

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 539.3 *Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів*

ТОНКЕ ВІДНОСНО ПОДАТЛИВЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ПРОСТОРІ ЗА ДІЇ ОДНОРІДНОГО НАГРІВАННЯ І ТРИВІСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Отримано розв'язок задачі теорії пружності для простору з тонким відносно податливим включенням за дії тривісного розтягу-стиску та однорідного нагрівання. Задачу зведено до розв'язку сингулярного інтегродиференціального рівняння відносно стрибка зміщень поверхонь включення. Для еліпсоїдального включення одержано формули для обчислення концентрації напружень у матриці та у включенні.

Prof. M.M. Stadnyk – NUFWT of Ukraine, L'viv

A thin relatively flexible inclusion in an elastic body under steady heating and threeaxial tension

The solution of elastic problem for a body with a thin relatively flexible inclusion subjected to the three-dimensional tension or pressing and steady heating is obtained. The problem was reduced to the singular integro-differential equations upon the jumps of inclusion's boundary displacements. The formulae of stress concentrations both in a matrix and in an inclusion for of one have been received.

Постановка і розв'язок задачі. Розглянемо тривимірне нескінченне пружне тіло, до якого на безконечності прикладені взаємно перпендикулярні рівномірно розподілені напруження p_1, p_2, p_3 . Крім цього, тіло зазнає однорідного нагріву (охолодження) від температури $T^{(1)}$ до $T^{(2)}$, тобто $T_0 = T^{(2)} - T^{(1)}$. Декартову систему прямокутних координат $Oxyz$ виберемо так, щоби осі Ox, Oy, Oz були відповідно паралельні до зусиль p_1, p_2, p_3 . У тілі розміщено пружне податливе ($0 \leq E_1/E = \varepsilon \leq 1$; E, E_1 – відповідно модулі Юнга матеріалів матриці та включення) тонке еліпсоїдальне включення, яке обмежене поверхнею $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b \gg c$). Вважаємо, що на поверхні з'єднання різних середовищ має місце ідеальний тепловий контакт. У задачі потрібно знайти напруження у включенні та концентрацію напружень у матриці біля нього.

Користуючись принципом суперпозиції, тензор напружень $\hat{\sigma}$ та вектор переміщень $\vec{u}$ у тілі з включенням представимо у вигляді суми

$$\hat{\sigma} = \hat{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma}^0; \quad \vec{u} = \vec{\vec{u}} + \vec{u}^0, \quad (1)$$

де: $\hat{\sigma}^0, \vec{u}^0$ – відомі напруження і переміщення для однорідного (бездефектного) тіла, $\hat{\hat{\sigma}}, \vec{\vec{u}}$ – збурене поле напружень і переміщень, спричинене наявністю у тілі включення.

Оскільки включення розглядається податливим, то вважатимемо, що визначальним параметром, який характеризує локальний напружено-дефор-

мівний стан у такому тілі, буде невідомий стрибок переміщень $[\tilde{u}_z]_*$ берегів еліптичної тріщини $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$, $z = \pm 0$, на яких діють напруження, знесені з поверхонь включення $\pm h = \pm c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$. Стрибки напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\sigma_{zy}]_*$ поверхонь включень, які вважатимемо відомими, беремо такими, щоби вони задовольняли часткові випадки задачі:

- 1) для однорідного тіла ($\varepsilon = 1$, $\mu = \mu_1$, $\alpha = \alpha_1$; μ, μ_1 та α, α_1 – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійні коефіцієнти теплового розширення матриці і включення)

$$[\tilde{u}_z]_* = 0; \quad [\tilde{\sigma}_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = 0; \quad (2)$$

- 2) для порожнини ($\varepsilon = 0$)

$$[\sigma_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zx}]_* + [\sigma_{zx}^0]_* = 0; \quad [\sigma_{zy}]_* = [\tilde{\sigma}_{yx}]_* + [\sigma_{zy}^0]_* = 0, \quad (3)$$

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = -[\sigma_{zx}^0]_* = xc \frac{\mu p_3 - p_1(2 + \mu) - p_2}{d_2 a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}};$$

тобто

$$[\tilde{\sigma}_{zy}]_* = -[\sigma_{zy}^0]_* = yc \frac{\mu p_3 - p_2(2 + \mu) - p_1}{d_2 b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad (4)$$

$$d_2 = 1 + \mu.$$

На основі співвідношень (2)-(4) і інтерполяційного підходу одержимо подання

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{C_2 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \quad (5)$$

$$C_1 = -c(\mu p_3 - p_1(2 + \mu) - p_2) \frac{G_1 - G}{d_2 a^2 G}; \quad C_2 = -c(\mu p_3 - p_2(2 + \mu) - p_1) \frac{G_1 - G}{d_2 b^2 G}$$

для наближеного обчислення $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\sigma_{zy}]_*$ в усьому діапазоні зміни ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), які точно задовольняють обидва крайні ($\varepsilon = 0$ і $\varepsilon = 1$, $\mu = \mu_1$) випадки задачі, G , G_1 – модулі зсуву матриці та включення.

На основі результатів [1] і використання виразів (5) поставлена задача зводиться до розв'язку сингулярного інтегродиференціального рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{Gd_6 - G_1\mu_1 d_3}{2\pi G_1 d_1} \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_* d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{2d_4 [\tilde{u}_z]_*}{c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}} = \\ & = \frac{2p_3}{G_1 G d_2} (G_1(d_4 - 2\mu_1\mu) - Gd_2 d_6) + \frac{2}{Gd_2} (p_1 + p_2)(\mu_1 - \mu) + c(Gd_3 d_6 + G_1\mu_1\kappa) \times \\ & \times \left(\frac{G_1 - G}{2d_1 d_2 b G^2 G_1} \right) \left(p_3 \mu E(k) - \frac{b^2}{a^2} (p_1(2 + \mu) + p_2) F_1(k) - (p_2(2 + \mu) + p_1) F_2(k) \right) + \\ & + 4d_5 T_0(\alpha - \alpha_1), \quad (x, y) \in S \end{aligned} \quad (6)$$

відносно стрибка переміщень $[\tilde{u}_z]_*$. Тут S – еліптична область $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$;
 $d_1 = 1 - \mu$; $d_3 = 1 - 2\mu$; $d_4 = 1 - \mu_1$; $d_5 = 1 + \mu_1$; $d_6 = 1 - 2\mu_1$;

$$F_1(k) = \frac{1}{k^2} (K(k) - E(k)); F_2(k) = \frac{1}{k^2} \left(E(k) - \frac{b^2}{a^2} K(k) \right);$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Аналіз рівняння (6) показує, що його розв'язок треба шукати у вигляді

$$[\tilde{u}_z]_* = C_3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (7)$$

де C_3 – невідома стала.

Підставивши вираз (7) у рівняння (6), одержимо

$$C_3 = \frac{b}{GQ_1} \left[2d_1 (p_3 (d_5 d_6 - \varepsilon (d_4 - 2\mu_1 \mu)) + \varepsilon (p_1 + p_2) (\mu - \mu_1) + 2GT_0 d_2 d_5 \varepsilon (\alpha_1 - \alpha)) + \right. \\ \left. + \frac{Q_2}{2\lambda d_2 d_5 E(k)} \left(p_3 \mu E(k) - \frac{b^2}{a^2} (p_1 (2 + \mu) + p_2) F_1(k) - (p_2 (2 + \mu) + p_1) F_2(k) \right) \right]. \quad (8)$$

$$Q_1 = E(k) (d_5 d_6 - \varepsilon \mu_1 d_2 d_3) + 2\lambda \varepsilon d_1 d_2 d_4;$$

$$\text{Тут} \quad Q_2 = E(k) (d_5 - \varepsilon d_2) (d_3 d_5 d_6 + \varepsilon d_2 \mu_1 \kappa); \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{b}{c}; \varepsilon = \frac{E_1}{E}.$$

На основі виразів (5), (7) і даних [1] матимемо співвідношення:

$$\sigma_{zz} = d_3 b \frac{C_1 F_1(k) + C_2 F_2(k)}{4d_1} - \frac{GC_3 E(k)}{2d_1 b} + p_3;$$

$$\sigma_{xx} = a^2 \frac{\lambda C_1}{2b} + \frac{p_1 (2 + \mu) + p_2 - p_3 \mu}{2d_2}; \quad (10)$$

$$\sigma_{yy} = b \frac{\lambda C_2}{2} + \frac{p_2 (2 + \mu) + p_1 - p_3 \mu}{2d_2}, (x, y) \in S,$$

для визначення напружень у включенні та

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2d_1 c} \left[2GC_3 - \frac{a^2 b^2 d_3}{f^2(\varphi)} (C_1 \cos^2 \varphi + C_2 \sin^2 \varphi) + d_1 (a^2 C_1 \cos^2 \varphi + b^2 C_2 \sin^2 \varphi) \right] + p_3 \quad (11)$$

для знаходження концентрації напружень у матриці біля нього. Тут $f(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$; φ – кут, що визначає параметрично координати точок еліпса.

Підставивши величини C_1, C_2, C_3 із формул (5), (8) у вирази (10) та (11), одержимо шукані подання для обчислення напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \varepsilon(d_5 - \varepsilon d_2) \left(\frac{d_3 d_4 \lambda - 2\mu_1 d_1 E(k)}{2\lambda d_5 Q_1} \right) \times \\ & \times \left(p_3 \mu E(k) - b^2 (p_1(2 + \mu) + p_2) \frac{F_1(k)}{a^2} - (p_2(2 + \mu) + p_1) F_2(k) \right) - \\ & - \frac{E(k)}{Q_1} \left(p_3 (d_5 d_6 - \varepsilon(d_4 - 2\mu_1 \mu)) + \varepsilon(p_1 + p_2)(\mu - \mu_1) + 2GT_0 d_2 d_5 (\alpha_1 - \alpha) \right) + p_3; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\varepsilon}{2d_5} (p_1(2 + \mu) + p_2 - \mu p_3);$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\varepsilon}{2d_5} (p_2(2 + \mu) + p_1 - \mu p_3), \quad (x, y) \in S$$

у включенні та відповідно

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \frac{2p_3 \lambda}{Q_1} (d_5 d_6 - \varepsilon(d_4 - 2\mu_1 \mu)) + \frac{p_3 \mu (d_5 - \varepsilon d_2)}{2d_1 d_2 d_5} \left(\mu + E(k) \frac{Q_3}{Q_1} \right) + \\ & + \frac{2\lambda \varepsilon}{Q_1} ((p_1 + p_2)(\mu - \mu_1) + 2GT_0 d_2 d_5 (\alpha_1 - \alpha)) - \left(\frac{d_5 - \varepsilon d_2}{2d_1 d_2 d_5} \right) \times \\ & \times \left[(p_1(2 + \mu) + p_2) \left(\frac{b^2 Q_3 F_1(k)}{a^2 Q_1} + (d_1 f^2(\varphi) - b^2 d_3) \frac{\cos^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) + \right. \\ & \left. + (p_2(2 + \mu) + p_1) \left(\frac{Q_3 F_2(k)}{Q_1} + (d_1 f^2(\varphi) - a^2 d_3) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) \right] + p_3; \quad (13) \\ & Q_3 = d_3 d_5 d_6 + \varepsilon d_2 \mu_1 k, \end{aligned}$$

концентрації напружень біля нього.

Якщо у виразі (13) покласти $\varepsilon = 0$, то одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \frac{2p_3 \lambda}{E(k)} + p_3 \left(1 + \frac{\mu}{2d_2} \right) - \\ & - \frac{1}{2d_1} \left(\frac{d_1}{2d_2} (3 + \mu)(p_1 + p_2) - (p_2 - p_1) \left(\frac{d_1 E(k) - 2d_3 F_2(k)}{2E(k)} - (d_1 f^2(\varphi) - a^2 d_3) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) \right), \quad (14) \end{aligned}$$

яке виражає концентрацію напружень σ_{zz} на контурі еліпсоїдальної порожнини за тривісного навантаження тіла.

Якщо розрахункову модель (2), (3), (4) включення розглянути у простішому (менш точному) варіанті, тобто вважати, що $[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = 0$ для $(0 \leq \varepsilon \leq 1)$, то рівняння (6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{Gd_6 - G_1 \mu_1 d_3}{2\pi G_1 d_1} \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_* d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{2d_4 [\tilde{u}_z]_*}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \\ & = \frac{2p_3}{G_1 G d_2} (G_1 (d_4 - 2\mu_1 \mu) - G d_2 d_6) + \frac{2}{G d_2} (p_1 + p_2)(\mu_1 - \mu) + 4d_5 T_0 (\alpha - \alpha_1). \quad (15) \end{aligned}$$

Розв'язком рівняння (15) буде функція

$$[\tilde{u}_z]_* = b \left[2d_1 \left(p_3 (d_5 d_6 - \varepsilon (d_4 - 2\mu_1 \mu)) + \varepsilon (p_1 + p_2) (\mu - \mu_1) + 2GT_0 d_2 d_5 \varepsilon (\alpha_1 - \alpha) \right) \right] \cdot \frac{1}{GQ_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (16)$$

Тоді для обчислення напружень у включенні матимемо формули

$$\sigma_{zz} = \frac{E(k)}{Q_1} \left(p_3 (\varepsilon (d_4 - 2\mu_1 \mu) - d_5 d_6) - \varepsilon (p_1 + p_2) (\mu - \mu_1) - 2GT_0 d_2 d_5 \varepsilon (\alpha_1 - \alpha) \right) + p_3; \quad (17)$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{\sigma}_{yy} = 0; \quad (x, y) \in S,$$

а для знаходження концентрацій напружень у матриці біля включення – подання

$$\sigma_{zz} = \frac{2p_3 \lambda}{Q_1} (d_5 d_6 - \varepsilon (d_4 - 2\mu_1 \mu)) + \frac{2\lambda \varepsilon}{Q_1} ((p_1 + p_2) (\mu - \mu_1) + 2GT_0 d_2 d_5 (\alpha_1 - \alpha)) + p_3. \quad (18)$$

Із подань (16), (17), (18) при $\mu_1 = 0$, $T_0 = 0$, $p_1 = p_2 = 0$ одержуємо відомий результат [2, 3].

Як частковий випадок ($c = 0$, $\varepsilon = 0$) розв'язаної тут задачі, на основі праць [1, 4] і співвідношення (14), одержимо формулу

$$K_I = \frac{p_3 \sqrt{\pi b f(\varphi)}}{E(k) \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{\pi f(\varphi)} c_0}{4 \sqrt{ab}} \frac{1}{d_1} \times \left((3 + \mu) \frac{p_1 + p_2}{2d_2} - (p_2 - p_1) \left((a^2 d_3 - d_1 f^2(\varphi)) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} + \frac{d_1 E(k) - 2d_3 F_2(k)}{2E(k)} \right) \right), \quad (19)$$

для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I у тілі з еліптичною тріщиною $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$. Вона дає змогу врахувати вплив на K_I паралельних до площини тріщини $z = 0$ зусиль p_1 і p_2 , оскільки вважалось, що p_1 і p_2 на значення K_I не впливають. Тут c_0 – піввісь еліпсоїда $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c_0^2 = 1$, який утворюється унаслідок переміщень поверхні еліптичної тріщини за дії зусиль p_3 . Якщо переміщення відбуваються у межах пружної деформації, то величину c_0 можна обчислити на основі співвідношень (7) або (16), у яких треба покласти $\varepsilon = 0$, $p_1 = p_2 = 0$. У випадку малої області пружно-пластичних деформацій у вершині тріщини c_0 визначають експериментально.

Література

1. Стадник М.М. Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 30-40.
2. Панасюк В.В., Андрейків О.Є., Стадник М.М. Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням // Доповіді АН УРСР : серія А. – 1976. – № 7. – С. 636-639.
3. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К. : Наук. думка, 1986. – 216 с.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М. : Наука, 1974. – 640 с.