

УДК 519.863

Доц. М.В. Дацко, асист. О.М. Ланьош –  
Львівський НУ ім. Івана Франка

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ІЗ НЕЛІНІЙНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Запропоновано підхід до розв'язування задач математичного програмування для випадку нелінійних обмежень.

**Ключові слова:** метод декомпозиції, нелінійні обмеження, оптимальне використання ресурсів.

Assoc. prof. M.V. Dacko; assist. O.M. Lanyosh –  
L'viv NU named after Ivan Franko

## The approach to solving of the mathematical programming problems in the case of non linear restrictions is introduced

Offered approach to untying of tasks of the mathematical programming for the case of nonlinear limitations.

**Keywords:** decomposition method, non linear restrictions, optimal use of resources.

Можна навести багато прикладів, коли при постановці задач лінійного програмування невідомими, чи не до кінця визначеними є значення матриці обмежень задачі лінійного програмування.

Нехай, виходячи зі сказаного вище, маємо задачу лінійного програмування, задану у вигляді

$$\max L = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a^j x_j = b^0, \quad (2)$$

$$A^j a^j \leq b^j, \quad j = \overline{1, k} \text{ де } k \leq n, \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

У задачі (1-4) частина стовпців, зокрема з першого по k-тий, матриці системи обмежень (2) не задані явно, а є розв'язком систем нерівностей (3). Така задача має вважатися задачею нелінійного програмування, тому, якщо стовпці  $a^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) вважати невідомими, то система обмежень (2) є нелінійною з усіма наслідками, що з цього випливають. Отже, найважливіше, що таку задачу не можна розв'язувати за допомогою методів типу симплексного.

Задачі такого типу можуть мати різну економічну інтерпретацію. Розглянемо, наприклад, задачу про оптимальне використання ресурсів. Математичну модель цієї задачі запишемо:

$$\max L = \sum_{j=1}^n c_j x_j; \quad \sum_{j=1}^n a^j x_j \leq b^0; \quad \sum_{j=1}^n a^j x_j \leq b^0.$$

У цій задачі  $m$ -вимірний вектор  $b^0$  своїми компонентами задає наявні запаси ресурсів,  $x_j$  шукані обсяги випуску продукції,  $c_j$  прибуток від реалі-

зації одиниці продукції  $j$ -го виду, а  $m$ -вимірні стовпчики  $a^j$  містять затрати ресурсів кожного виду на випуск одиниці продукції  $j$ -го виду. В деяких виробничих процесах, наприклад у хімічній промисловості ці затрати на випуск одиниці продукції певних (або всіх) видів можуть бути не детермінованими, а залежними від використання тієї чи іншої технології, що застосовується у виробництві. Тоді, якщо ці залежності можна точно, або хоча б наближено, подати у вигляді лінійних систем виду

$$A^j a^j \leq b^j, \quad j = \overline{1, k} \quad \text{де } k \leq n,$$

То тоді отримаємо задачу виду (1)-(4). За допомогою методу декомпозиції задачу (1-4) можна розв'язати з використанням лінійних методів розв'язку. Перепишемо умови задачі 1-4 у вигляді:

$$\max L = \sum_{j=1}^k c_j x_j + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^k a^j x_j + \sum_{j=k+1}^n a^j x_j = b^0, \quad (6)$$

$$A^j a^j \leq b^j, \quad j = \overline{1, k}, \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Для спрощення викладок приймемо допущення про те, що кожна із  $k$  систем (7) визначає обмежену множину. Подібно, як це зроблено в загальному методі декомпозиції, підхід, який буде розглянуто нижче, може бути узагальнений і на загальний випадок.

Нехай  $\{a_v^j\}$ ,  $v = \overline{1, S_j}$  (9) сукупність всіх вершин системи обмежень (7) для кожного  $j = \overline{1, k}$ . Тоді довільний стовпець  $a^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) системи обмежень (6) можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації стовпців сукупності (9).

$$a^j = \sum_{v=1}^{S_j} a_v^j z_v^j, \quad \sum_{v=1}^{S_j} z_v^j = 1, \quad z_v^j \geq 0, \quad v = \overline{1, S_j} \quad (10)$$

Перетворимо задачу (5-8) за наступними правилами:

1. Кожне  $x_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) у першій частині цільової функції помножимо на рівну одиниці суму  $\sum_{v=1}^{S_j} z_v^j$

2. Кожне  $a^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) у лівій частині системи обмежень (6) замінимо сумою  $\sum_{v=1}^{S_j} a_v^j z_v^j$

Унаслідок одержимо задачу такого виду:

$$\max L = \sum_{j=1}^k c_j x_j \sum_{v=1}^{S_j} z_v^j + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^k \left( \sum_{v=1}^{S_j} z_v^j a_v^j \right) x_j + \sum_{j=k+1}^n a^j x_j = b^0, \quad (12)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad z_v^j \geq 0. \quad (13)$$

Очевидно, якщо  $a^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) подані у вигляді (10), то системи (7) задовольняються автоматично. Перетворимо одержану задачу так:

$$\max L = \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^{S_j} c_j x_j z_v^j + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^{S_j} a_v^j x_j z_v^j + \sum_{j=k+1}^n a^j x_j = b^0, \quad (15)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad z_v^j \geq 0 \quad j = \overline{1, k}, \quad v = \overline{1, S_j}. \quad (16)$$

Далі зробимо заміну  $x_j z_v^j = y_v^j$  ( $j = \overline{1, k}, v = \overline{1, S_j}$ ) (17). Враховуючи невід'ємність  $x_j$  та  $z_v^j$ , що слідує з умов (16),  $y_v^j$  також невід'ємні. Одержуємо задачу

$$\max L = \sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^{S_j} c_j y_v^j + \sum_{j=k+1}^n c_j x_j, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{v=1}^{S_j} a_v^j y_v^j + \sum_{j=k+1}^n a^j x_j = b^0, \quad (19)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad y_v^j \geq 0 \quad j = \overline{1, k}, \quad v = \overline{1, S_j}. \quad (20)$$

Задачу (18-20) назвемо X-Y задача. Для розв'язування цієї задачі пропонується застосувати симплекс-метод з оберненою матрицею. При такому підході до її розв'язування не потрібно мати всі стовпці  $a_v^j$ ,  $j = \overline{1, k}, v = \overline{1, S_j}$  (стовпці  $a^j$ ,  $j = \overline{k+1, n}$ , відомі). Достатньо на кожній ітерації методу мати їх сумарну кількість рівну  $m$ , оскільки система обмежень (16) складається із  $m$  рівнянь.

Нехай маємо базисний план X-Y задачі (18-20), перевіримо його на оптимальність. Із запису X-Y задачі видно, що вона має дві групи змінних  $y_v^j$  ( $j = \overline{1, k}, v = \overline{1, S_j}$ ) та  $x_j$  ( $j = \overline{k+1, n}$ ). Для цього будемо шукати найменшу серед оцінок в обидвох групах змінних.

Нехай B-базисна матриця відповідна базисному плану, який перевіряється на оптимальність. Оцінки змінних  $x_j$  ( $j = \overline{k+1, n}$ ) можна обчислити явно за відомою формулою оцінок  $d_j = c_B^T B^{-1} a^j - c_j$ ,  $j = \overline{k+1, n}$ , або  $d_j = \Lambda^T a^j - c_j$ , де  $\Lambda^T = c_B^T B^{-1}$ .

Для оцінок  $\Delta_v^j$  решти змінних  $y_v^j$  в кожній з  $k$  груп шукаємо найменші

$$\min \Delta_v^j = \min_{v=1, S_j} (c_B^T B^{-1} a_v^j - c_j) = \min_{v=1, S_j} (\Lambda^T a_v^j) - c_j.$$

Для цих оцінок задача визначення найменшої оцінки може бути сформульована так: серед вершин кожного многогранника (3) знайти таку, яка мінімізує лінійну форму  $\Lambda^T a^j$ . Визначити такі вершини можна розв'язуючи задачі (назвемо їх  $a_\lambda$  – задачами).

$$\begin{aligned} \Lambda^T a^j &\Rightarrow \min \\ A^j a_j &\leq b_j, \quad j = \overline{1, k} \end{aligned}$$

Якщо  $a_{r_j}^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) – оптимальні плани цих задач, то умовою оптимальності плану Х-У задачі, котрий перевіряється, є виконання умов:

$$d_j \geq 0, \quad j = \overline{k+1, n}, \quad (21)$$

$$\Delta_{r_j}^j = \Lambda^T a_{r_j}^j - c_j \geq 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (22)$$

Якщо серед умов (21,22) виконуються не всі, то план Х-У задачі не оптимальний і для його покращення потрібно ввести в базу стовпець коефіцієнтів при невідомій, що має найменшу оцінку. Якщо найменшою є одна із оцінок  $d_j, j = \overline{k+1, n}$ , то в базу вводимо відповідний стовпець  $a_j$ , якщо ж найменшою є одна із оцінок  $\Delta_{r_j}^j$ , то в базу вводиться відповідний вектор  $a_{r_j}^j$ , що є оптимальним планом відповідної  $a_\lambda$ -задачі.

Виходячи із наведених вище міркувань, можна запропонувати такий алгоритм розв'язку задачі (11)-(13):

1. Задачу (11)-(13) зводимо до канонічної форми.

2. Будуємо початковий базисний план і заповнюємо початкову симплекс-таблицю для симплекс методу з оберненою матрицею Х-У задачі. Якщо система обмежень (2) була системою нерівностей типу " $\leq$ " і вектор  $b^0$  мав невід'ємні компоненти, то початковий план очевидний. Базисними будуть доповнювальні змінні, додані до лівих частин усіх нерівностей. Вектор  $c_B$  буде дорівнювати 0-вектору. Базисна матриця В є одиничною матрицею. Тому  $\Delta^T = c_B^T B^{-1} = (0, \dots, 0)$  нульова стрічка. Якщо серед обмежень (2) були рівняння або (і) нерівності типу " $\geq$ ", то для визначення початкової бази Х-У задачі можна використати метод штучного базису (в обмеження, які не мають базисних змінних вводяться штучні змінні з коефіцієнтом М у цільовій функції, де М – як завгодно велике число).

3. Обчислюємо  $\Delta^T = c^T B^{-1}$ .

4. Обчислюємо оцінки  $d_j, j = \overline{k+1, n}$  за формулою  $d_j = \Lambda^T a^j - c_j$ .

5. Розв'язуємо к  $a_\lambda$  задач  $\begin{aligned} \Lambda^T a^j &\Rightarrow \min \\ A^j a^j &\leq b_j, \quad j = \overline{1, k} \end{aligned}$ . Нехай  $a_{r_j}^j$  оптимальні плани

цих задач.

6. Обчислюємо к найменших оцінок для кожної з к груп невідомих  $y_v^j$  ( $j = \overline{1, k}$ ) за формулою  $\Delta_{\min}^j = \Delta^T a_{r_j}^j - c_j$ .

7. Серед оцінок  $d_j, j = \overline{k+1, n}$  та  $\Delta_{\min}^j, (j = \overline{1, k})$  вибираємо найменшу. Якщо вона від'ємна, то робимо висновок про те, що план Х-У задачі, який перевіряється, не є оптимальним і переходимо на наступний пункт. У протилежному випадку план Х-У задачі оптимальний і переходимо на пункт.

8. Для покращення плану Х-У задачі в базис потрібно ввести стовпець коефіцієнтів при невідомій, яка має найменшу оцінку. Це може бути або котрийсь із стовпців  $a_j, j = \overline{k+1, n}$ , якщо найменшою виявилась котрась із оцінок

$d_j$ , або розв'язок котроїсь  $a_\lambda$  задачі, якщо найменшою була оцінка з групи оцінок  $\Delta_j^i$ . Для цього обчислюємо добуток оберненої матриці до базисної на вибраний для введення в базу стовпець. Унаслідок одержуємо розв'язковий стовпець. Після цього виконуємо симплекс перетворення, внаслідок чого отримуємо новий базисний план X-Y задачі і обернену матрицю до нової базисної. Далі переходимо на пункт (3).

9. Із оптимального плану X-Y задачі отримуємо оптимальний план початкової задачі. Якщо серед базисних компонент оптимального плану X-Y задачі є змінні  $x_j$ , ( $j \geq k+1$ ), то їхні значення в оптимальному плані X-Y задачі залишаються і в оптимальному плані початкової задачі. Якщо ж серед базисних змінних їх нема, то вони мають значення рівні нулю.

Значення змінних  $x_j$  ( $v \leq k$ ) в оптимальному плані початкової задачі рівні  $x_j^{onm} = \sum_{m=1}^{S_j} y_v^{j onm}$ .

Таким чином, запропонований у статі підхід дає змогу розв'язати задачу лінійного програмування із врахуванням можливих невідомих значень матриці обмежень за допомогою методу декомпозиції.

**УДК 681.518:004.9** Ст. наук. співроб. Л.А. Блонський, канд. фіз.-мат. наук –  
Міжрегіональна академія управління персоналом

## СИНЕРГЕТИЧНІ ПРИНЦИПИ ПРОЕКТУВАННЯ АВТОМАТИЗОВАНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянуто основні засади та методологію синергетичного підходу до проектування автоматизованих інформаційних систем

**Ключові слова:** синергетичні принципи, автоматизовані інформаційні системи.

*Senior research officer L.A. Blonsky –  
Inter-Regional Academy of Personnel Management*

### The synergetic basic principles in the information automated systems design

The synergetic basic principles and methodology in the information automated systems design are considered.

**Keywords:** synergetic principles, information automated systems.

Основним напрямом розвитку всіх сфер діяльності сучасного суспільства є створення та вдосконалення автоматизованих інформаційних систем різного призначення, підвищення їх продуктивності, надійності та якості. Саме у цьому напрямі відбувається інтенсифікація пошукових робіт спеціалістів з інформаційних технологій: проектувальників, дослідників, програмістів, дизайнерів. Для успішного досягнення позитивних результатів важливо мати сучасне світобачення у загальному підході до процесу проектування та дослідження інформаційних систем. Таким світобаченням сьогодні є синергетика – наука і методологія вивчення процесів самоорганізації, виникнення, під-