

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 539.3 *Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів*

ПРУЖНА РІВНОВАГА ТІЛА З ВІДНОСНО ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПІД ДІЄЮ ОДНОРІДНОГО НАГРІВАННЯ ТА ТРИВІСНОГО РОЗТЯГУ

Отримано розв'язок задачі теорії пружності для простору з тонким відносно жорстким включенням під дією температури і тривісного розтягу-стиску. Розв'язок задачі зведено до системи двох інтегродиференціальних рівнянь. Для еліпсоїдального включення отримано формули для обчислення концентрації напружень у матриці та у включенні.

Prof. M.M. Stadnyk – NUFWT of Ukraine, Lviv

A thin relatively rigid inclusion in elastic body under steady heating and three-axial tension

The solution of elastic problem for the space with a thin relatively rigid inclusion under steady heating and three-axial tension is obtained. The problem is reduced to a system of two integro-differential equations. The formulae for stress concentration both in a matrix and in an inclusion are obtained in the case of ellipsoidal form of inclusion.

Постановка і розв'язок задачі. Нехай пружне тіло на безмежності розтягується взаємоперпендикулярними рівномірно розподіленими зусиллями p_1, p_2, p_3 . Декартову систему координат $Oxyz$ виберемо так, щоби осі Ox , Oy , Oz були паралельними відповідно до зусиль p_1, p_2, p_3 . Крім цього, тіло зазнає однорідного нагріву (охолодження) від температури $T^{(1)}$ до $T^{(2)}$, тобто $T_0 = T^{(2)} - T^{(1)}$. У тілі розміщено пружне відносно жорстке ($1 \leq E_1/E = \varepsilon < \infty$; E, E_1 – модулі Юнга матриці та включення відповідно) еліпсоїдальне включення, яке обмежене поверхнею $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $(a, b \leq c)$. Вважаємо, що на границі розділу основного матеріалу та включення існує ідеальний тепловий контакт. Задача полягає у встановленні напружень у включенні та концентрації напружень у матриці біля нього.

Розв'язок задачі на основі математичної моделі включення [1] зводиться до системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi G} \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_S [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \ln(x - \xi + R) d\xi d\eta + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_S [\tilde{\sigma}_{zy}]_* \cdot \\ & \cdot \ln(x - \xi + R) d\xi d\eta + \frac{1}{hG_1} \int_{-a}^x [\tilde{\sigma}_{zx}]_* dx + D_3 \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta = \frac{p_3 \mu}{Gd_2} - \\ & - 2p_3 \frac{G\mu_1 d_2 - G_1 \mu d_5}{G_1 G d_2 d_4} - \frac{1}{Gd_2} \left(p_1 - \mu p_2 + \frac{d_1 d_5 (p_1 + p_2)}{d_4} \right) + \frac{2(3 + \mu_1) T_0 (\alpha_1 - \alpha)}{d_4} + A_1; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi G} \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \iint_S [\tilde{\sigma}_{zy}]_* \ln(y - \eta + R) d\xi d\eta + D_2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \iint_S [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \cdot \\
 & \cdot \ln(y - \eta + R) d\xi d\eta + \frac{1}{h G_1} \int_{-b}^y [\tilde{\sigma}_{zy}]_* dy + D_3 \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta = \\
 & = \frac{p_3 \mu}{G d_2} - 2p_3 \frac{G \mu_1 d_2 - G_1 \mu d_5}{G_1 G d_2 d_4} - \frac{1}{G d_2} \left(p_2 - \mu p_1 + \frac{d_1 d_5 (p_1 + p_2)}{d_4} \right) + \\
 & + \frac{2(3 + \mu_1) T_0 (\alpha_1 - \alpha)}{d_4} + A_2, \quad (x, y) \in S, \quad z = 0,
 \end{aligned}$$

де: S – еліптична область $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; $h = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}; \quad D_1 = \frac{\mu_1 d_3 G - \kappa G_1}{2 G_1 d_1 d_4}; \quad D_2 = \frac{2 \mu_1 d_3 G + d_4 G_1 - d_5 \kappa G_1}{8 \pi G_1 G d_1 d_4};$$

$$D_3 = \frac{d_3 G_1 + \mu_1 G}{2 \pi G_1 d_1 d_4}; \quad G = \frac{E}{2 d_2}; \quad G_1 = \frac{E_1}{2 d_5}; \quad d_1 = 1 - \mu; \quad d_2 = 1 + \mu; \quad d_3 = 1 - 2 \mu;$$

$d_4 = 1 - \mu_1$; $d_5 = 1 + \mu_1$; $\kappa = 3 - 4 \mu$; μ, μ_1 та α, α_1 – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійного теплового розширення матеріалів матриці і включення; $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$, $[\tilde{u}_z]_*$ – невідомі стрибки збурених (викликаних включенням) дотичних напружень та нормальних зміщень берегів тріщини S , на яких діють навантаження, знесені з поверхонь включення $z = \pm h$; A_1, A_2 – довільні сталі. У рівняннях (1) враховано, що напружено-деформівний стан $\hat{\sigma}^0, \vec{u}^0$ в однорідному тілі визначається поданнями:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u_x^0)_*}{\partial x} &= \frac{(p_1 - \mu(p_3 + p_2))}{G d_2} + 2 \alpha T_0; \quad \frac{\partial(u_y^0)_*}{\partial y} = \frac{(p_2 - \mu(p_3 + p_1))}{G d_2} + 2 \alpha T_0; \quad (2) \\
 [u_z^0]_* &= \frac{c(p_3 - \mu(p_1 + p_2) + 2 \alpha d_2 G T_0)}{G d_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad (\sigma_{zz}^0)_* = 2 p_3,
 \end{aligned}$$

де $[B]_* = B^+ - B^-$; $(B)_* = B^+ + B^-$, "+" і "-" означають, що значення величини $B^\pm$ береться відповідно на поверхнях $\pm h$. Тензор напружень $\hat{\sigma}$ і вектор зміщень $\vec{u}$ у тілі з включенням згідно з принципом суперпозиції подамо співвідношеннями:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0 + \hat{\tilde{\sigma}}; \quad \vec{u} = \vec{u}^0 + \vec{\tilde{u}}. \quad (3)$$

Оскільки розглядаємо відносно жорстке ($1 \leq \varepsilon < \infty$) включення, то вважатимемо, що основними параметрами, які характеризують напружено-деформівний стан у такому включенні, будуть невідомі стрибки напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$. Вони повинні задовольняти умову

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = 0, \quad (4)$$

якщо $\varepsilon = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha$.

Стрибок зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ для такого включення вважатимемо відомим. Він має задовольняти умови:

$$\text{а) } [\tilde{u}_z]_* = 0, \text{ якщо } \varepsilon = 1, \mu_1 = \mu, \alpha_1 = \alpha; \quad (5)$$

$$\text{б) } [u_z]_* = [\tilde{u}_z]_* + [u_z^0]_* = 0 \Rightarrow [\tilde{u}_z]_* = -[u_z^0]_*, \text{ якщо } \varepsilon \rightarrow \infty, \mu_1 = 0, \alpha_1 = 0. \quad (6)$$

Враховуючи, що для стрибка зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ відомі крайні значення (5), (6) і, користуючись інтерполяційним підходом, для наближеного визначення $[\tilde{u}_z]_*$ одержимо подання

$$[\tilde{u}_z]_* = C_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad C_1 = \frac{c(p_3 - \mu(p_1 + p_2) + 2T_0 G d_2 \alpha)(G - G_1)}{G G_1 d_2}, \quad 1 \leq \varepsilon \leq \infty. \quad (7)$$

Розв'язок системи рівнянь (1) шукатимемо у такому вигляді:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{C_2 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{C_3 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad (8)$$

де C_2, C_3 – невідомі сталі.

Підставляючи вирази (7), (8) у рівняння (1) для знаходження C_2, C_3 , одержимо такі формули:

$$C_2 = \frac{b}{a^2 d_2 Q_2} \left(\frac{2Q_1}{\varepsilon \lambda d_2} + (p_1 + p_2) Q_3 - (p_1 - p_2) Q_4 \right); \quad C_3 = \frac{a^2 C_2}{b^2} + Q_5, \quad (9)$$

$$\text{де} \quad Q_1 = p_3 [\varepsilon \lambda d_1 d_2 (\mu \varepsilon d_2 (3 + \mu_1) - d_5 (\mu d_5 + 2\mu_1)) + E(k) (d_5 - \varepsilon d_2) (\varepsilon d_2 d_3 + \mu_1 d_5)] + \\ + 2T_0 G d_2 [\lambda \varepsilon^2 d_1 d_2^2 (3 + \mu_1) (\alpha_1 - \alpha) + \alpha E(k) (d_2 d_3 \varepsilon + \mu_1 d_5) (d_5 - \varepsilon d_2)];$$

$$Q_2 = E(k) (\mu_1 d_3 d_5 - \kappa d_2 \varepsilon) - 2\lambda d_1 d_4 d_5;$$

$$Q_3 = d_1 \left((3 + \mu) d_4 d_5 - (3 + \mu_1) d_1 d_2 \varepsilon - \frac{2\mu E(k)}{d_1 d_2 \varepsilon \lambda} (d_5 - \varepsilon d_2) (\varepsilon d_2 d_3 + \mu_1 d_5) \right);$$

$$Q_4 = d_2 (d_5 - \varepsilon d_2) \frac{2d_1 d_4 (E(k) \varepsilon d_2 + \lambda d_5) - F_2(k) (2\mu_1 d_3 d_5 + \varepsilon d_2 (d_4 - d_5 \kappa))}{2(E(k) \varepsilon d_2 + \lambda d_5)};$$

$$Q_5 = \frac{(p_2 - p_1)(\varepsilon d_2 - d_5)}{b(\varepsilon d_2 E(k) + \lambda d_5)}; \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta; \quad F_2(k) = \frac{a^2 E(k) - b^2 K(k)}{a^2 k^2};$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad \lambda = \frac{b}{c}.$$

Довільні сталі A_1, A_2 у рівняннях (1) вибрано такими:

$$A_1 = \frac{-p_3 \mu + p_1(2 + \mu) + p_2}{G_1 d_2}; \quad A_2 = \frac{-p_3 \mu + p_2(2 + \mu) + p_1}{G_1 d_2}, \quad (10)$$

щоби розв'язок (8) задовольняв частковий випадок задачі при $\varepsilon = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha$ (умова (4)). Вибір A_1 , A_2 у вигляді (10) означає, що стрибки напружень в однорідному тілі $[\sigma_{zx}^0]_*$, $[\sigma_{zy}^0]_*$ виражаються такими співвідношеннями:

$$[\sigma_{zx}^0]_* = \frac{cx(p_1(2+\mu) + p_2 - p_3\mu)}{d_2a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}; \quad [\sigma_{zy}^0]_* = \frac{cy(p_2(2+\mu) + p_1 - p_3\mu)}{d_2b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Аналізуючи вирази (8), (9) бачимо, що при $\varepsilon = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\alpha_1 = \alpha$ задовольняється умова (4), а при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$ маємо

$$\begin{aligned} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* &= \frac{2bx}{a^2d_2\kappa\lambda E(k)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \cdot \left[p_3(d_3E(k) - 3\mu d_1\lambda) + 2T_0Gd_2\alpha(d_3E(k) + 3d_1\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + (p_1 + p_2)\left(\frac{3}{2}\lambda d_1^2 - \mu d_3E(k)\right) - \frac{d_2\lambda}{2E(k)}(p_2 - p_1)(d_1E(k) + d_3F_2(k)) \right]; \\ [\tilde{\sigma}_{zy}]_* &= \frac{2y}{bd_2\kappa\lambda E(k)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \left[p(d_3E(k) - 3\mu d_1\lambda) + 2T_0Gd_2\alpha(d_3E(k) + 3d_1\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + (p_1 + p_2)\left(\frac{3}{2}\lambda d_1^2 - \mu d_3E(k)\right) + \frac{d_2\lambda}{2a^2E(k)}(p_2 - p_1)(d_1a^2E(k) + d_3b^2F_1(k)) \right]; \\ F_1(k) &= \frac{1}{k^2}(K(k) - E(k)). \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо $c \rightarrow 0$ із (11) отримуємо співвідношення для пластинчастого абсолютно жорсткого еліптичного включення:

$$\begin{aligned} [\tilde{\sigma}_{zx}]_* &= \frac{bx}{a^2d_2\kappa E(k)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \left[-6p_3\mu d_1 + 12T_0Gd_2\alpha d_1 + 3d_1^2(p_1 + p_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_2}{E(k)}(p_2 - p_1)(d_1E(k) + d_3F_2(k)) \right]; \\ [\tilde{\sigma}_{zy}]_* &= \frac{y}{bd_2\kappa E(k)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \left[-6p_3\mu d_1 + 12T_0Gd_2\alpha d_1 + 3d_1^2(p_1 + p_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{a^2E(k)}(p_2 - p_1)(d_1a^2E(k) + d_3b^2F_1(k)) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

з якого при $T_0 = 0$, $a = b$ ($E(k) = \pi/2$) впливає відомий частковий результат [2, 3] для пластинчастого дископодібного абсолютно жорсткого включення.

На основі співвідношень (7), (8), (9) і даних [1] для обчислення напружень у включенні матимемо формули:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{(C_2 d_3 a^2 E(k) + d_3 b^2 Q_5 F_2(k) - 2 G C_1 E(k))}{4 b d_1} + p_3; \\ \sigma_{xx} &= -\frac{1}{2h} \int_{-a}^x [\sigma_{zx}]_* dx = \frac{a^2 \lambda C_2}{2b} + \frac{(p_1(2+\mu) + p_2 - p_3 \mu)}{2d_2}; \\ \sigma_{yy} &= -\frac{1}{2h} \int_{-b}^y [\sigma_{zy}]_* dy = \frac{b \lambda C_3}{2} + \frac{(p_2(2+\mu) + p_1 - p_3 \mu)}{2d_2}, \quad (x, y) \in S.\end{aligned}\quad (13)$$

Підставивши у вирази (13) співвідношення (7), (9), маємо подання

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{d_3 E(k)}{4 \varepsilon \lambda d_1 d_2^2 Q_2} (2 Q_1 + \varepsilon \lambda d_2 (Q_3 (p_1 + p_2) + Q_4 (p_2 - p_1))) - \\ &\quad - \frac{E(k)}{2 d_1 \lambda \varepsilon d_2^2} (p_3 - \mu (p_1 + p_2) + 2 T_0 G d_2 \alpha) (d_5 - \varepsilon d_2) + \frac{d_3 b F_2(k) Q_5}{4 d_1} + p_3; \\ \sigma_{xx} &= \frac{\lambda}{2 d_2 Q_2} \left(\frac{2 Q_1}{\varepsilon \lambda d_2} + (p_1 + p_2) Q_3 + (p_2 - p_1) Q_4 \right) + \frac{p_1 (2 + \mu) + p_2 - p_3 \mu}{2 d_2}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{\lambda}{2 d_2 Q_2} \left(\frac{2 Q_1}{\varepsilon \lambda d_2} + (p_1 + p_2) Q_3 + (p_2 - p_1) \left(Q_4 + \frac{d_2 Q_2 (\varepsilon d_2 - d_5)}{\varepsilon d_2 E(k) + \lambda d_5} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{p_2 (2 + \mu) + p_1 - p_3 \mu}{2 d_2}, \quad (x, y) \in S,\end{aligned}\quad (14)$$

які виражають напруження в еліпсоїдальному пружному ($1 \leq \varepsilon < \infty$) включенні.

Як бачимо, ці напруження є сталими, що відповідає відомій теоремі [4].

У частковому випадку при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$ із (14) отримуємо формули:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{1}{2 d_2 \kappa \lambda} \left[p_3 (4 d_1 E(k) - 3 d_3 \lambda \mu) + d_1 (p_1 + p_2) \left(\frac{3}{2} \lambda d_3 - 4 \mu E(k) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_2 d_3 \lambda}{2 E(k)} (p_2 - p_1) (E(k) - 2 F_2(k)) \right] + \frac{G T_0 \alpha}{\kappa \lambda} (4 d_1 E(k) + 3 d_3 \lambda) + p_3; \\ \sigma_{xx} &= \frac{1}{d_2 \kappa E(k)} \left[p_3 (d_3 E(k) - 3 \mu \lambda d_1) + (p_1 + p_2) \left(\frac{3}{2} \lambda d_1^2 - \mu d_3 E(k) \right) - \frac{\lambda d_2}{2 E(k)} \cdot \right. \\ &\quad \cdot (p_2 - p_1) (d_1 E(k) + d_3 F_2(k)) \left. \right] + \frac{p_1 (2 + \mu) + p_2 - p_3 \mu}{2 d_2} + \frac{2 G T_0 \alpha}{\kappa E(k)} (d_3 E(k) + 3 d_1 \lambda); \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{d_2 \kappa E(k)} \left[p_3 (d_3 E(k) - 3 \mu \lambda d_1) + (p_1 + p_2) \left(\frac{3}{2} \lambda d_1^2 - \mu d_3 E(k) \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda d_2}{2 a^2 E(k)} (p_2 - p_1) (d_1 a^2 E(k) + d_3 b^2 F_1(k)) \left. \right] + \frac{p_2 (2 + \mu) + p_1 - p_3 \mu}{2 d_2} + \\ &\quad + \frac{2 G T_0 \alpha}{\kappa E(k)} (d_3 E(k) + 3 d_1 \lambda); \quad (x, y) \in S,\end{aligned}\quad (15)$$

для обчислення напружень в абсолютно жорсткому еліпсоїдальному включенні.

Якщо $a = b$ із (15), отримуємо співвідношення для обчислення напружень в абсолютно жорсткому сфероїдальному включенні. Аналіз виразів (15) показує, що при $a = b$, $\lambda \rightarrow \infty$ (випадок пластинчастого абсолютно жорсткого дископодібного включення) напруження $\sigma_{xx} \rightarrow \infty$ і $\sigma_{yy} \rightarrow \infty$, а σ_{zz} набуває такого вигляду

$$\sigma_{zz} = \frac{3d_3(-2p_3\mu + d_1(p_1 + p_2))}{4d_2\kappa} + \frac{3d_3GT_0\alpha}{\kappa} + p_3, (x, y) \in S. \quad (16)$$

Введемо локальну систему координат O_1ntz ,

$$x = a \cos \varphi - t \sin \theta + n \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi + t \cos \theta + n \sin \theta, \quad z = z, \quad (17)$$

де: φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, θ – кут між додатними напрямками осей O_1x і нормалі до контура O_1n . На основі [1] і (7), (8), (17) одержуємо формулу для визначення розподілу напружень σ_{zz} у матриці у малому околі контура еліпсоїдального включення

$$\sigma_{zz} = \frac{\sqrt{f(\varphi)}}{2d_1\sqrt{ab}\sqrt{(\rho+2n)^3}} \left[(\rho+n) \left(2GC_1 - \frac{a^2b^2d_3}{f^2(\varphi)} (C_2 \cos^2 \varphi + C_3 \sin^2 \varphi) \right) + \right. \\ \left. + d_1\rho (a^2C_2 \cos^2 \varphi + b^2C_3 \sin^2 \varphi) \right] + p_3, \quad z=0, \quad 0 \leq n \leq a, b, \quad (18)$$

де $\rho = \frac{bf(\varphi)}{a\lambda^2}$ – радіус заокруглення вершини включення;

$$f(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Із співвідношення (18) бачимо, що напруження σ_{zz} на контурі ($n=0$) еліпсоїдального пружного включення обчислюється згідно з формулою

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2d_1c} \left(2GC_1 + a^2\mu C_2 + \frac{b^2Q_5 \sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} (d_1f^2(\varphi) - a^2d_3) \right) + p_3. \quad (19)$$

Напруження σ_{zz} , які визначаються згідно з формулою (18), можна розглядати, зокрема, як функцію трьох змінних n, c, ε , тобто $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(n, c, \varepsilon)$. Поклавши у (19) $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, одержимо формулу

$$\sigma_{zz} = p_3 \left(1 - \frac{3\mu^2\lambda d_1 + E(k)(\kappa - \mu d_3)}{d_1d_2\kappa E(k)} \right) + \mu \frac{p_1 + p_2}{d_1d_2\kappa} \left(\kappa - \mu d_3 + \frac{3\lambda d_1^2}{2E(k)} \right) - \\ - \lambda \frac{p_2 - p_1}{2d_1E(k)} \left(\mu \left(\frac{d_1E(k) + d_3F_2(k)}{\kappa E(k)} \right) - (d_1f^2(\varphi) - a^2d_3) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) + \\ + \frac{2GT_0\alpha}{d_1\kappa E(k)} (E(k)(\mu d_3 - \kappa) + 3\mu d_1\lambda) \quad (20)$$

для обчислення концентрації напружень у матриці на контурі абсолютно жорсткого еліпсоїдального включення, з якої випливає, що при $c \rightarrow 0$ напруження $\sigma_{zz} \rightarrow -\infty$, якщо $p > 0$, $p_1 = p_2 = 0$, $T_0 = 0$.

Якщо у співвідношенні (18) спочатку спрямувати $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, а потім $c \rightarrow 0$, то матимемо

$$\sigma_{zz} = \frac{d_3 \sqrt{bf(\varphi)}}{4d_2 \kappa E(k) \sqrt{2an}} [6\mu p_3 - 12GT_0 \alpha d_2 - 3d_1(p_1 + p_2) + \frac{d_2(p_2 - p_1)}{d_1 E(k) f^2(\varphi)} ((d_1 E(k) + d_3 F_2(k)) f^2(\varphi) - a^2 \kappa E(k) \sin^2 \varphi)] + O(n), \quad (21)$$

звідси при $a = b$ одержимо випадок абсолютно жорсткого дископодібного пластинчастого включення, тобто

$$\sigma_{zz} = \frac{d_3 \sqrt{a}}{2\pi d_2 \kappa \sqrt{2n}} [6\mu p_3 - 12GT_0 \alpha d_2 - 3d_1(p_1 + p_2) + \frac{d_2 \kappa (p_2 - p_1)}{2d_1} \cos 2\varphi] + O(n). \quad (22)$$

Спрямовуючи в (21) $n \rightarrow 0$, бачимо, що $\sigma_{zz} \rightarrow +\infty$ при $p > 0$, $T_0 = p_1 = p_2 = 0$. Якщо у формулі (18) спочатку спрямувати $c \rightarrow 0$, то при $n > 0$ розподіл напружень σ_{zz} набуває сталого значення, тобто не залежить від ε , що відповідає випадку однорідного тіла.

Таким чином, границя функції $\lim_{n \rightarrow 0, c \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty} \sigma_{zz}(n, c, \varepsilon)$ залежить від того, у якій

послідовності змінні n, c, ε прямують до відповідних граничних значень, а це означає, що вона не існує. Тому при використанні розв'язку пружної задачі для тіла з абсолютно жорстким пластинчастим ($c = 0$) включенням в задачах механіки руйнування потрібно це враховувати, оскільки коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) K_I для пластинчастого еліптичного абсолютно жорсткого включення набуватиме різних значень. Зокрема, якщо K_I визначати згідно з формулою [5]

$$K_I = \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{2\pi n} \sigma_{zz},$$

у яку підставити вираз (21), то одержимо, що

$$K_I = \frac{d_3 \sqrt{\pi b f(\varphi)}}{2d_1 d_2 \kappa E(k) \sqrt{a}} [3p_3 d_1 \mu - \frac{3}{2} d_1^2 (p_1 + p_2) + d_2 \frac{p_2 - p_1}{2E(k) f^2(\varphi)} \cdot (f^2(\varphi)(d_1 E(k) + d_3 F_2(k)) - a^2 \kappa E(k) \sin^2 \varphi) - 6d_1 d_2 GT_0 \alpha]. \quad (23)$$

Якщо ж для визначення K_I застосувати формулу

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sigma_{zz},$$

у яку підставити подання (20), то

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi b f(\varphi)}}{2\kappa E(k) \sqrt{a}} \left[\frac{3\mu}{2d_2} (-2p_3 \mu + d_1(p_1 + p_2)) - \frac{p_2 - p_1}{2d_1} \cdot \left(\frac{\mu}{E(k)} (d_1 E(k) + d_3 F_2(k)) - \kappa (d_1 f^2(\varphi) - a^2 d_3) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) + 6\mu GT_0 \alpha \right].$$

Порівняння КІН K_I , що даються формулами (23) і (24), показує, що вони не збігаються. Це пояснюється тим, що у формулі (23) не враховано впливу на K_I нормальних торцевих напружень $\tilde{\sigma}_{nn}$, що діють на контурі включення, які виражаються другим доданком у правій частині рівності (18).

Література

1. Стадник М.М. Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – № 6. – С. 30-40.
2. Kassir M.K., Sih G.C. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1968. – V.4. – p.225-241.
3. Силованюк В.П. Жесткое пластинчатое включение в упругом пространстве // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1984. – № 5. – С. 80-84.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М. : Изд-во иностр. лит., 1983. – 296 с.
5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К. : Вид-во "Наук. думка", 1968. – 270 с.

УДК 330.4

Доц. Р.В. Юринець, канд. фіз.-мат. наук – ЛРІДУ НАДУ¹

ЕКОНОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ КРЕДИТНОГО ПОЗИЧАЛЬНИКА ВІДПОВІДНО ДО ЕКСПЕРТНОЇ ОЦІНКИ

Створено економіко-математичну модель оцінювання кредитного позичальника з врахуванням експертної оцінки. Застосовуючи логіт-модель, для оцінювання платоспроможності клієнта, встановлено залежність між чинниками ризику й імовірнісною величиною кредитного ризику.

Assoc. prof. R.V. Yurynets – LRIPA NAPA²

Ekonometric model of evaluation of credit borrower accordingly to expert estimation

The economic mathematical model of evaluation of credit borrower is created taking into account an expert estimation. Applying a logit-model, for the evaluation of solvency of client dependence is set between the factors of risk and probabilistic size of credit risk.

Вступ. Підвищення прибутковості кредитного портфеля банку безпосередньо залежить від умілого управління кредитними ризиками. Споживче кредитування інтенсивно розвивалося, починаючи з кінця ХХ ст., і тепер є одним з секторів будь-якого бізнесу. Кількість фінансових установ, що надають товари і послуги в кредит, росте щодня. Ризик, властивий подібній діяльності, насамперед, залежить від того, наскільки добре оцінено платоспроможність клієнта. Однією з найпопулярніших методик для вирішення цієї проблеми є кредитний скоринг (рейтинг). І саме кредитний скоринг дає змогу понизити ризики без втрати прибутковості, запропонувавши відповідь на ключові запитання: наскільки проблематичною буде робота банку з конкретним позичальником, яке значення кредитного ліміту встановити, і поверне клієнт кредит чи ні.

¹ Львівський регіональний інститут державного управління Національної академії державного управління при Президентові України

² Lviv regional institute of state administration of the National academy of state administration is at President of Ukraine