

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 371.311

Доц. В.П. Каращевський, канд. техн. наук –
НЛТУ України, м. Львів

ВПЛИВ ПОРЯДКУ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЄВИХ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ СТАТИЧНИХ МАГНІТНИХ ПОЛІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ МЕТОДОМ

Розглянуто тестову краєву задачу розрахунку статичного магнітного поля, що має точний аналітичний розв'язок як для лінійного, так і для нелінійного середовища, з метою вивчення впливу порядку інтерполяції кінцевих елементів на точність рішення задачі.

Ключові слова: потенціальне магнітне поле, магнітна характеристика, кінцевий елемент, диференціальний метод кінцевих елементів, порядок інтерполяції, тестова краєва задача.

В електромеханічному перетворювачі як джерелі магнітного поля використовують струми. Незмінні у часі струми, протікаючи у нерухомих провідниках, створюють постійне магнітне поле, яке в областях, не зайнятих ними, є потенціальним і описується рівняннями:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (2)$$

де $\bar{H}$, $\bar{B}$ – відповідно вектор напруженості магнітного поля і вектор магнітної індукції, пов'язані між собою у випадку лінійного однорідного середовища через абсолютну магнітну проникливість $\mu = \text{const}$ матеріальним рівнянням

$$\bar{B} = \mu \bar{H}. \quad (3)$$

Запроваджуючи поняття скалярного потенціалу U співвідношенням

$$\bar{H} = -\operatorname{grad} U, \quad (4)$$

що задовольняє (1), з урахуванням (2), (3) отримують рівняння Лапласа для потенціального магнітного поля

$$\Delta U = 0. \quad (5)$$

Всередині області з розподіленням постійним струмом густиною $\bar{J}$ магнітне поле є вихровим. Рівняння (1) для такого поля набуде вигляду

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}. \quad (6)$$

Рівняння (2) дає змогу подати $\bar{B}$ через векторний магнітний потенціал $\bar{A}$ співвідношенням

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}. \quad (7)$$

З урахуванням (3), (7) рівняння (6) для однорідного середовища приводять до вигляду

$$\operatorname{rot} \bar{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \Delta \bar{A} = \mu \bar{J}. \quad (8)$$

Для однозначного визначення $\bar{A}$ приймають умову

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0. \quad (9)$$

З врахуванням (9) для (8) отримуємо рівняння Пуассона

$$\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}, \quad (10)$$

яке описує вихрове магнітне поле.

У загальному випадку розрахунку магнітного поля, з врахуванням неоднорідності і нелінійності анізотропного середовища, розрахункові рівняння типу (5), (10) мають більш складний вигляд. Для визначення магнітних властивостей такого середовища рівняння (3) необхідно представити у вигляді нелінійної залежності

$$\bar{B} = \bar{B}[\bar{H}] \text{ або } \bar{H} = \bar{H}[\bar{B}], \quad (11)$$

яка називають магнітною характеристикою. Система рівнянь для розрахунку магнітного поля з врахуванням магнітної нелінійності середовища є нелінійною.

На сьогодні в областях зі складною конфігурацією граничних поверхонь, заповнених нелінійними середовищами, магнітні поля розраховують чисельними методами. Серед них найбільш перспективним є метод кінцевих елементів (МКЕ), але одним із вагомих вад МКЕ є неможливість його застосування до анізотропних середовищ через неоднозначність статичного питомого магнітного опору ν для таких середовищ, який визначається співвідношенням

$$\nu = \frac{H}{B} \quad (12)$$

Для повної реалізації можливостей МКЕ розроблено [3-5] диференціальний метод кінцевих елементів (ДМКЕ), який придатний для розрахунку магнітних полів в областях, заповнених у загальному випадку неоднорідними нелінійними анізотропними середовищами.

З метою вивчення впливу порядку інтерполяції кінцевих елементів (КЕ) на точність рішення задачі як для лінійного, так і нелінійного середовищ, було вибрано тестову красву задачу, яка має точне аналітичне рішення, щоб унеможливити вплив похибок еталонного рішення на результати оцінки.

Математичне формулювання тестової красвої задачі полягає в такому. Розглянемо нескінченний тривимірний простір, заповнений лінійним чи нелінійним ізотропним середовищем, в якому розташований нескінченно довгий і нескінченно тонкий прямолінійний провідник зі струмом I . Створюване цим струмом магнітне поле є плоско-паралельним, тобто воно ідентичне в будь-якій площині, перпендикулярній до провідника зі струмом. У кожній з цих площин силові лінії магнітного поля – це концентричні кола з центром у точці O перетину площини з провідником, тому досить розрахувати магнітне поле для будь-якої з таких площин. Модуль вектора напруженості $\bar{H}$ магнітного поля у будь-якій точці кола, проведеного у такій площині, з центром у

точці O визначається (незалежно від того, чи є розв'язувана задача лінійною чи нелінійною) за формулою

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (13)$$

де r – радіус кола. Ця обставина дає змогу розраховувати значення магнітного потенціалу (з точністю до постійної величини) у будь-якій точці довільно заданої області розрахунку магнітного поля, яка належить такій площині.

Розглянемо область розрахунку поля у вигляді квадрата (рис.) і розв'яжемо лінійну краєву задачу для цієї області за відомого (розрахованому на згаданій вище основі) розподілу векторного потенціалу на її контурі, а також нелінійну краєву задачу, вважаючи, що крива намагнічування середовища визначається рівнянням

$$H = k_1 B^2 + k_2 B, \quad (14)$$

де k_1, k_2 – відомі коефіцієнти апроксимації.

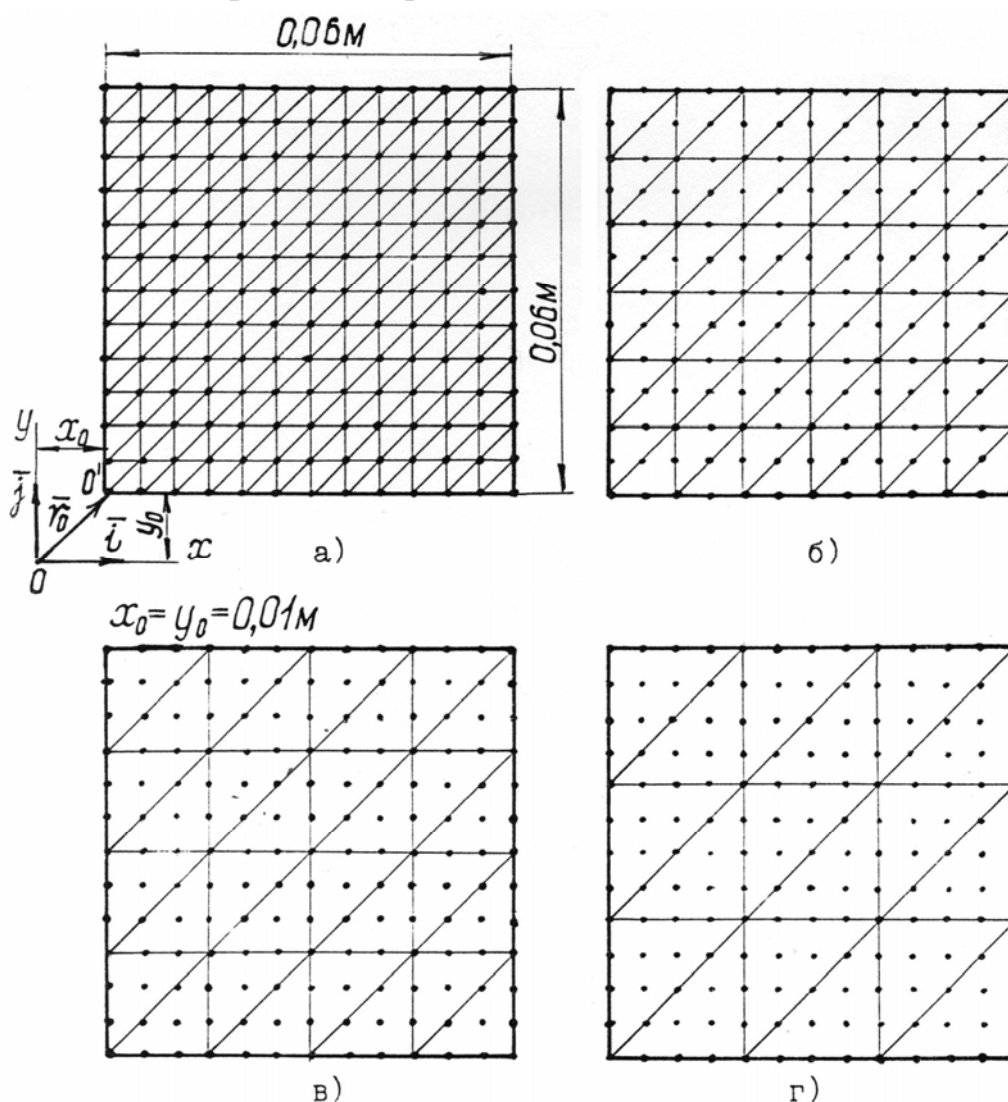


Рис. Область розрахунку тестової задачі для КЕ: а) першого порядку; б) другого порядку; в) третього порядку; г) четвертого порядку

Для лінійної тестової задачі магнітна характеристика лінійного ізотропного середовища однозначно визначається його статичною магнітною

проникливістю μ , а проекція векторного магнітного потенціалу A на пряму, перпендикулярну до площини розрахунку поля, як показано в [1], визначається виразом

$$A = \frac{\mu}{2\pi} I \ln \frac{r}{r_0}, \quad (15)$$

де: r_0 – віддаль від провідника зі струмом до заданої точки O' в площині розрахунку поля; r – віддаль від провідника зі струмом до довільної точки в площині розрахунку поля; I – струм у провіднику.

Вводячи в площині розрахунку поля декартову прямокутну систему координат OXY , осі якої паралельні сторонам квадрата (рис.), і вважаючи, що точка O' розташована в найближчій до провідника вершині квадрата, можемо розрахувати за формулою (15) потенціал у будь-якій точці області розрахунку поля. Враховуючи, що

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (16)$$

і рівність

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (17)$$

згідно з (16) маємо

$$B_x = \frac{\mu}{2\pi} I \frac{y}{r^2}; \quad B_y = -\frac{\mu}{2\pi} I \frac{x}{r^2}. \quad (18)$$

Для нелінійної тестової задачі згідно з (14) знаходимо

$$B = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - 4k_1H}}{2k_1}. \quad (19)$$

Враховуючи, що

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (20)$$

і формули (16), (17) знаходимо, що

$$\frac{\partial A}{\partial r} = B. \quad (21)$$

Підставивши (19) в (21) з врахуванням (13) після виконання інтегрування отримуємо формулу

$$A = \frac{K}{2k_1} \left(\frac{1}{t+k_2} - \frac{1}{t_0+k_2} + \frac{1}{10} \ln \left(\frac{(t+k_2)(t_0-k_2)}{(t-k_2)(t_0-k_2)} \right) \right), \quad (22)$$

де $K = \frac{4k_1 I}{2\pi}$; $t_0 = \sqrt{k_2^2 + \frac{K}{r_0}}$; $t = \sqrt{k_2^2 + \frac{K}{r}}$; $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$.

Сформульована тестова краєва задача для лінійного і нелінійного середовищ розв'язувалась ДМКЕ із застосуванням КЕ 1-го, 2-го, 3-го, 4-го порядків за однакою густини сітки (кількості вузлів в області розрахунку поля). З цією метою на область розрахунку поля була нанесена квадратна сітка,

яка містить $R=121$ внутрішніх і $G=48$ граничних вузлів, і була виконана триангуляція цієї області, як показано на рис. Розміри області і її положення відносно провідника зі струмом показано на рис. а. Кількість M КЕ за названих порядків інтерполяції дорівнює відповідно $M=288, 72, 32, 18$. Розрахунок магнітного поля виконувався за струму $I=10^3 \text{ A}$. Значення векторного магнітного потенціалу в граничних вузлах обчислювались відповідно за формулами (15), (22).

За складеною на базі ДМКЕ програмою розрахунку магнітного поля обчислювались: значення потенціалу A у всіх внутрішніх вузлах області; значення проекцій B_x, B_y вектора $\vec{B}$ у кожному з вузлів кожного КЕ шляхом чисельного диференціювання потенціалу A згідно з інтерполяційними формулами [2], які відповідають розглядуваному порядку n інтерполяції; значення модуля B вектора $\vec{B}$ за формулою (20) в кожному вузлі кожного КЕ; усереднене значення $B_{\text{уср}}$ модуля B у кожному внутрішньому вузлі як середнє арифметичне його значень для прилеглих до цього вузла кінцевих елементів; відносна похибка визначення усередненого значення $B_{\text{уср}}$ за формулою

$$\varepsilon = \frac{B_{\text{точн}} - B_{\text{уср}}}{B_{\text{точн}}} 100\%, \quad (23)$$

де $B_{\text{точн}}$ – точне значення B у вузлі, тобто знайдене з аналітичного розв'язку.

За результатами розрахунку складено таблицю, в якій позначено: $\varepsilon_{\text{макс}}$ – максимальне значення похибки ε у всій області розрахунку поля; $\varepsilon_{\text{ср}}$ – середнє значення похибки ε .

Табл. Результати розрахунків

Порядок інтерполяції, n	Кількість КЕ, M	Лінійна задача		Нелінійна задача	
		$\varepsilon_{\text{макс}}, \%$	$\varepsilon_{\text{ср}}, \%$	$\varepsilon_{\text{макс}}, \%$	$\varepsilon_{\text{ср}}, \%$
1	288	83	6,9	52	8,3
2	72	36,4	1,6	15,1	1,2
3	32	16,7	0,82	13,7	0,56
4	18	27	1,1	6,7	0,64

Зі збільшенням порядку n інтерполяції від $n=1$ до $n=2$ максимальна похибка $\varepsilon_{\text{макс}}$ визначення магнітої індукції знижується істотно: у лінійній задачі у $83/36,4 = 2,28$ рази, а в нелінійній – у $52/15,1 = 3,44$ рази.

Збільшення порядку інтерполяції від $n=2$ до $n=3$ призводить лише до незначного зниження похибки (відповідно у $36,4/16,7 = 2,18$ і $15,1/13,7 = 1,1$ рази), а подальше збільшення порядку інтерполяції призводить навіть до підвищення похибки.

Аналогічні результати було одержано і для інших краєвих задач. Це дає змогу констатувати, що зазначена на основі таблиці тенденція відображає об'єктивну закономірність.

На підставі зазначеного можна стверджувати, що застосування КЕ другого порядку в ДМКЕ є ефективнішим порівняно із застосуванням КЕ першого порядку. У розв'язуванні задач розрахунку статичних потенціальних магнітних полів потрібно віддавати перевагу КЕ другого порядку.

Для вирішення питання про доцільність застосування КЕ третього порядку поки що немає переконливих підстав: у деяких з розв'язаних задач похибка розрахунку магнітного поля із застосуванням КЕ третього порядку виявлялася не нижчою, а трохи вищою, ніж за $n=2$.

Застосування КЕ четвертого порядку, як показали численні розрахунки, є недоцільним, оскільки в більшості випадків дає похибку вищу, ніж застосування КЕ третього порядку.

Література

1. Бинс К. Анализ и расчет электрических и магнитных полей / К. Бинс, П. Лауренсон. – М. : Изд-во "Энергия", 1970. – 375 с.

2. Карашецкий В.П. Кубатурные формулы для определения энергетического функционала при расчете двумерного магнитного поля методом конечных элементов / В.П. Карашецкий // Теоретическая электротехника : респ. межвед. науч.-техн. сб. – Львов : Вид-во "Вища шк." Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – Вып. 44. – С. 17-20.

3. Фильц Р.В. Дифференциальный метод конечных элементов расчета потенциальных магнитных полей в нелинейных анизотропных средах / Р.В. Фильц, В.П. Карашецкий, Д.П. Гречин // Машинные методы решения краевых задач : тезисы докладов научн.-техн. семинара. – М.-Рига, 1985. – С. 26.

4. Фильц Р.В. Расчёт двумерных магнитных полей в нелинейных анизотропных средах методом конечных элементов третьего порядка / Р.В. Фильц, В.П. Карашецкий, Д.П. Гречин // Теоретическая электротехника : респ. межвед. науч.-техн. сб. – Львов : Вид-во "Вища шк." Изд-во при Львов. ун-те, 1985. – Вып. 38. – С. 84-91.

5. Фильц Р.В. Расчёт плоскопараллельного магнитного поля в нелинейных средах методом конечных элементов второго порядка / Р.В. Фильц, В.П. Карашецкий, Д.П. Гречин // Математические методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып. 23. – С. 102-107.

Карашецкий В.П. Влияние порядка интерполяции конечных элементов на точность решения краевых задач расчета статических магнитных полей дифференциальным методом конечных элементов

Рассмотрена тестовая краевая задача расчета статического магнитного поля, которое имеет точное аналитическое решение как для линейной, так и для нелинейной среды, с целью изучения влияния порядка интерполяции конечных элементов на точность решения задачи.

Ключевые слова: потенциальное магнитное поле, магнитная характеристика, конечный элемент, дифференциальный метод конечных элементов, порядок интерполяции, тестовая краевая задача.

Karashetsky V.P. Influence of the interpolation of finite element solutions to land problems of accuracy of calculation of static magnetic fields of the differential method finite element

The problems of calculating the test land statistic magnetic field, which is the exact analytical solution for linear and nonlinear for the environment, to study the influence of the finite element interpolation on the accuracy of solving the problem are considered.

Keywords: potential magnetic field, magnetic characteristic, finite element, differential finite element method, order of interpolation, testing boundary problem.

УДК 65.012.12: 658.0

Доц. Н.Г. Міценко, канд. екон. наук;
магістр У.Р. Кіндрат – Львівська КА

РЕСУРСНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА

Доведено необхідність обґрунтування виробничої програми підприємства. Розглянуто послідовність процесу планування виробничої програми. Запропоновано