

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 534.1+62-5 Проф. Б.І. Сокіл, д-р техн. наук – Академія сухопутних
військ ім. П. Сагайдачного; аспір. О.І. Хитряк – КВ ІГФ НАН України

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ТА НОВИЙ ПІДХІД ДО ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розроблено методику розв'язування обернених задач динаміки, які описуються нелінійними рівняннями з частинними похідними. В її основу покладено принцип одночастотності коливань у нелінійних системах, метод Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) побудови асимптотичних розв'язків відповідних крайових задач. Вона дає змогу визначити нелінійні пружні та дисипативні характеристики сил, виходячи із заданого закону зміни основних параметрів руху.

Ключові слова: нелінійні коливання, амплітуда, частота, асимптотичний метод

*Prof. B. Sokil – Land forces academy named after P. Sahaydachny;
post-graduate O. Khytriak – KB IGPH NASU*

Inverse problems of nonlinear dynamics with distributed parameters and method for solving them

It is developed a method of solving inverse dynamics problems, which are described by nonlinear partial differential equations. It is based on the principle of a single frequency of oscillations in nonlinear systems, the method of Krylov-Bogoliubov-Mitropol'skii (KBM) for construction of asymptotic solutions of the corresponding boundary value problems. It allows specify the nonlinear elastic and the dissipation properties of forces, on the assumption of a given law of variation of the key motion parameters.

Keywords: nonlinear oscillation, amplitude, frequency, asymptotic method.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Питання дослідження коливних процесів як лінійних, так і нелінійних систем із зосередженими масами та розподіленими параметрами опрацювали багато вчених, зокрема [1-3]. В основу своїх досліджень вони покладали питання визначення впливу тих чи інших сил на коливні процеси відповідних систем, так звані прямі задачі динаміки (обернені задачі теорії диференціальних рівнянь). Набагато складнішими і водночас важливими є обернені задачі, тобто визначення відповідно до заданого закону руху об'єкта силових чинників, які спричиняють цей закон руху. Складність останньої задачі полягає в тому, що вона не завжди має єдиний розв'язок. Різні аспекти розв'язування обернених задач стосовно системи із зосередженими масами розглянуто в роботах [4-8] та ін. Проте обернені задачі для систем із розподіленими параметрами не набули належного розвитку, насамперед, через складність їх розв'язання. Тому метою цієї роботи є поширення основної ідеї робіт [8, 9] саме на розв'язання деяких обернених задач для систем вказаного класу. Треба відзначити, що вказані задачі за своєю постановкою близькі до так званих задач програмного руху [8].

Постановка задачі. Відомо [2, 3, 10], що динамічні процеси багатьох систем із розподіленими параметрами описують диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}). \quad (1)$$

Зокрема, воно описує нелінійні коливання (стрижня – поздовжні), (струни, линви – поперечні) та динамічні процеси, які мають місце в сипких середовищах [10]. У (1) $u(x, t)$ – поздовжнє (поперечне) переміщення досліджуваного об'єкта з координатою x в довільний момент часу t ; α – стала, яку визначають через фізико-механічні характеристики тіла; $f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$ – невідома функція, що вказує на відхилення його пружних характеристик від лінійного закону, а також нелінійні сили опору, дисипативні сили та ін.; $\varepsilon > 0$ – малий параметр і він вказує на малу величину останніх порівняно з лінійною відновлювальною силою. Для рівняння (1) будемо розглядати найпростіші крайові умови, а саме

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

З врахуванням того, що диференціальне рівняння (1) є нелінійним, формально амплітуда і частота динамічного процесу систем, які описує крайова задача (1), (2), змінюються в часі. Закон зміни цих параметрів визначається, взагалі кажучи, правою частиною цього рівняння, крайовими та початковими умовами. Для визначення невідомої функції $f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$ будемо вважати, що процес у відповідній системі задається певним законом зміни амплітуди і частоти коливань. Найдоступнішим способом визначення останніх характеристик є експериментальне знаходження послідовності значень амплітуд і періодів коливань об'єкта $a_1, a_2, \dots, a_N$; $T_1, T_2, \dots, T_N$.

У [9, 11-12] показано, що множина значень $\{a_i\}$ і $\{T_i\}$ визначає наближено закони зміни в часі параметрів a і T за допомогою диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A(a); \\ \frac{dT}{dt} &= \omega + \varepsilon B(a), \end{aligned} \quad (3)$$

в яких $A(a), B(a)$ – відомі функції. Надалі вважатимемо, що останні є поліномами. Таким чином, задача полягає у визначенні такого вигляду функції $f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$, за якого коливний процес записується системою звичайних диференціальних рівнянь (3).

Методика розв'язування. Враховуючи вказане вище, а також результати, які впливають із асимптотичного інтегрування відповідної крайової задачі [2], праві частини рівняння (3) також повинні бути поліномами. Тому невідому функцію $f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$ будемо шукати у вигляді аналітичної апроксимації

$$f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) = \sum_{k=1}^N c_k f_k(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (4)$$

де: $f_k(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$ – лінійно незалежні функції (многочлени); c_k – коефіцієнти, значення котрих потрібно знайти таким чином, щоб амплітудно-частотна характеристика коливань систем, рух яких описується рівнянням (1) з врахуванням (4), змінювалась відповідно до (3).

Розв'язок диференціального рівняння (1) у першому наближенні, відповідно до [2, 13], записуємо у вигляді асимптотичного розкладу

$$u(x, t) = u_0(a, x, \psi) + \varepsilon u_1(a, x, \psi), \quad (5)$$

де функції $u_0(x, t)$ та $u_1(x, t)$ – 2π – періодичні по ψ , крім цього $u_1(x, t)$ не містить першої гармоніки, тобто вона задовольняє такі співвідношення

$$\int_0^{2\pi} u_1(a, x, \psi) \cos \psi \, d\psi = 0; \quad \int_0^{2\pi} u_1(a, x, \psi) \sin \psi \, d\psi = 0. \quad (6)$$

Це означає, що параметр a у розв'язку (5) є повною амплітудою коливань, точніше кажучи, амплітуда коливань системи збігається з амплітудою основної (першої) гармоніки коливання.

Розв'язок незбуреної системи ($\varepsilon = 0$), тобто функцію $u_0(x, t)$ знаходимо у вигляді [14]

$$u_0 = \frac{a}{2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

де $\psi = \omega t + \varphi$, $\omega = \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2$.

Диференціюючи праву частину (5), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \frac{d^2 a}{dt^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial a} \right\} + \\ & + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \left\{ \frac{a}{2} \left[-\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right\} + \\ & + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \left\{ \frac{a}{2} \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right\} + \\ & + \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} \left\{ \left[-\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} \right\}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \frac{a}{2} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подібним чином із (3) можемо знайти такі величини

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{dA}{da} A(a); \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \varepsilon^2 \frac{dB}{da} A(a); \quad \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \varepsilon^2 A^2(a);$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \omega^2 + 2\omega\varepsilon B(a) + \varepsilon^2 B^2(a); \quad \frac{da}{dt} \frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\omega A(a) + \varepsilon^2 A(a)B(a). \quad (9)$$

Підставивши (8) в (1), з врахуванням (9), маємо

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2}\omega^2 \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] - \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{a}{2} \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \\ & \varepsilon \left\{ a\omega B(a) \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \omega A(a) \left[-\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \right. \\ & \left. + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right\} + \varepsilon^2 \dots = \varepsilon \bar{f}(a, x, \psi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } \bar{f}(a, x, \psi) = \sum_{k=1}^N c_k f_k(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \bigg|_{\substack{u = \frac{a}{2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] \dots \\ u_t = -\frac{a}{2}\omega \left[\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right]}} = \sum_{k=1}^N c_k \bar{f}_k(a, x, \psi).$$

У першому наближенні (10) існуватиме, якщо невідомі функція $u_1(x, t)$ та параметри $c_1, \dots, c_N$ пов'язані диференціальним співвідношенням

$$\begin{aligned} & a\omega B(a) \left[-\cos\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] + \omega A(a) \left[-\sin\left(\frac{k\pi}{l}x + \psi\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{l}x - \psi\right) \right] \\ & + \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^N c_k \bar{f}_k(a, x, \psi). \end{aligned} \quad (11)$$

З врахуванням умов (6) маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N c_k \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{f}_k(a, x, \psi) \cos \psi \sin \frac{k\pi}{l} x d\psi dx = -\pi\omega l A(a); \\ & \sum_{k=1}^N c_k \int_0^l \int_0^{2\pi} \bar{f}_k(a, x, \psi) \sin \psi \sin \frac{k\pi}{l} x d\psi dx = \pi a \omega l B(a). \end{aligned} \quad (12)$$

Алгебраїчні залежності (12) слугують базою для визначення невідомих коефіцієнтів c_k . Для (12) можливі такі випадки.

Випадок 1. Вказані співвідношення (12) виконуються однозначно за всіх значень параметра a . Тоді система алгебраїчних рівнянь (12) має єдиний розв'язок. У вказаному випадку функції f_k підбрано вдало і аналітична апроксимація невідомих силових характеристик визначається залежністю (4) за отриманих значень $c_1, \dots, c_N$.

Випадок 2. Залежності (12) виконуються тільки для окремих значень параметра a , тобто шляхом прирівнювання коефіцієнтів за однакових ступенів a правої і лівої частин співвідношень (12), отримаємо недовизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Тоді для знаходження невідомих коефіцієнтів накладемо на функції f_k додаткову умову: функціонал

$$J = \int_{-a}^a \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^N c_k \bar{f}_k(a, x, \psi) \right]^2 da dx d\psi \quad (13)$$

повинен набути мінімального значення.

Нехай із (12) можна визначити зв'язок між першими s невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді

$$c_i = \eta_i(c_{s+1}, \dots, c_N), \quad i = 1, 2, \dots, s.,$$

де η_i – відомі функції.

З врахуванням наведеного вище, (13) набуває вигляду

$$J = \int_{-a}^a \int_0^{2\pi} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^s \eta_i(c_{s+1}, \dots, c_N) \bar{f}_i(a, x, \psi) + \sum_{r=s+1}^N c_r \bar{f}_r(a, x, \psi) \right]^2 da dx d\psi. \quad (14)$$

Функціонал (14) набуде мінімального значення, якщо виконуються умови

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}} = \varphi_i(c_{s+1}, c_{s+2}, \dots, c_N, a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-s. \quad (15)$$

Розв'язуючи сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (12) та (15) стосовно c_k , знаходимо невідомі коефіцієнти.

Випадок 3. Алгебраїчні співвідношення (12) не виконуються за всіх значень параметра a . У цьому випадку система функцій f_k підібрана невдало і треба замінити її іншою.

Висновки. Запропонована методика визначення нелінійних характеристик систем дає змогу за заданим коливним процесом визначити аналітичну апроксимацію невідомих силових чинників. Основну її ідею може бути перенесено і на деякі інші системи.

Література

1. Сеник П.М. Про використання u -методики для одного класу коливних систем / П.М. Сеник, Б.І. Сокіл // Доповіді АН УРСР. Серія: А. – 1977. – № 1. – С. 12-16.
2. Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Моисеенков. – К. : Вид-во "Вища шк.", 1976. – 592 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М. : Изд-во "Наука", 1968. – 560 с.
4. Кононенко В.О. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения / В.О. Кононенко, Н.П. Плахтиенко // Прикладна механіка. – 1969. – V, вип. 10. – С. 1-7.
5. Кононенко В.О. Определение петлеобразных характеристик нелинейных колебательных систем из анализа движения / В.О. Кононенко, Н.П. Плахтиенко // Прикладна механіка. – 1970. – IV, вип. 9. – С. 9-15.
6. Плахтійенко Н.П. Про визначення нелінійної характеристики коливної системи з аналізу фазової траєкторії // Доповіді АН УРСР. Серія: А. – 1976. – Вип. 4. – С. 336-338.
7. Сеник П.М. Застосування u -методики до неавтономної системи з сильною нелінійністю // Доповіді АН УРСР. – 1962. – № 9. – С. 1146-1149.
8. Сеник П.М. Про побудову оптимальної автономної програмно-коливної системи з сильною не лінійністю / П.М. Сеник, Б.І. Сокіл // Доповіді АН УРСР. Серія: А. – 1976. – № 7. – С. 600-603.
9. Сеник П.М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н.Н. Боголюбова // Известия ВУЗов. – 1960. – № 6. – С. 226-232.
10. Стоцько З.А. Динаміка робочого середовища вібраційних машин об'ємної оброблення / З.А. Стоцько, Б.І. Сокіл, В.Г. Топільницький // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні і приладобудуванні. – 2000. – № 35. – С. 126-32.
11. Сеник П.М. Визначення функції, яка характеризує розсіювання енергії коливної системи // Прикладна механіка. – 1960. – IV, вип. 1. – С. 40-45.
12. Сеник П.М. Про визначення функції розсіювання енергії коливної системи з багатьма ступенями вільності // Прикладна механіка. – 1961. – VII, вип. 3. – С. 253-257.

13. Боголюбов Н.И. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.И. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Изд-во "Наука", 1974. – 408 с.

14. Мартинців М.П. Несучі характеристики канатних установок / М.П. Мартинців, Б.І. Сокіл, М.Б. Сокіл // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвідомчий наук.-техн. зб. – Львів : УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С. 81-89.

УДК 681.3+519.6

Доц. О.А. Пастух, канд. техн. наук – Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя

СПІЛЬНІ РИСИ ТА ВІДМІННОСТІ МІЖ ІНДИКАТОРНИМИ ФУНКЦІЯМИ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА ПОДІБНИМИ ДО НИХ ЙМОВІРНІСНИМИ МІРАМИ

Вперше розглянуто математичний формалізм спільного та відмінного між індикаторними функціями (функціями приналежності) нечітких множин та подібними до них ймовірнісними мірами. В основу математичного формалізму покладено статистичну модель, яка охоплює симплекс приготованих станів та множину афінних відображень симплексу приготованих станів у симплекс ймовірнісних мір, а також поняття квантової нечіткої множини, яке є узагальненням поняттям нечіткої множини. Показовість результатів представлено за допомогою віртуального експерименту з оцінювання групою експертів індикаторної функції нечіткої множини.

***Assoc. prof. O.A. Pastukh – Ternopol state technical university
named after Ivan Pulyuj***

Identical and difference between indicator functions of fuzzy sets and similar probability measures

Mathematical formalism of general and difference between indicator functions of fuzzy sets and probability measures had been viewed. Basic of mathematical formalism is statistical model. Statistical model is including simplex of ready states and set of affine mappings. Basic of mathematical formalism is idea of quantum fuzzy set. Quantum fuzzy set is generalization of fuzzy set. Results of virtual experiment on estimation indicator function of fuzzy set by group of experts had been showed.

Вступ. Доволі часто під час розгляду індикаторних функцій (функцій належності) нечітких множин їх ототожнюють із однаковими за значеннями ймовірнісними мірами. Хоча відмінність між ними істотна, наприклад, область визначення індикаторних функцій є універсальна множина, а областю визначення відповідної їй ймовірнісної міри є σ -алгебра цієї універсальної множини, все ж існує потреба в створенні математично формалізованого ґрунту для їх розрізнення.

Огляд існуючих даних. Хоча відмінності, які існують між індикаторними функціями нечітких множин та подібними до них ймовірнісними мірами, розглянуто у багатьох літературних джерелах, в основі цього дослідження використано математичний формалізм статистичної моделі, наведений у роботах [1, 2] та поняття квантових нечітких множин, які є узагальненням нечітких множин і вперше введено в авторських роботах [3-6].

Постановка завдання. У роботі розглянуто за допомогою статистичної моделі та поняття квантової нечіткої множини вирішення завдання математичної формалізації зв'язку між індикаторними функціями нечітких мно-