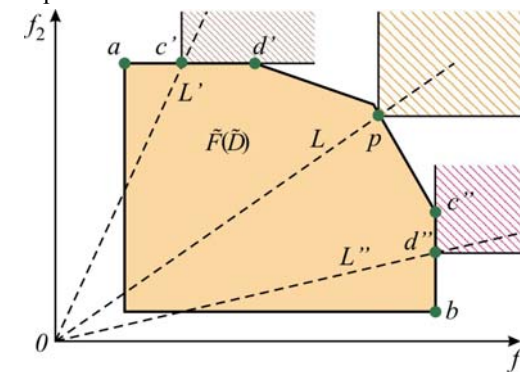


Рис. 3. Рішення для різних наборів вагових коефіцієнтів

Продовжуючи такі побудови, легко переконатися, що, перебираючи всякі значення вагових коефіцієнтів $\alpha \in \tilde{A}$, можна отримати "північну", "північно-східну" і "східну" частини межі множини досяжності $\tilde{F}(\tilde{D})$:

$$S(\tilde{F}) = [a, d] \cup [d', c'] \cup [c'', b].$$

Це і відповідає основному змісту сформульованої теореми.

Тут важливо відзначити, що задачі багатокритеріальної оптимізації типу (16) можуть мати не єдине рішення. Так, для значень вагових коефіцієнтів $\alpha \in \tilde{A}$, що відповідають прямій L , ми як рішення отримаємо цілу множину $[c, d]$ слабоефективних оцінок і відповідних їм слабо ефективних рішень початкової багатокритеріальної задачі. Кожне з цих рішень, за замовчуванням, має бути знайдено для подальшого якісного аналізу.

Побудовані на базі максимінного згортання критеріїв оптимальності обчислювальні процедури зазвичай передбачають задавання деякої сітки в просторі вагових коефіцієнтів $\tilde{A}$. Далі для отриманої скінченної множини наборів вагових коефіцієнтів

$$\tilde{A} = \left\{ \tilde{A}_i = \left\{ \alpha_{ik} > 0, k = \overline{1, K} \right\}, i = \overline{1, m} \right\}$$

розв'язується множина відповідних однокритеріальних задач (16) або (11). Внаслідок цього приходимо до побудови потрібної апроксимації множини слабо ефективних оцінок $S(\tilde{D})$ і $S(\tilde{F})$. Користувач відповідної програмної системи зазвичай має можливість впливати на вказаний процес вибору рішення, управляючи тою чи іншою мірою вибором вагових коефіцієнтів. Це дає змогу, як наслідок, отримувати дещо точніші апроксимації окремих ділянок меж, що представляють найбільший інтерес.

Висновки. Наведені вище максимінні стратегії прийняття оптимальних рішень не дають змоги виділити єдиний оптимальний розв'язок. Рішення, які відповідають різним наборам вагових коефіцієнтів, є рівноправними елементами множин ефективних і слабоефективних рішень, які, згідно з загальною постановкою задачі прийняття рішень, реалізують ядра бінарного відношення Парето і відношень за Слейтером, тобто і є шуканими рішеннями. Проте, з практичної точки зору, наприклад у задачах вибору допустимих варіантів ТП розкрою ПДМ на заготовки, при виборі параметрів його функціонування, при виборі варіантів структури його обладнання і т.д., а також у системах автоматизованого проектування часто потрібно вибрати єдине рішення (проект). Для цього має залучатися деяка додаткова інформація про надання особою переваги, що приймає рішення. Принцип Парето в цьому сенсі дає змогу тільки звузити клас можливих претендентів на вибране рішення та вилучити з розгляду свідомо не конкурентоздатні варіанти.

Гураков В.С., Грицюк Ю.И. Максиминные стратегии принятия решений при оптимизации работы участка раскря

Рассмотрены особенности принятия управленческих решений при оптимизации работы участка раскря. Приведена общая постановка многокритериальной задачи и некоторые методы принятия решений как задача выбора наилучшего варианта (альтернативы) из некоторого множества допустимых вариантов. Установлено, что ни один из рассмотренных методов не дает возможность выбрать единственное оптимальное решение, поскольку они базируются на разных наборах весовых коэффициентов, потому являются равноправными элементами множества эффективных и слабо эффективных решений, которые реализуют ядра бинарного отношения Парето и отношения по Слейтеру, то есть они и являются искомыми решениями.

Ключевые слова: постановка многокритериальной задачи выбора, методы принятия решений, бинарное отношение Парето, отношение по Слейтеру, оптимизация технологического процесса раскря.

Gurakov V.S., Grytsyuk Yu.I. Maximinimal strategy of decision-making process during optimization tasks on cutting department

The acceptance features of administrative decisions are considered during optimization tasks on cutting department. The general raising of multicriterion task and some methods of decision-making process as a task of choice of the best variant (alternatives) is resulted from some great number of possible variants. Described that none of the considered methods aren't acceptable to choose the unique optimum decision, as they are based on the different sets of gravimetric coefficients, that why are the equal in rights elements of great number effective and poorly effective decisions which will realize the kernels of binary relation of Pareto and relations on Sleyter, that they are the sought after decisions.

Keywords: raising of multicriterion task of choice, methods of decision-making process, binary relation of Pareto, relation on Sleyter, optimization of cut-out technological process.

Література

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. – М. : Изд-во "Наука", 1980. – 208 с.
2. Гольштейн Е.Г. Деловая система анализа многокритериальных задач / Е.Г. Гольштейн, Э.П. Борисова, М.С. Дубасов // Экономика и математические методы. – М. : Наука. – 1990. – Т. 26, вып. 4. – С. 48-52.
3. Грицюк Ю.И. Оптимізація технологічного процесу розкрою плитних деревних матеріалів на меблевих заготовках : монографія. – У 2-х кн. / Ю.И. Грицюк. – Львів : Вид. дім "Основа", 2005. – 484 с.
4. Грицюк Ю.И. Основные направления исследования проблемы оптимизации ТП изготовления мебельных заготовок из плитных древесных материалов / Ю.И. Грицюк // Науковий вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : Вид-во УкрДЛТУ. – 2002. – Вип. 1. – С. 118-121.
5. Грицюк Ю.И. Функции меты для проектирования технологического процесса изготовления мебельных заготовок из плитных древесных материалов // Науковий вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : Вид-во УкрДЛТУ. – 1999. – Вип. 9.13. – С. 53-61.
6. Гураков В.С. Методи прийняття рішень при оптимізації технологічного процесу розкрою плитних деревних матеріалів на заготовки / В.С. Гураков, Ю.И. Грицюк // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : Вид-во НЛТУ України. – 2011. – Вип. 1. – С. 353-360.
7. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение / Дж. Данциг. – М. : Изд-во "Прогресс", 1966. – 560 с.
8. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений. Примеры, задачи, кейсы / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – Изд. 2-е, [перераб. и доп.]. – М. : Изд-во "Дело", АНХ, 2008. – 664 с.
9. Казанская О.В. Методы оптимизации и теория принятия решений : учебн. пособ. / О.В. Казанская, О.К. Альсова, С.Г. Юн. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 204 с.
10. Пижурич А.А. Исследование процессов деревообработки : учебник [для студ. ВУЗов] / А.А. Пижурич, М.С. Розенблит. – М. : Изд-во "Лесн. пром-сть", 1984. – 232 с.
11. Пижурич А.А. О многокритериальной задаче раскря композиционных листовых древесных материалов / А.А. Пижурич, Г.И. Козлов // В кн.: 5 Симпозиум "Модификация древесины". – Познань, 1985. – С. 316-321.
12. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М. : Изд-во "Наука", 1982. – 243 с.
13. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений : учебник / И.Г. Черноруцкий. – СПб. : Изд-во "БХВ-Петербург", 2005. – 416 с.
14. Штойер Р.М. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения : пер. с англ. – М. : Изд-во "Радио и связь", 1992. – 504 с.