

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 621.3.018.1

Доц. Ю.М. Романишин¹, д-р техн. наук;
проф. В.А. Павлиш¹, канд. техн. наук; доц. Р.О. Корж¹,
канд. техн. наук; Ю.Р. Кохалевич², С.Р. Пукіш¹

ПРЕДСТАВЛЕННЯ МОДЕЛІ ФІТЦХ'Ю-НАГУМО НЕЙРОНА РЯДОМ ВОЛЬТЕРА

Розглянуто представлення моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона рядом Вольтера та особливості обчислення ядер Вольтера для цієї моделі нейрона. Отримано системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь для спектрів ядер Вольтера та їх розв'язки. Для реалізації оберненого перетворення Фур'є використано пакет прикладних програм Symbolic Math Toolbox системи MATLAB. Наведено графіки модуля спектра та ядра першого порядку ряду Вольтера.

Ключові слова: нейрон, модель ФітцХ'ю-Нагумо, ряд Вольтера, спектр.

Вступ. Модель ФітцХ'ю-Нагумо нейрона [1], на відміну від системи чотирьох звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку моделі Ходжкіна-Хакслі, – це аналогічна система двох диференціальних рівнянь першого порядку (одне з яких є нелінійним) у формі Коші і є істотним спрощенням моделі Ходжкіна-Хакслі, однак зберігає основну властивість нейрона – повернення у початковий стан після формування нейроімпульсу (чи серії імпульсів) внаслідок дії зовнішнього сигналу. Внаслідок цієї модифікації при використанні моделі значно спрощується математичний аналіз та числове дослідження біонейронних структур за великої кількості нейронів. Одним з методів побудови математичних моделей нелінійних динамічних об'єктів є їх представлення у вигляді рядів Вольтера, ядра яких можна вважати узагальненням імпульсної характеристики лінійних систем на нелінійні. Особливості побудови ряду Вольтера та визначення його ядер для моделі Ходжкіна-Хакслі нейрона розглянуто в [2, 3]. Однак, незважаючи на доцільність такого представлення моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона, а також його зв'язок з нейромережевими структурами, представлення моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона рядом Вольтера не досліджувалося, що зумовлює актуальність цього дослідження.

Метою роботи є аналіз особливостей представлення моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона у вигляді ряду Вольтера, обчислення ядер ряду, зокрема, ядра першого порядку в спектральному та часовому виглядах, можливостей спрощення моделі на основі такого представлення.

Постановка задачі представлення моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона рядом Вольтера. Розроблений у [2] та використаний у [3] метод представлення моделі Ходжкіна-Хакслі нейрона рядом Вольтера є досить універсальним і може бути застосований також, з відповідними модифікаціями, і для побудови

¹ НУ "Львівська політехніка";

² Львівський ДІНТіУ ім. В. Чорновола

ряду Вольтера для моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона. Варіант моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона, наведений у [1], представимо, за аналогією з [2, 3], у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} - f_1(y_1, y_2) &= x_1(t); \quad \frac{dy_2}{dt} - f_2(y_1, y_2) = x_2(t); \\ f_1(y_1, y_2) &= \frac{1}{e} [y_1(y_1 + c)(d - y_1) - ay_2]; \quad f_2(y_1, y_2) = y_1 - qy_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де: $x_1(t) = bx(t)$; $x(t)$ – густина зовнішнього струму активації нейрона, $\text{мкА} \times \text{см}^{-2}$; $b = 100 \text{ мВ} \times \text{см}^2 \times \text{мкА}^{-1} \times \text{мсек}^{-1}$; $y_1(t)$ – напруга на мембрані нейрона, мВ ; $x_2(t) = 0$; t – час, мсек ; $y_2(t)$ – внутрішня функція часу та напруги на мембрані, $\text{мВ} \times \text{мсек}$; $e = 0.01 \text{ мВ}^2 \times \text{мсек}$; $c = -0.1 \text{ мВ}$; $d = 1 \text{ мВ}$; $a = 1 \text{ мВ}^2 \times \text{мсек}^{-1}$; $q = 0.5 \text{ мсек}^{-1}$.

Шукаємо представлення функцій $y_k(t)$ через вхідні сигнали $x_k(t)$ у вигляді таких рядів Вольтера:

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_{k1}(\tau) x_k(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k2}(\tau_1, \tau_2) x_k(t - \tau_1) x_k(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_k(t - \tau_1) x_k(t - \tau_2) x_k(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

де $g_{k1}(\tau)$; $g_{k2}(\tau_1, \tau_2)$; $g_{k3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ – ядра ряду Вольтера для k -ї змінної відповідного порядку; $k = 1, 2$.

Визначення ядер ряду Вольтера. Визначення ядер Вольтера зручніше виконувати в частотній області [2]. Здійснимо інтегральне перетворення Фур'є ряду Вольтера:

$$\begin{aligned} Y_k(\omega) &= G_{k1}(\omega) S(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k2}(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{k3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 dt + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

де: $Y_k(\omega)$ – спектри функцій $y_k(t)$; $G_{ki}(\omega)$ – спектри ядер g_{ki} ; $S(\omega)$ – спектр функції $x_1(t)$.

Можна показати (змінюючи порядок інтегрування, за формулою спектра добутку двох сигналів та спектра сигналу, зміщеного у часі), що це перетворення набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} Y_k(\omega) &= G_{k1}(\omega) S(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_1) S(\omega_1) G_{k2}(\omega - \omega_1, \omega_1) d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_1) S(\omega_1 - \omega_2) S(\omega_2) G_{k3}(\omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \omega_2) d\omega_2 d\omega_1 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Особливістю моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона є поліноміальний характер функцій f_1 і f_2 (зокрема, функція f_1 є поліномом третього степеня щодо y_1 , а функція f_2 є лінійною), тому немає потреби розкладати ці функції у крат-

ні ряди Маклорена, як це було зроблено в [2, 3]. Однак з точки зору використання результатів, отриманих в [2, 3], доцільно використати представлення розкладами в ряди Маклорена функцій f_1 і f_2 загального виду, однак зі скінченною кількістю складових (очевидно, що $f_k(0,0) = 0$):

$$f_k(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \Big|_{(0,0)} y_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(0,0)} y_i y_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^2 \frac{\partial^3 f_k}{\partial y_i \partial y_j \partial y_p} \Big|_{(0,0)} y_i y_j y_p. \quad (5)$$

Очевидно, що:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \Big|_{(0,0)} &= \frac{cd}{e} = -10; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \Big|_{(0,0)} = -\frac{a}{e} = -100; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \Big|_{(0,0)} = 1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \Big|_{(0,0)} &= -q = -0.5; \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} \Big|_{(0,0)} = \frac{2(d-c)}{e} = 220; \quad \frac{\partial^3 f_1}{\partial y_1^3} \Big|_{(0,0)} = -\frac{6}{e} = -600. \end{aligned} \quad (6)$$

Всі інші похідні дорівнюють нулю.

Здійснимо перетворення Фур'є системи рівнянь (1) з урахуванням співвідношення (5)

$$\begin{aligned} j\omega Y_k &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} Y_i(\omega) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} \int_{-\infty}^{\infty} Y_i(\omega - \omega_1) Y_j(\omega_1) d\omega_1 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^2 \frac{\partial^3 f_k}{\partial y_i \partial y_j \partial y_p} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y_i(\omega - \omega_1) Y_j(\omega_1 - \omega_2) Y_p(\omega_2) d\omega_2 d\omega_1 + \delta_{kl} S(\omega), \end{aligned} \quad (7)$$

де δ_{kl} – символ Кронекера.

Після підставлення виразу (4) у вираз (7) отримаємо рівняння, які пов'язують спектр вхідного сигналу $S(\omega)$, спектри ядер ряду Вольтера $G_{ki}(\omega)$, частинні похідні функцій f_k по y_i та інтеграли послідовних кратностей, що містять ці спектри. Оскільки ці рівняння повинні бути справедливими для будь-яких функцій $S(\omega)$, рівняння для визначення спектрів ядер $G_{ki}(\omega)$ можуть бути отримані прирівнюванням відповідних виразів до 0.

З прирівнювання коефіцієнтів при $S(\omega)$ до 0 отримаємо:

$$j\omega G_{kl}(\omega) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} G_{il}(\omega) + \delta_{kl}; \quad k = \overline{1,2}. \quad (8)$$

Це система двох лінійних рівнянь з двома невідомими спектрами ядер першого порядку. Для моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона ця система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} \left(j\omega - \frac{cd}{e} \right) G_{11}(\omega) + \frac{a}{e} G_{21}(\omega) = 1 \\ -G_{11}(\omega) + (j\omega + q) G_{21}(\omega) = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Розв'язки цієї системи рівнянь:

$$G_{11}(\omega) = \frac{j\omega + q}{\left(j\omega - \frac{cd}{e}\right)(j\omega + q) + \frac{a}{e}}; \quad G_{21}(\omega) = \frac{1}{\left(j\omega - \frac{cd}{e}\right)(j\omega + q) + \frac{a}{e}}. \quad (10)$$

Внаслідок величини $G_{kl}(\omega)$ представляються дробово-раціональними виразами відносно $j\omega$, знаменники виразів є поліномом другого степеня, чисельник $G_{11}(\omega)$ – поліномом першого степеня, а чисельник $G_{21}(\omega)$ – сталою. Модуль $G_{11}(\omega)$ (спектр ядра першого порядку g_{11}) зображено на рис. а. Обернене перетворення спектра реалізується у символічному вигляді з використанням пакету прикладних програм Symbolic Math Toolbox системи MATLAB. На рис. б зображено графік ядра першого порядку g_{11} , обчисленого на основі отриманого виразу. Ці характеристики якісно збігаються з відповідними графіками для ядра першого порядку ряду Вольтера моделі Ходжкіна-Хакслі [3], хоча й відрізняються числовими параметрами, оскільки в обох моделях використовується різне нормування. Отримані графіки на рис. для модуля спектра ядра першого порядку та самого ядра, як і ядра першого порядку для моделі Ходжкіна-Хакслі, близькі за характером до частотної та імпульсної характеристик енергетичної моделі нейрона, отриманих у [4].

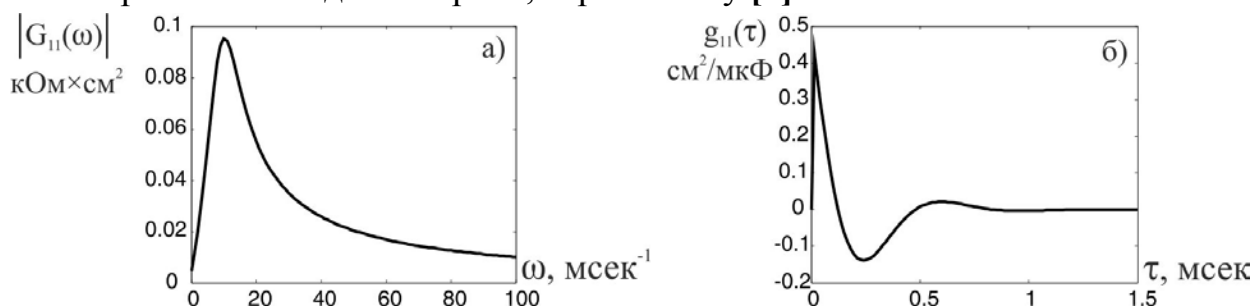


Рис. Модуль спектра та ядра першого порядку ряду Вольтера

З прирівнювання коефіцієнтів при $S(\omega - \omega_1)S(\omega_1)$ в інтегралах $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_1)S(\omega_1) \dots d\omega_1$ до 0 отримаємо:

$$j\omega G_{k2}(\omega - \omega_1, \omega_1) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} G_{i2}(\omega - \omega_1, \omega_1) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} G_{i1}(\omega - \omega_1) G_{j1}(\omega_1), k = \overline{1; 2}. \quad (11)$$

Ця система рівнянь може бути приведена до вигляду

$$j(\omega_1 + \omega_2) G_{k2}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} G_{i2}(\omega_1, \omega_2) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} G_{i1}(\omega_1) G_{j1}(\omega_2). \quad (12)$$

Аналогічно попередньому, для спектрів ядер другого порядку отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею такої самої структури, що й для ядер першого порядку. Для моделі ФітцХ'ю-Нагумо нейрона ця система рівнянь набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} \left(j(\omega_1 + \omega_2) - \frac{cd}{e}\right) G_{12}(\omega_1, \omega_2) + \frac{a}{e} G_{22}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d-c}{e} G_{11}(\omega_1) G_{11}(\omega_2) \\ -G_{12}(\omega_1, \omega_2) + (j(\omega_1 + \omega_2) + q) G_{22}(\omega_1, \omega_2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язки системи:

$$G_{12}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\frac{d-c}{e}(j(\omega_1 + \omega_2) + q)G_{11}(\omega_1)G_{11}(\omega_2)}{\left(j(\omega_1 + \omega_2) - \frac{cd}{e}\right)(j(\omega_1 + \omega_2) + q) + \frac{a}{e}}; \quad (14)$$

$$G_{22}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\frac{d-c}{e}G_{11}(\omega_1)G_{11}(\omega_2)}{\left(j(\omega_1 + \omega_2) - \frac{cd}{e}\right)(j(\omega_1 + \omega_2) + q) + \frac{a}{e}}. \quad (15)$$

З прирівнювання подвійних інтегралів та справедливості цієї рівності при довільній функції $S(\omega)$ отримаємо умову:

$$\begin{aligned} j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)G_{k3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_i} G_{i3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} G_{ij}(\omega_1)G_{j2}(\omega_2, \omega_3) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_i \partial y_j} G_{j1}(\omega_3)G_{i2}(\omega_1, \omega_2) + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{p=1}^2 \frac{\partial^3 f_k}{\partial y_i \partial y_j \partial y_p} G_{ij}(\omega_1)G_{jp}(\omega_2)G_{p1}(\omega_3). \end{aligned} \quad (16)$$

Звідси для моделі ФітцХ'ю-Нагумо отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\left(j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - \frac{cd}{e}\right)G_{13}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \frac{a}{e}G_{23}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \\ &= \frac{d-c}{e}(G_{11}(\omega_1)G_{12}(\omega_2, \omega_3) + G_{11}(\omega_3)G_{12}(\omega_1, \omega_2)) - \frac{1}{e}G_{11}(\omega_1)G_{11}(\omega_2)G_{11}(\omega_3); \\ &-G_{13}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + (j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + q)G_{23}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язок цієї системи:

$$\begin{aligned} G_{23}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= [(d-c)G_{11}(\omega_1)G_{12}(\omega_2, \omega_3) + (d-c)G_{11}(\omega_3)G_{12}(\omega_1, \omega_2) - \\ &- G_{11}(\omega_1)G_{11}(\omega_2)G_{11}(\omega_3)] / [ej(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)[j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + q] - \\ &- cd[j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + q] + a]; \\ G_{13}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= G_{23}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)[j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + q]. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогічним чином, хоча й значно складнішими перетвореннями, можна отримати системи алгебраїчних рівнянь для ядер Вольтера вищих порядків.

Висновки. Моделі нелінійних систем у вигляді рядів Вольтера, які є узагальненням інтегралу згортки для лінійних систем, дають змогу виразити вихідний сигнал через вхідний у вигляді складових, що відповідають лінійній частині та нелінійним вищих порядків. Модель ФітцХ'ю-Нагумо нейрона – це система двох диференціальних рівнянь першого порядку (одне з яких є нелінійним), які пов'язують вхідний сигнал (густина струму), вихідний сигнал (напруга на мембрані), внутрішню змінну та параметри моделі. Для усунення внутрішньої змінної можна застосувати зведення моделі до представлення у вигляді ряду Вольтера, ядра якого є узагальненням імпульсної характеристики

лінійної системи для нелінійних систем. Використання цієї моделі, незважаючи на складність рядів Вольтера, дає змогу розглядати різні наближення моделі нейрона – лінійну, нелінійні моделі різних порядків. Обчислення спектрів ядер Вольтера зводиться до розв'язування однотипних систем двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими.

Література

1. Gerstner W. Spiking Neuron Models. Single Neurons, Populations, Plasticity / W. Gerstner, W.M. Kistler. – Cambridge University Press, 2002. – 5,26 MB.
2. Kistler W. Reduction of the Hodgkin-Huxley Equations to a Single-Variable Threshold Model / W. Kistler, W. Gerstner, J. Leo van Hemmen // Neural Computation 9(5). – PP. 1015-1045.
3. Романишин Ю.М. Ряд Вольтера для моделі Ходжкіна-Хакслі нейрона / Ю.М. Романишин, Ю.Р. Кохалевич, С.Р. Пукіш // Моделювання та інформаційні технології : зб. наук. праць Ін-ту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – К., 2010. – Вип. 56. – С. 156-163.
4. Смердов А.А. Электрическая модель нейрона при одиночном возбуждении / А.А. Смердов, Ю.М. Романишин // Вопросы кибернетики: биомедицинформатика и ее приложения. – М. : Изд-во АН СССР. – 1988. – С. 168-174.

Романишин Ю.М., Павлыш В.А., Корж Р.О., Кохалевич Ю.Р., Пукиш С.Р.

Представление модели ФитцХью-Нагумо нейрона рядом Вольтерра

Рассмотрено представление модели ФитцХью-Нагумо нейрона рядом Вольтерра и особенности вычисления ядер Вольтерра для этой модели нейрона. Получены системы двух линейных алгебраических уравнений для спектров ядер Вольтерра и их решения. Для реализации обратного преобразования Фурье использован пакет прикладных программ Symbolic Math Toolbox системы MATLAB. Приведены графики модуля спектра и ядра первого порядка ряда Вольтерра.

Ключевые слова: нейрон, модель ФитцХью-Нагумо, ряд Вольтерра, спектр.

Romanyshyn Yu.M., Pavlysh V.A., Korzh R.O., Kokchalevych Yu.R., Pukish S.R. Representation of FitzHugh-Nagumo model of neuron by Volterra series

The representation of FitzHugh-Nagumo neuron model by Volterra series and features of calculation of Volterra kernels for this neuron model are considered. The systems of two linear algebraic equations for spectra of Volterra kernels and their solutions are obtained. Symbolic Math Toolbox of MATLAB system for inverse Fourier transforms is used. Diagrams of spectrum module and first order kernel of Volterra series are given.

Keywords: neuron, FitzHugh-Nagumo model, Volterra series, spectrum.

УДК 669.14.018.025

*Проф. З.А. Дурягіна, д-р техн. наук;
проф. Р.О. Ткаченко, д-р техн. наук; інж. О.Р. Ткаченко;
аспір. Н.В. Щербовських – НУ "Львівська політехніка"*

ОЦІНЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНІ ПРОГРАМНИМИ ЗАСОБАМИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Виконано оцінювання відсутніх характеристик мікротвердості та термо-е.р.с. поверхні сталі після лазерного легування ніобієм та азотом методом заповнення пропусків із використанням нейромережних засобів. Обчислено похибки передбачених даних для відомих тестових значень.

Ключові слова: лазерне легування, мікротвердість, термо-е.р.с., штучний інтелект.