

ВИЗНАЧЕННЯ КОРОТКОЧАСНОЇ МІЦНОСТІ ДЕРЕВИНИ З ДВОВІСНИМ НАПРУЖЕНИМ СТАНОМ

Отримано критеріальні співвідношення для визначення короткочасної міцності деревини з однорідним двовісним напруженим станом у радіально-тангентальній площині структурної симетрії. Розроблено алгоритм побудови кривих міцності та проаналізовано результати його апробації.

Мета та актуальність задачі. Метою публікації є визначення короткочасної міцності деревини зі сталими рівномірно-розподіленими полями вологи і температури та плоским і двовісним однорідними напруженими станами у поперечному перерізі тангентальної дошки. Ці часткові випадки мають важливе значення для технології гідротермічного оброблення пиломатеріалів. З огляду на [1], у висушуваних конвективним способом пиломатеріалах поля напружень характеризуються тензором напружень, значення двох нормальних компонентів якого значно перевищують значення третьої нормальної компоненти. Відмінними від нуля вважають напруження вздовж ширини та товщини дошки [1]. Тому, зважаючи на зазначене та на складність розрахунку граничного об'ємного напруженого стану деревини, обмежимося пошуком розв'язків задачі, сформульованої на початку абзацу.

Математична постановка задачі та побудова критерію. Компоненти тензора міцності $\tilde{\sigma}_{ij}^{np}$ для деревини зі сталими рівномірно-розподіленими полями вологи і температури визначимо з критеріального рівняння [2], яке у плоскій постановці задачі має вигляд

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \tilde{\sigma}_{ij}^{np} \tilde{\varepsilon}_{ij} + (\tilde{J} - 1) TS_{n,m} - T \Delta \tilde{\sigma} = 0. \quad (1)$$

Для цього доповнимо (1) законом Гука для малостисливих матеріалів та співвідношенням зв'язку відносної об'ємної деформації $\tilde{J} - 1$ з компонентами $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ тензора деформацій [3]:

$$\tilde{J} - 1 = \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{E_{11}} \tilde{\sigma}_{11}^{np} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}} \tilde{\sigma}_{22}^{np}; \\ \tilde{\varepsilon}_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \tilde{\sigma}_{11}^{np} + \frac{1}{E_{22}} \tilde{\sigma}_{22}^{np}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12} = \frac{\tilde{\sigma}_{12}^{np}}{G_{12}}; \tilde{\sigma}_{33}^{np} = \tilde{\sigma}_{13}^{np} = \tilde{\sigma}_{23}^{np} = 0; \\ \tilde{\varepsilon}_{33} = \tilde{\varepsilon}_{23} = \tilde{\varepsilon}_{31} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тоді, підставивши (2) – (3) у (1), отримаємо

$$A\tilde{\sigma}_{11}^{np2} + 2B\tilde{\sigma}_{11}^{np}\tilde{\sigma}_{22}^{np} + C\tilde{\sigma}_{22}^{np2} + 2D\tilde{\sigma}_{11}^{np} + 2E\tilde{\sigma}_{22}^{np} + K\tilde{\sigma}_{12}^{np2} = T\Delta\tilde{S}, \quad (4)$$

де символами А, В, С, D, Е і К позначено коефіцієнти, які визначають за формулами:

$$2B = \begin{cases} TS_{н.м.} \frac{1 + \nu_{12}^p \nu_{21}^p}{E_{1p} E_{2p}} - \left(\frac{\nu_{12}^p}{E_{1p}} + \frac{\nu_{21}^p}{E_{2p}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0 \text{ і } \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0; \\ TS_{н.м.} \frac{1 + \nu_{12}^p \nu_{21}^c}{E_{1p} E_{2c}} - \left(\frac{\nu_{12}^p}{E_{1p}} + \frac{\nu_{21}^c}{E_{2c}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0 \text{ і } \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0; \\ TS_{н.м.} \frac{1 + \nu_{12}^c \nu_{21}^p}{E_{1c} E_{2p}} - \left(\frac{\nu_{12}^c}{E_{1c}} + \frac{\nu_{21}^p}{E_{2p}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0 \text{ і } \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0; \\ TS_{н.м.} \frac{1 + \nu_{12}^c \nu_{21}^c}{E_{1c} E_{2c}} - \left(\frac{\nu_{12}^c}{E_{1c}} + \frac{\nu_{21}^c}{E_{2c}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0 \text{ і } \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$A = \begin{cases} \frac{1}{E_{1p}} \left(1 - \nu_{12}^p \frac{TS_{н.м.}}{E_{1p}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0; \\ \frac{1}{E_{1c}} \left(1 - \nu_{12}^c \frac{TS_{н.м.}}{E_{1c}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0, \end{cases} \quad C = \begin{cases} \frac{1}{E_{2p}} \left(1 - \nu_{21}^p \frac{TS_{н.м.}}{E_{2p}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0; \\ \frac{1}{E_{2c}} \left(1 - \nu_{21}^c \frac{TS_{н.м.}}{E_{2c}} \right), & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0, \end{cases}$$

$$2D = \begin{cases} \left(1 - \nu_{12}^p \right) \frac{TS_{н.м.}}{E_{1p}}, & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0; \\ \left(1 - \nu_{12}^c \right) \frac{TS_{н.м.}}{E_{1c}}, & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0, \end{cases} \quad 2E = \begin{cases} \left(1 - \nu_{21}^p \right) \frac{TS_{н.м.}}{E_{2p}}, & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0; \\ \left(1 - \nu_{21}^c \right) \frac{TS_{н.м.}}{E_{2c}}, & \text{якщо } \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0, \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{G_{12}} \left(1 - \frac{TS_{н.т.}}{G_{12}} \right).$$

Тут ν_{ij}^c , ν_{ij}^p , E_{ip} , E_{ic} – коефіцієнти Пуассона та модулі пружності матеріалу. – Випробовуваного на одновісний стиск (розтяг) вздовж радіального та тангентального напрямків ортотропії; $S_{н.м.}$ – густина ентропії недеформованого матеріалу; $\Delta\tilde{S}$ – різниця густин ентропій матеріалу у граничному та недеформованому станах; Т – термодинамічна температура.

Отже, у системі координат напружень $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ – $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ – $\tilde{\sigma}_{12}^{np}$ короточасну міцність деревини з плоским напружено-деформівним станом у тангентально-радіальній площині структурної симетрії визначають поліноміальними рівняннями (4). Ці рівняння різняться між собою значеннями коефіцієнтів при невідомих. Кожне з них характеризує граничний напружений стан матеріалу відповідно в одному із восьми октантів у вибраній системі координат.

Алгоритм побудови кривих міцності та аналіз результатів його реалізації. Задача побудови кривих короточасної міцності для деревини з двовісним

напруженим станом ($\sigma_{12} = 0$) рівносильна задачі визначення множини розв'язків нелінійного рівняння (4). Для її вирішення розроблено алгоритм, реалізація якого передбачає виконання таких кроків:

1) табулювання функції двох змінних

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np}) = A\tilde{\sigma}_{11}^{np2} + 2B\tilde{\sigma}_{11}^{np}\tilde{\sigma}_{22}^{np} + C\tilde{\sigma}_{22}^{np2} + 2D\tilde{\sigma}_{11}^{np} + 2E\tilde{\sigma}_{22}^{np} - T\Delta\tilde{S} \quad (6)$$

з кроками табулювання $\Delta\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ та $\Delta\tilde{\sigma}_{22}^{np}$;

2) знаходження для фіксованих значень $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ таких значень аргументу $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$, для яких виконуються умови:

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np}) > 0, \text{ а } f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np} + \Delta\tilde{\sigma}_{22}^{np}) < 0, \quad (7)$$

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np}) < 0, \text{ а } f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np} + \Delta\tilde{\sigma}_{22}^{np}) > 0; \quad (8)$$

3) вибір з пари чисел $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ та $\tilde{\sigma}_{22}^{np} + \Delta\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ такого числа, для якого абсолютне значення функції $f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$ є мінімальним;

4) побудова кривих текучості за знайденими координатами точок $(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$.

Цей алгоритм реалізований у вигляді програмного коду у Visual Basic for Application (VBA).

Для верифікації розробленого програмного забезпечення виконано числовий експеримент на прикладі побудови кривих короточасної міцності для сосни ($\nu_{rt} = 0,38; \nu_{tt} = 0,79; E_{rp} = 540 \text{ МПа}; E_{rc} = 670 \text{ МПа}; E_{tp} = 470 \text{ МПа}; E_{tc} = 550 \text{ МПа}$) з температурою $T = 20^\circ \text{C}$ та відносною вологістю $W = 12\%$ з двовісним напруженим станом у тангентально-радіальній площині анізотропії.

Згідно з викладеним алгоритмом, поставлену задачу вирішуємо у такій послідовності:

1) на першому етапі виконання розробленої програми за формулами (5) розраховуємо значення сталих А, В, С, D функції $f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$. Результати розрахунку наведено у табл. 1;

Табл. 1. Результати розрахунку сталих А, В, С, D, E

Характер напруженого стану	A	2B	C	2D	2E
$\tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0; \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0$	0,00197	-0,0022	0,0018	0,0055	0,0055
$\tilde{\sigma}_{11}^{np} > 0; \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0$	0,00197	-0,0021	0,0018	0,0055	0,0055
$\tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0; \tilde{\sigma}_{22}^{np} > 0$	0,00157	-0,0019	0,0021	0,0044	0,0044
$\tilde{\sigma}_{11}^{np} < 0; \tilde{\sigma}_{22}^{np} < 0$	0,00157	-0,0018	0,0021	0,0044	0,0044

2) на другому етапі розрахунку задаємо значення величин $S_{нт}$ та $\Delta\tilde{S}$. Згідно з [2], у цьому випадку $S_{нт} \approx 32,3 \text{ кДж/м}^3 \text{K}$, $\Delta\tilde{S} \approx 0,2 \text{ кДж/м}^3 \text{K}$;

Табл. 2. Результати табулювання функції $100 * f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$

	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-14	5,9	4,3	3,1	2,2	1,6	1,3	1,3	1,7	2,3	3,3	4,6	6,2	8,1	10,8	14	17,5	21,5	25,8
-13	4,0	2,3	1,0	0,0	-0,8	-1,2	-1,2	-1,0	-0,5	0,4	1,5	3,0	4,8	7,4	10,4	13,8	17,6	21,8
-12	2,5	0,7	-0,7	-1,9	-2,7	-3,2	-3,4	-3,3	-2,9	-2,2	-1,1	2,2	1,9	4,4	7,3	10,5	14,2	18,2
-11	1,4	-0,5	-2,1	-3,4	-4,3	-5,0	-5,3	-5,3	-5,0	-4,4	-3,4	-2,2	-0,6	1,7	2,0	4,9	8,3	12,1
-10	0,6	-1,4	-3,1	-4,5	-5,6	-6,3	-6,7	-6,9	-6,7	-6,2	-5,4	-4,2	-2,8	-0,6	2,0	4,9	8,3	12,1
-9	0,2	-1,9	-3,8	-5,2	-6,4	-7,3	-7,9	-8,1	-8,0	-7,6	-6,9	-5,9	-4,6	-2,6	-0,1	2,7	5,9	9,6
-8	0,1	-2,1	-4,0	-5,6	-6,9	-7,9	-8,6	-9,0	-9,0	-8,7	-8,1	-7,2	-6,0	-4,1	-1,9	0,8	3,9	7,4
-7	0,5	-1,9	-3,9	-5,7	-7,1	-8,1	-9,0	-9,5	-9,6	-9,5	-9,0	-8,2	-7,1	-5,4	-3,2	-0,7	2,3	5,8
-6	1,1	-1,3	-3,5	-5,3	-6,9	-8,1	-9,0	-9,6	-9,9	-9,8	-9,5	-8,8	-7,8	-6,2	-4,2	-1,8	1,0	4,2
-5	2,2	-0,4	-2,7	-4,6	-6,3	-7,6	-8,7	-9,4	-9,8	-9,8	-9,6	-9,1	-8,2	-6,7	-4,9	-2,6	0,0	3,1
-4	3,6	0,9	-1,5	-3,6	-5,3	-6,8	-7,9	-8,8	-9,3	-9,5	-9,4	-8,9	-8,2	-6,9	-5,1	-3,0	-0,5	2,4
-3	5,4	2,6	0,00	-2,2	-4,0	-5,6	-6,9	-7,8	-8,4	-8,8	-8,8	-8,4	-7,8	-6,6	-5,1	-3,1	-0,7	2,0
-2	7,5	4,6	1,9	-0,4	-2,4	-4,1	-5,4	-6,5	-7,2	-7,7	-7,8	-7,6	-7,1	-6,0	-4,6	-2,8	-0,6	2,0
-1	10,0	7,0	4,2	1,8	-0,3	-2,1	-3,6	-4,8	-5,7	-6,2	-6,5	-6,4	-6,0	-5,1	-3,8	-2,1	-0,1	2,4
0	12,9	9,7	6,8	4,3	2,1	0,1	-1,5	-2,8	-3,7	-4,4	-4,8	-4,8	-4,5	-3,8	-2,6	-1,1	0,8	3,2
1	16,4	13,1	10,2	7,5	5,1	3,1	1,4	0,00	-1,1	-1,9	-2,4	-2,5	-2,4	-1,8	-0,8	0,6	2,4	4,6
2	20,4	17,0	13,9	11,1	8,6	6,5	4,6	3,1	1,9	1,0	0,4	0,1	0,2	0,6	1,5	2,7	4,4	6,4

3) на третьому етапі виконуємо процедуру табулювання функції $f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$ з кроками табулювання, наприклад, $\Delta\tilde{\sigma}_{11}^{np} \approx 1,0 \text{ МПа}$ та $\Delta\tilde{\sigma}_{22}^{np} \approx 1,0 \text{ МПа}$. Результати табулювання наведені у табл. 2;

4) на четвертому етапі знаходимо наближені розв'язки нелінійного рівняння

$$f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np}) = 0. \quad (9)$$

Для цього у кожному зі стовпчиків табл. 2 вибираємо такі пари значень функції $100 * f(\tilde{\sigma}_{11}^{np}, \tilde{\sigma}_{22}^{np})$, щоб складовими кожної з них були два послідовних числа з протилежними знаками (у табл. 2 вибрані пари значень функції позначено сірим кольором).

Потім із двох чисел у зазначених парах вибираємо мінімальні за абсолютними значеннями числа (у табл. 2 їх помічено жирним шрифтом) та за адресами клітинок, у яких вони знаходяться, в таблиці визначаємо наближені розв'язки $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ і $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ рівняння (9).

Адреси клітинок описують іменем першого рядка та іменем першого стовпчика таблиці, а кожне з імен визначене значеннями компонентів $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ та $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ тензора напружень;

5) на п'ятому етапі знайдені наближені розв'язки $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ і $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$ рівняння (9) заносимо у табл. 3. У перший рядок таблиці записуємо значення радіальної компоненти $\tilde{\sigma}_{11}^{np}$ напружень, а у другий та третій рядки – відповідні значення тангентальної компоненти $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$. У другому рядку виписуємо менші, а у третьому – більші значення величини $\tilde{\sigma}_{22}^{np}$;

6) на завершальному етапі вирішення задачі за даними табл. 3 будуємо графіки кривих короткочасної міцності. Їх наведено на рисунку.

Побудовані криві мають точки перетину з координатними осями. Наприклад, криві, які наведено на рис., вісь абсцис перетинають у точках А і С, а вісь ординат – у точках В і D. Координати цих точок є характеристиками короткочасної міцності деревини з одновісними напруженими станами розтягу (стиску) у головних напрямках анізотропії. Абсциси точок А і С є характеристиками короткочасної міцності деревини у радіальному напрямку анізотропії, а ординати точок В і D – у тангентальному напрямі.

Табл. 3. Значення розв'язків рівняння (9) в МПа

$\tilde{\sigma}_{11}^{np}$	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\tilde{\sigma}_{22}^{np}$	-11	-12	-13	-13	-13	-13	-13	-13	-13	-12	-11	-11	-10	-9	-7	-5
$\tilde{\sigma}_{22}^{np}$	-5	-3	-2	-1	0	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	-1

З аналізу координат точок перетину побудованих кривих з осями координат випливає, що побудований вище критерій (4-5) задовільно відображає анізот-

ропію та асиметрію короткочасної міцності деревини вздовж головних напрямків симетрії. $\sigma_r, \text{МПа}$

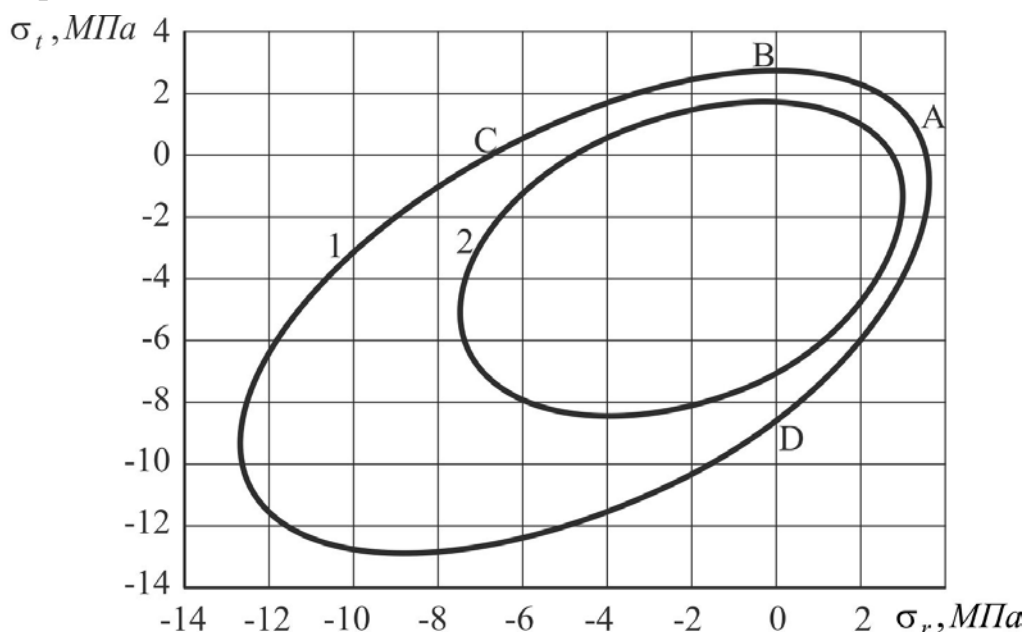


Рис. Криві короткочасної міцності деревини сосни з температурою 20 °С, відносною вологістю W та двовісним напруженим станом у радіально-тангентальній площині структурної симетрії (rt – площині): 1 – $W=12\%$; 2 – $W=18\%$

Дійсно, оскільки абсциса точки А є більшою за ординату точки В, а абсолютне значення абсциси точки С є меншим за абсолютне значення ординати точки D, то межа короткочасної міцності розтягу деревини у радіальному напрямку є більшою за межу міцності розтягу у тангентальному напрямку, а у разі стиску – навпаки: абсолютне значення межі міцності у радіальному напрямку є меншим за абсолютне значення межі міцності у тангентальному напрямку, що підтверджується результатами емпіричних досліджень [4, 5].

Висновки. З огляду на результати досліджень короткочасної міцності деревини з одновісними напруженими станами у напрямках анізотропії [4, 5], критерій (4-5) адекватно описує граничний напружений стан матеріалу у часткових випадках. Окрім цього, зазначимо, що характеристики побудованих кривих задовольняють евристичним вимогам побудови відомих феноменологічних механічних теорій текучості, пластичності та міцності твердих тіл [6]: 1) криві граничного напруженого стану (криві короткочасної міцності) повинні бути плавними та випуклими; 2) співвідношення між характеристиками кривої короткочасної міцності повинні бути такими, щоб у випадку зміни хоча б однієї константи матеріалу (модулі пружності, коефіцієнти Пуассона, тощо) нова крива повинна знаходитися всередині або зовні первинної. Обидві криві можуть мати лише декілька точок дотику, але у жодному випадку вони не повинні перетинатися. Справді, з огляду на рис., криві короткочасної міцності для деревини сосни з температурою 20 °С та відносними вологістями 12 % і 18 % є плавними випуклими кривими. Ці криві не перетинаються. Замкнена крива для деревини з вологістю 18 % знаходиться всередині замкненої кривої, побудованої для деревини з відносною вологістю 12 %.

Література

1. Уголев Б.Н. Деформативность древесины и напряжения при сушке / Б.Н. Уголев. – М. : Изд-во "Лесн. пром-сть", 1971. – 172 с.
2. Поберейко Б.П. Визначення текучості деревини та обґрунтування її асиметрії у напрямках анізотропії / Б.П. Поберейко // Наукові праці Лісівничої академії наук України : зб. наук. праць. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2009. – Вип. 7. – С. 146-151.
3. Поберейко Б.П. Синтез тепломасообменных, релаксационно-деформационных и прочностных процессов в гигроскопических материалах / Б.П. Поберейко, Я.И. Соколовский // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. научн. трудов. – Брянск (РФ) : Изд-во БГТИ, 2007. – Вып. 18. – С. 133-137.
4. Хухрянский П.Н. Прочность древесины / П.Н. Хухрянский. – М. : Гослесбумиздат, 1955. – 152 с.
5. Белянкин Ф.П. Деформативность и сопротивляемость древесины как упруговязкопластического тела / Ф.П. Белянкин, В.Ф. Яценко. – К. : Изд-во АНУССР, 1957. – 184 с.
6. Яценко В.Ф. Прочность композиционных материалов / В.Ф. Яценко. – К. : Вид-во "Выща шк." Головное Изд-во "Наука", 1988. – 191 с.

Поберейко Б.П., Дендюк М.В., Флуд Л.О. Определение кратковременной прочности древесины с двухосным напряженным состоянием

Получены критериальные соотношения для определения кратковременной прочности древесины с однородным двухосным напряженным состоянием в радиально-тангентальной плоскости структурной симметрии. Разработан алгоритм построения кривых прочности и проанализированы результаты их апробации.

Pobereyko B.P., Dendyuk M.V., Flud L.O. Determination short strength of wood with twin axis stress condition

The criterial relations for short-term strength of wood with a homogeneous fault twin axis state of tension in the radial-tangential plane structural symmetry. The algorithm for building strength curves and the analysis results of his approbation.