

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВИДОВЖЕННЯ ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ ПРИВОДУ НА ЇХ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ

Запропоновано методику дослідження поперечних коливань гнучких елементів систем приводу, яка базується на ідеї використання періодичних Атеб-функцій для побудови розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю. Отримано співвідношення, які визначають вплив поздовжньої швидкості руху та фізико-механічних характеристик гнучких систем на амплітудно-частотну характеристику поперечних коливань.

Ключові слова: нелінійні коливання, амплітуда, частота.

Competitor K.I. Lishchynska – NU "L'vivs'ka Politekhnika"

A method of research of agency of an elongation of flexible devices of systems of a drive on their transverse oscillations

The method of research of transverse oscillations of flexible devices of systems of a drive, which is based on the idea of the use of periodic Ateb-functions for the construction of solutions of the usual differential equations with degree nonlinearity, is offered. It is obtained relations, which define agency of a longitudinal velocity of motion and physicomecanical performances of flexible systems on the amplitude-frequency characteristic of transverse oscillations.

Keywords: nonlinear oscillations, amplitude, frequency.

Актуальність. Важливою проблемою аналітичного дослідження поперечних коливань гнучких елементів систем приводу (канатних витягів, ремінних, ланцюгових чи пасових передач) є вивчення впливу пружних характеристик матеріалу гнучких елементів, швидкості поздовжнього руху на динаміку процесу. Такі задачі за квазілінійної постановки розглянуто, наприклад, в [1-5]. Зокрема, у [1-3] розроблено методику дослідження впливу швидкості поздовжнього руху на поперечні (поздовжні) їх коливання (без урахування видовження), у [4-5] розглянуто задачу про вплив видовження матеріалу на амплітудно-частотну характеристику коливань. Водночас, пружні характеристики вказаної низки гнучких елементів систем приводу мають чітко виражений нелінійний характер. Тому, лінійні чи квазілінійні розрахункові математичні моделі не завжди адекватні процесу.

Метою роботи є розроблення методики дослідження впливу нелінійно пружних характеристик широкого спектру матеріалів гнучких елементів приводів, а також поздовжньої швидкості їх руху на основні характеристики поперечних коливань.

Основна частина. Для дослідження впливу видовження гнучких елементів, матеріал яких задовольняє сильно нелінійному закону пружності, та швидкості поздовжнього руху на поперечні їх коливання, опишемо динамічний процес у таких системах за допомогою рівнянь з частинними похідними. Моделюватимемо їх пружним одновимірним тілом. Пружні властивості його матеріалу описуються залежністю

$$\sigma = E\varepsilon^{\nu+1} + \mu f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad (1)$$

де: σ, ε – відповідно напруження і відносна деформація, E, ν, μ – сталі, причому $\nu + 1 = (2m + 1) \cdot (2n + 1)^{-1}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$), $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ – аналітична функція, яка характеризує відхилення пружних властивостей матеріалу гнучкого елемента від степеневого закону, а параметр $\mu \ll 1$ вказує на незначну величину останнього. Вважатимемо, що F – сила натягу в перерізі гнучкого тіла з координатою x ; ρ – маса його одиниці довжини. Для описання положення гнучкого елемента виберемо нерухому систему координат XOY , вісь OX котрої збігається із недеформованим його станом (положенням) і $u(x, t)$ – поперечне відхилення перерізу гнучкого елемента з координатою x у довільний момент часу t (рис. 1).

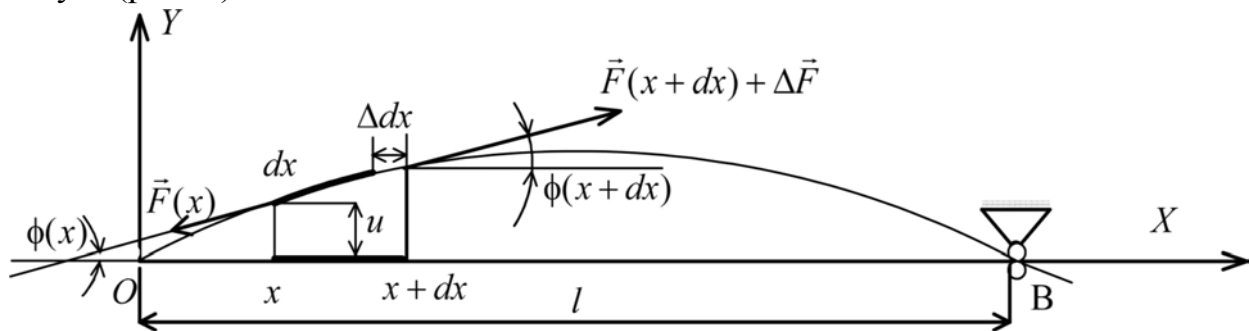


Рис. 1. Розрахункова модель і схема сил, які діють на гнучкий елемент системи приводу

З врахуванням коливань гнучкого тіла, елемент довжиною dx змінить свою величину на Δdx , яка дорівнює

$$\Delta dx = dx - dx \cos \varphi \approx dx \frac{\varphi^2}{2}. \quad (2)$$

Для малих поперечних коливань справедливе співвідношення $\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \varphi = \sin \varphi = \varphi$. Відносна ж деформація $\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$ гнучкого елемента вздовж всієї його довжини є незмінною величиною, адже величина сили натягу у ньому є незмінною. Повне видовження гнучкого елемента при поперечних його коливаннях знаходиться відповідно до формули

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3)$$

Додатковий натяг гнучкого елемента ΔF , що зумовлений його видовженням, у випадку, коли матеріал його задовольняє сильно нелінійному закону пружності (1), знаходимо відповідно до залежності

$$\Delta F = ES \left[\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{\nu+1} + \mu \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx. \quad (4)$$

З врахуванням вказаного, співвідношення, яке виражає умову "динамічної рівноваги" виділеного елемента, набуває вигляду

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} dx = (F + \Delta F) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - (F + \Delta F) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x. \quad (5)$$

Беручи до уваги, що

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

із (5) отримуємо

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \left\{ \frac{F}{\rho} + \frac{ES}{\rho} \left[\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{v+1} + \mu \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Для випадку, коли гнучкий елемент рухається вздовж осі ОХ зі сталою швидкістю V , символи першої $\frac{d}{dt}$ і другої похідної за часом $\frac{d^2}{dt^2}$ визначаються залежностями

$$\frac{d}{dt} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Це дає змогу диференціальне рівняння (6) записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left\{ V^2 - \frac{\mu}{\rho} \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx - \frac{ES}{\rho} \left[\frac{1}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{v+1} - \frac{F}{\rho} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0. \quad (8)$$

Для рівняння (8) будемо розглядати крайові умови

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (9)$$

які еквівалентні умовам відсутності поперечного переміщення рухомого гнучкого елементу у двох фіксованих точках. Легко переконатись, що для системи функцій $\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$ мають місце співвідношення $X_k(0) = X_k(l) = 0$. А це, відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна [6], дає змогу подати перше наближення розв'язку крайової задачі (8), (9) у вигляді

$$u(x, t) = X_k(x) T_k(t), \quad (10)$$

де: $T_k(t)$ – невідомі функції. Зі врахуванням повноти і ортонормованості системи функцій для лінійної змінної, тобто $\{X_k(x)\}$, із (9) для знаходження функції $T_k(t)$ отримуємо звичайне сильно нелінійне диференціальне рівняння (нижче індекс k будемо опускати)

$$\ddot{T} + \alpha^2 T^{2v+3} = - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{F}{\rho} - V^2 \right) T + \mu \bar{f}(T, \dot{T}), \quad (11)$$

$$\text{де } \alpha^2 = \frac{ES}{2\rho} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^{2v+4}, \quad \bar{f}(T, \dot{T}) = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \int_0^l f \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Накладемо деякі обмеження щодо величини швидкості поздовжнього руху та сили натягу, а саме: розглянемо випадок $F/\rho - V^2 \gg \alpha^2$. Це дає змогу для побудови розв'язку рівняння (11) використати періодичні Атеб-функції

[7, 8]: невідому функцію $T(t)$ для шуканого наближення можна представити у вигляді

$$T(t) = a(t) ca(2\nu + 3, 1, \psi(t)), \quad (12)$$

де параметри a і ψ як функції часу визначаються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\mu}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \bar{f} \left(aca(2\nu + 3, 1, \psi), -\frac{1}{\nu + 2} a\omega(a) sa(1, 2\nu + 3, \psi) \right) sa(1, 2\nu + 3, \psi) d\psi; \\ \dot{\psi} &= \alpha\sqrt{\nu + 2\Pi^{-1}a^{\nu+1}} + b \left(\frac{F}{\rho} - V^2 \right) + \\ &+ \frac{\mu(\nu + 2)}{\Pi\omega(a)} \int_0^{2\Pi} \bar{f} \left(aca(2\nu + 3, 1, \psi), -\frac{1}{\nu + 2} a\omega(a) sa(1, 2\nu + 3, \psi) \right) ca(2\nu + 3, 1, \psi) d\psi, \end{aligned} \quad (13)$$

в яких $\omega(a) = \alpha\sqrt{\nu + 2\Pi^{-1}a^{\nu+1}}$, $\Pi = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2\nu + 4}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\nu + 4}\right)$,

$$b = 2\sqrt{\pi} \frac{\nu + 2}{\Pi\omega(a)} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \Gamma\left(\frac{3}{2\nu + 4}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\nu + 4}\right).$$

Розглянемо окремий випадок нелінійно пружних характеристик матеріалу гнучких елементів, а саме $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0$. Для нього амплітуда коливань є незмінною величиною, а частота визначається залежністю

$$\Omega = \alpha\sqrt{\nu + 2\Pi^{-1}a^{\nu+1}} + b \left(\frac{F}{\rho} - V^2 \right). \quad (14)$$

На рис. 2-4 подано залежності: частоти власних коливань гнучкого елемента від параметра ν (рис. 2); частоти від амплітуди коливань за різних значень параметра ν (рис. 3); частоти від швидкості руху гнучкого елемента (рис. 4).

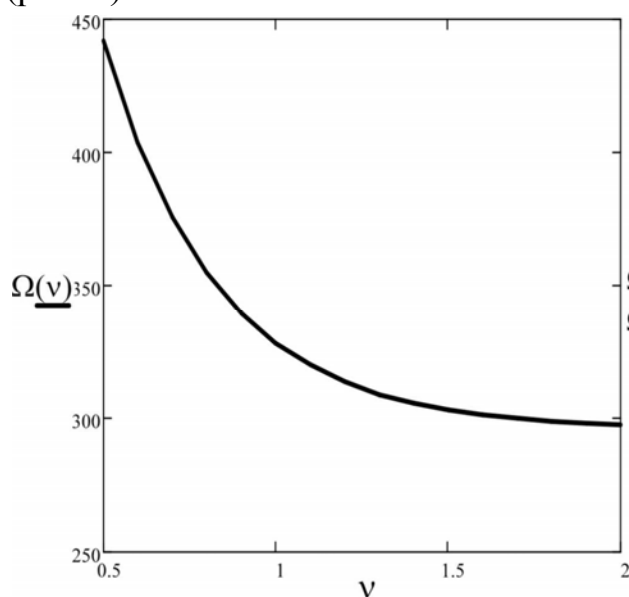


Рис. 2.

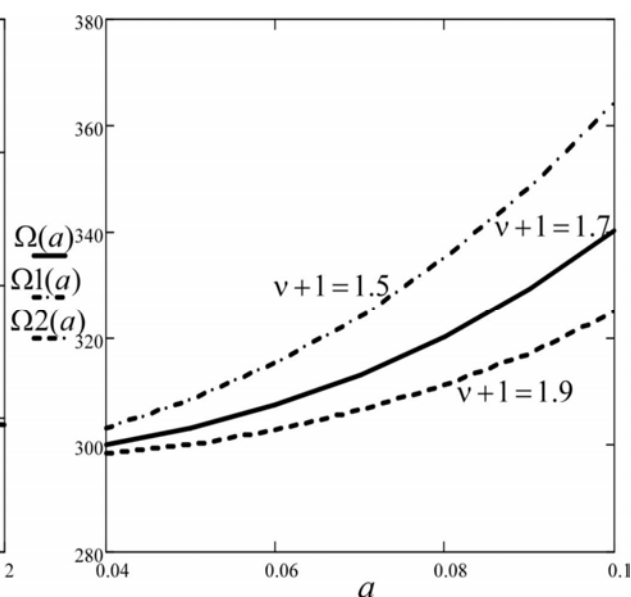


Рис. 3.

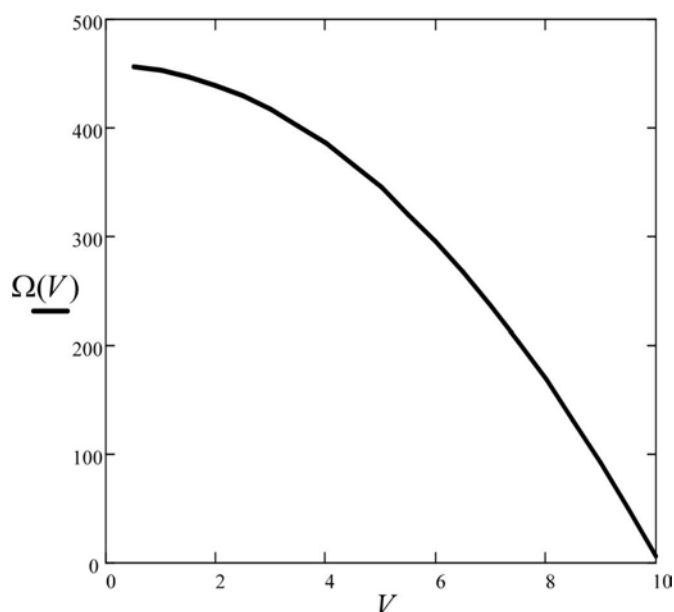


Рис. 4.

Висновки. Представлені залежності показують:

- по-перше, зростання поздовжньої швидкості руху гнучкого елементу спричиняє зменшення власної частоти поперечних коливань;
- по-друге, нехтування видовженнями гнучких елементів систем приводу при їх поперечних коливаннях призводить до занижених значень власних частот;
- по-третє, із зростанням амплітуди коливань власна частота поперечних коливань гнучких елементів зростає.

Представлену методику можна узагальнити і на випадок неавтономних систем.

Література

1. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвід. наук.-техн. зб. – Львів : УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С. 81-89.
2. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Науковий вісник УкрДЛТУ : зб. наук.-техн. праць. – Львів : УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64-67.
3. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Вимушені коливання рухомих середовищ і асимптотичний метод у їх дослідженні // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : НЛТУ України. – 2006. – Вип. 16.1. – С. 134-139.
4. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы // Машиноведение. – 1969. – № 5. – С. 18-24.
5. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого канату і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвід. наук.-техн. зб. – Львів : УкрДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С. 89-94.
6. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестник инженеров техников. – 1915. – № 19. – С. 23-32.
7. Сеник П.М. Про Ateb-функції // Доповіді АН УРСР. – 1968. – № 1. – С. 23-26.
8. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції // Український математичний журнал. – 1969. – 21. – № 3. – С. 325-333.

УДК [004.451]:621.7.01

Доц. Ю.І. Грицюк, канд. техн. наук –
НЛТУ України, м. Львів

СТРУКТУРНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ РОЗКРОЮ ПЛИТНИХ ДЕРЕВНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглянуто структурно-функціональний аналіз (СФА) технологічного процесу (ТП) розкрою плитних деревних матеріалів (ПДМ) як складної ієрархічної системи, який є основою для його розроблення (проектування та експериментального випробування) або перевірки раціональності наявного. За результатами СФА відбувається