

## 5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 536.24

*Доц. Л.Д. Величко, канд. техн. наук; викл. С.Я. Вовк –  
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності;  
доц. А.Р. Дзюбик, канд. техн. наук – НУ "Львівська політехніка"*

### РОЗПОДІЛ СТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В БАГАТОШАРОВОМУ ЦИЛІНДРІ

Визначено стаціонарне температурне поле в багатошаровій циліндричній стінці за ідеального теплового контакту між шарами та наявності граничних умов першого і третього типів. Наведено методику використання теоретичних результатів у розв'язуванні задачі.

**Ключові слова:** температурне поле, багатошарова циліндрична стінка, граничні умови.

*Assoc. prof. L.D. Welychko; lecturer S.J. Wowk – Lviv state university of safety of vital functions; assoc. prof. A.R. Dsjubyk – Lviv Polytechnic National University*

### Distributing of the stationary temperature field is in multi-layered cylinder

In this article scientifically proved results of experimental research determination of the stationary temperature field in a multi-layered cylinder wall at an ideal thermal contact between layers and the maximum terms of the first and the third type is carried out in the article.

**Keywords:** temperature field, multi-layered cylinder wall, maximum terms.

**Постановка проблеми.** Знання розподілу температурного поля в  $n$ -шаровому порожнистому циліндрі потрібне: для визначення температурних напружень у тілі, оскільки вони можуть призвести до руйнації конструкції; для здійснення розрахунків з визначення товщини протипожежних перегородок на випадок пожеж у приміщеннях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Задачу з визначення температурного поля в багатошарових тілах переважно розв'язують методом спряження [1] або чисельними методами. Однак розв'язку цієї задачі для довільного  $n$ -шарового циліндра не досягнуто.

**Мета дослідження** – отримати розв'язок задачі теплопровідності для  $n$ -шарового циліндра за наявності ідеального теплового контакту між шарами для випадку осесиметричної задачі теплопровідності за граничних умов першого або третього типів.

**Основний матеріал.** Розглядаємо безмежну циліндричну стінку, яка складається з  $n$ -ізотропних шарів. Товщини шарів відповідно дорівнюють  $r_1 - r_0; r_2 - r_1; \dots; r_n - r_{n-1}$ . Вважаємо, що багатошаровий циліндр порожнистий, тобто  $r_0 \neq 0$ . Нехай внутрішня та зовнішня поверхні багатошарової циліндричної стінки ізотермічні поверхні та внутрішні джерела теплоти відсутні, тобто  $q_V = 0$ . Температурне поле за цих умов є функцією тільки від координати  $r - t(r)$ . Рівняння теплопровідності для  $i$ -го шару має вигляд

$$\frac{d^2 t_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt_i(r)}{dr} = 0, \quad (r_{i-1} < r < r_i; i = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Вважаємо, що між шарами існує ідеальний тепловий контакт, тобто виконуються такі умови:

$$t_i(r_i) = t_{i+1}(r_i); \quad \lambda_i \frac{dt_i(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1} \frac{dt_{i+1}(r_i)}{dr}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (2)$$

Величину узагальненого коефіцієнта теплопровідності для  $n$ -шарового циліндра визначаємо за формулою

$$\frac{\ln r_1 - \ln r_0}{\lambda_1} + \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda_2} + \dots + \frac{\ln r_n - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_n - \ln r_0}{\lambda_y}. \quad (3)$$

Приведені товщини шарів стінки, відповідно, дорівнюють:

$$\frac{\ln r_1 - \ln r_0}{\lambda_1} = \frac{\ln r_{1y} - \ln r_0}{\lambda_y}; \quad \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{\lambda_2} = \frac{\ln r_{2y} - \ln r_{1y}}{\lambda_y}; \quad \dots; \quad \frac{\ln r_n - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_{ny} - \ln r_{n-1,y}}{\lambda_y}. \quad (4)$$

Просумувавши ліві та праві частини рівнянь (4), отримаємо, що  $r_n = r_{ny}$ . Вводимо нову метрику для кожного шару циліндра

$$\frac{\ln r - \ln r_0}{\lambda_1} = \frac{\ln r_y - \ln r_0}{\lambda_y}; \quad \frac{\ln r - \ln r_1}{\lambda_2} = \frac{\ln r_y - \ln r_{1y}}{\lambda_y}; \quad \dots; \quad \frac{\ln r - \ln r_{n-1}}{\lambda_n} = \frac{\ln r_y - \ln r_{n-1,y}}{\lambda_y}. \quad (5)$$

Із співвідношень (5) отримаємо, що координата  $r_y$  для кожного шару залежить від координати  $r$  таким чином:

$$\ln r_y = \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0}; \quad \ln r_y = \ln r_{1y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1}; \quad \dots; \quad \ln r_y = \ln r_{n-1,y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_n} \ln \frac{r}{r_{n-1}}. \quad (6)$$

Диференціальні залежності між координатою  $r$  та координатою  $r_y$  на основі залежностей (5), (6) матимуть вигляд

$$dr = \frac{\lambda_1}{\lambda_y} r_0^{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_1}{\lambda_y} - 1} dr_y; \quad dr = \frac{\lambda_2}{\lambda_y} r_{1y}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_2}{\lambda_y} - 1} dr_y; \quad \dots; \quad dr = \frac{\lambda_n}{\lambda_y} r_{n-1,y}^{-\frac{\lambda_n}{\lambda_y}} r_y^{\frac{\lambda_n}{\lambda_y} - 1} dr_y. \quad (7)$$

Умови ідеального теплового контакту між шарами стінок (2), враховуючи (3)-(7), набудуть вигляду:

$$t_i(r_{iy}) = t_{i+1}(r_{iy}), \quad \frac{dt_i(r_{iy})}{dr_y} = \frac{dt_{i+1}(r_{iy})}{dr_y}; \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (8)$$

Рівняння теплопровідності (1) в приведених координатах такі:

$$\frac{d^2 t_i(r_y)}{dr_y^2} + \frac{1}{r_y} \frac{dt_i(r_y)}{dr_y} = 0, \quad (r_{i-1,y} < r_y < r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (9)$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (9) матиме вигляд:

$$t_i(r_y) = C_{1i} \ln r_y + C_{2i}, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Враховуючи умови ідеального теплового контакту між приведеними шарами (8) та рівняння (10), отримаємо, що  $C_{1i} = C_{1,i+1}$ ,  $C_{2i} = C_{2,i+1}$ ;  $(i = \overline{1, n-1})$ .

Отже, температура в приведеному багатшаровому циліндрі розподіляється за законом:

$$t_i(r_y) = C_1 \ln r_y + C_2, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (11)$$

**Гранична умова першого типу.** Нехай на внутрішній та зовнішній поверхнях багат шарової стінки задано значення температур:

$$t(r_0) = t_{m0}; \quad t(r_n) = t_{mn}. \quad (12)$$

Підставляючи рівняння (11) у граничні умови (12), отримаємо систему рівнянь для визначення сталих  $C_1$  та  $C_2$ :

$$C_1 \ln r_0 + C_2 = t_{m0}, \quad C_1 \ln r_n + C_2 = t_{mn}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, визначаємо сталі інтегрування

$$C_1 = \frac{t_{mn} - t_{m0}}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad C_2 = \frac{t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}.$$

Тепер рівняння (11) набудуть вигляду

$$t_i(r_y) = \frac{(t_{mn} - t_{m0}) \ln r_y + t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (13)$$

Використовуючи вираз (6), здійснимо перехід від приведеної координати  $r_y$  до координати  $r$ , тобто отримаємо таку залежність між ними:

$$\ln r_y = \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}}. \quad (14)$$

Отже, розподіл температурного поля в багат шаровій циліндричній стінці при ідеальних теплових контактах між шарами (2) та заданих температурах на границях тіла (12) матиме вигляд

$$t_i(r) = \frac{(t_{mn} - t_{m0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_{i-1}} \ln \frac{r_{i-1}}{r_{i-2}} + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}} \right) + t_{m0} \ln r_n - t_{mn} \ln r_0}{\ln r_n - \ln r_0}, \quad (15)$$

$$(r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Гradient температури по товщині циліндричної багат шарової сімки змінюється за законом:  $grad t_i(r) = \frac{dt_i(r)}{dr} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \frac{(t_{mn} - t_{m0})}{r(\ln r_n - \ln r_0)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i grad t_i(r) = \lambda_y \frac{t_{m0} - t_{mn}}{r(\ln r_n - \ln r_0)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка передається за час  $\tau$ , через ділянку труби довжиною  $l$ , дорівнює  $Q_l(r) = 2\pi r l q \tau = 2\pi l \tau \lambda_y \frac{t_{m0} - t_{mn}}{\ln r_n - \ln r_0}.$

**Гранична умова третього типу.** Нехай внутрішню поверхню порожнистого багат шарового циліндра омиває рідина (газ) з середньою температурою  $t_{p0}$ , а зовнішню поверхню – рідина (газ) з температурою  $t_{pn}$ . Вважаємо, що на поверхнях циліндра існує конвекційний теплообмін між рідинами (газами) та тілом

$$\lambda_1 \frac{dt_1(r_0)}{dr} = \alpha_0(t_1(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda_n \frac{dt_n(r_n)}{dr} = \alpha_n(t_n(r_n) - t_{pn}). \quad (16)$$

Граничні умови (16), враховуючи (4) і (7), в приведених координатах наберуть вигляду

$$\lambda_y \frac{dt_1(r_0)}{dr_y} = \alpha_0(t_1(r_0) - t_{p0}); \quad -\lambda_y \frac{dt_n(r_n)}{dr_y} = \alpha_n(t_n(r_n) - t_{pn}). \quad (17)$$

Підставляючи рівняння (11) в граничні умови (17), отримаємо систему рівнянь для визначення сталих  $C_1$  та  $C_2$ :

$$\left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right) C_1 - C_2 = -t_{m0}; \quad \left( \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln r_n \right) C_1 + C_2 = t_{mn}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо, що

$$C_1 = \frac{t_{pn} - t_{p0}}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad C_2 = \frac{t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln r_n \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}.$$

Температурне поле в приведеному багат шаровому циліндрі опи- суємо співвідношеннями

$$t_i(r_y) = \frac{(t_{pn} - t_{p0}) \ln r_y + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln r_n \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad (r_{i-1,y} \leq r_y \leq r_{iy}; i = \overline{1, n}). \quad (18)$$

Переходячи від приведеної координати  $r_y$  до координати  $r$  із враху- ванням (14), отримаємо, що розподіл стаціонарного температурного поля в багат шаровій циліндричній стінці за ідеальних теплових контактів між шара- ми (2) та конвекційному теплообміну на границях тіла (16) матиме вигляд

$$t_i(r) = \frac{(t_{pn} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \dots + \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \ln \frac{r}{r_{i-1}} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln r_n \right) + t_{pn} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}, \quad (19)$$

$$(r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Градiєнт температури за товщиною багат шарового циліндра змі- нюється за законом:  $grad t_i(r) = \frac{dt_i(r)}{dr} = \frac{\lambda_y}{\lambda_i} \frac{(t_{pn} - t_{p0})}{r \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0} \right)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$

Густину теплового потоку  $q$  визначаємо, використовуючи закон Фур'є

$$q = -\lambda_i grad t_i(r) = \lambda_y \frac{t_{p0} - t_{pn}}{r \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0} \right)}, \quad (r_{i-1} \leq r \leq r_i; i = \overline{1, n}).$$

Кількість теплоти  $Q$ , яка передається за час  $\tau$ , через ділянку труби довжиною  $l$ , визначаємо за формулою:

$$Q_l(r) = 2\pi r l q \tau = 2\pi l \tau \lambda_y \frac{t_{p0} - t_{pn}}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_n \alpha_n} + \ln \frac{r_n}{r_0}}.$$

**Практичне застосування.** Визначити розподіл температурного поля в чотирьохшаровій циліндричній стінці, якщо середня температура газу в середині циліндра  $t_{p0} = 800^\circ\text{C}$ , а зовні – стінка обдувається повітрям температур якого  $t_{p4} = 20^\circ\text{C}$ . Перший шар – стальна труба, розміри якої  $r_0 = 0,2\text{м}$  і  $r_1 = 0,25\text{м}$ . Другий шар – сухий пісок, розміри якого  $r_1 = 0,25\text{м}$  і  $r_2 = 0,3\text{м}$ . Третій шар виготовлено з міді, розміри якого  $r_2 = 0,3\text{м}$  і  $r_3 = 0,35\text{м}$ . Четвертий шар виготовлено із мінеральної вати, розміри якого  $r_3 = 0,35\text{м}$  і  $r_4 = 0,4\text{м}$ . Коефіцієнт тепловіддачі від газу до внутрішньої чотирьох шарової стінки  $\alpha_0 = 34,95 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ , а від мінеральної вати до повітря –  $\alpha_4 = 5,82 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$ . Між шарами існує ідеальний тепловий контакт.

Коефіцієнт теплопровідності для сталі описується законом  $\lambda_1(t) = 58 - 0,042t$  і тому теплопровідність сталі за температури  $800^\circ\text{C}$  дорівнює  $\lambda_1(800) = 58 - 0,042 \cdot 800 = 24,4 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ . Коефіцієнти теплопровідності для сухого піску  $\lambda_2 = 0,35 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ , для міді  $\lambda_3 = 345 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$  і для мінеральної вати  $\lambda_4 = 0,056 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ .

Узагальнений коефіцієнт теплопровідності для циліндричної стінки, враховуючи (4), визначаємо за формулою  $\frac{\ln \frac{r_4}{r_0}}{\lambda_y} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_2} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_3} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{\lambda_4}$ . Підставляючи дані, отримаємо

$$\frac{\ln \frac{0,4}{0,2}}{\lambda_y} = \frac{\ln \frac{0,25}{0,2}}{24,4} + \frac{\ln \frac{0,3}{0,25}}{0,35} + \frac{\ln \frac{0,35}{0,3}}{345} + \frac{\ln \frac{0,4}{0,35}}{0,056} \text{ або } \lambda_y = 0,23779 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}.$$

Розподіл температурного поля в першому шарі, враховуючи (19), такий:

$$t_1(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r}{r_0} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}}, \quad (r_0 \leq r \leq r_1).$$

Підставляючи дані, отримаємо  $t_1(r) = 753,252 - 9,166 \ln r$ ,  $(0,2 \leq r \leq 0,25)$ .

Температура на краях сталюго шару дорівнює

$$t_1(0,2) = 753,252 - 9,166 \cdot \ln 0,2 = 768^\circ\text{C} \text{ і } t_1(0,25) = 765,96^\circ\text{C}.$$

Розподіл температурного поля в другому шарі, враховуючи (19), дорівнює:

$$t_2(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r}{r_1} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}},$$

$(r_1 \leq r \leq r_2)$ . Підставляючи значення величин, отримаємо, що

$$t_2(r) = -119,889 - 639 \ln r, \quad (0,25 \leq r \leq 0,3).$$

Температура на краях шару, виконаного з піску, дорівнює

$$t_2(0,25) = -119,889 - 639 \cdot \ln 0,25 = 765,96^\circ\text{C} \quad \text{і} \quad t_2(0,3) = 649,45^\circ\text{C}.$$

Розподіл температурного поля в третьому шарі, враховуючи (19), дорівнює

$$t_3(r) = \frac{(t_{p4} - t_{p0}) \left( \ln r_0 + \frac{\lambda_y}{\lambda_1} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda_y}{\lambda_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda_y}{\lambda_3} \ln \frac{r}{r_2} \right) + t_{p0} \left( \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln r_4 \right) + t_{p4} \left( \frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} - \ln r_0 \right)}{\frac{\lambda_y}{r_0 \alpha_0} + \frac{\lambda_y}{r_4 \alpha_4} + \ln \frac{r_4}{r_0}}.$$

Підставляючи дані, отримаємо, що

$$t_3(r) = 648,674 - 0,648 \ln r, \quad (0,3 \leq r \leq 0,35).$$

Температури на краях шару, виконаного з міді, дорівнюють

$$t_3(0,3) = 648,674 - 0,648 \cdot \ln 0,3 = 649,45^\circ\text{C} \quad \text{і} \quad t_3(0,35) = 649,35^\circ\text{C}.$$

Розподіл температурного поля в четвертому шарі, враховуючи формулу (19), дорівнює

$$t_4(r) = -3543,399 - 3993,78 \ln r, \quad (0,35 \leq r \leq 0,4).$$

Температури на краях шару, виконаного з мінеральної вати, дорівнюють

$$t_4(0,35) = -3543,399 - 3993,78 \cdot \ln 0,35 = 649,35^\circ\text{C} \quad \text{і} \quad t_4(0,4) = 116,06^\circ\text{C}.$$

**Висновки.** Внаслідок виконаних досліджень отримано вирази для визначення стаціонарного температурного поля в багатошаровій циліндричній стінці за ідеального теплового контакту між шарами та наявності граничних умов першого і третього типів. Наведену методику використання теоретичних результатів у розв'язуванні задачі. Показано, що характерною особливістю досліджуваної в роботі циліндричної чотирьохшарової стінки є те, що зміна величини температури в шарі, виконаному з міді, незначна.

## Література

1. **Лыков Н.Н.** Теория теплопроводности. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1967. – 559 с.

УДК 634.31

Інж. **І.В. Бичинюк** – НЛТУ України, м. Львів

## РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДУ РОЗРАХУНКУ ЩОГЛИ ПРОМІЖНОЇ ОПОРИ

Наведено розрахункову схему опори з розтяжками. Визначено зусилля та деформації опори, розв'язано статично-невизначену задачу. Отримано залежність для визначення зусилля, що діє на щоглу та обґрунтовано її основні параметри.

*Eng. I.B. Bychynyuk* – NUFWT of Ukraine, L'viv

## Calculation method development of intermediate support mast

The calculation chart of support is resulted with stretching. Certainly efforts and deformations of support considering a statically-indefinite task. Dependence is got for determination of effort, that operates on a mast and grounded its basic parameters.