

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 539.3.

Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук;
доц. І.В. Дідух, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

ТОНКЕ ВІДНОСНО ЖОРСТКЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ПРУЖНОМУ ПРОСТОРІ ПІД ОДНОВІСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Отримано розв'язок задачі для простору з тонким включенням під одновісним розтягом-стиском. Задачу зведено до розв'язку системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. У випадку еліпсоїдального включення одержано замкнуті аналітичні формули для обчислення концентрації напружень у матриці та у включенні.

Prof. M.M. Stadnyk; assoc. prof. I.V. Didukh – NUFWT of Ukraine, L'viv

Thin relatively hard inclusion in matrix under one-axid strain

Solution of the problem for space with the thin inclusion under one-axid strain compression is obtained. The problem is reduced to solution of the system of two singular integral – differential equations. In case of ellipsoidal inclusion analytical formulas for calculating of stress concentration in matrix and in inclusion are obtained.

Постановка і розв'язок задачі. Розглянемо пружне тіло, до якого на безмежності прикладені рівномірно розподілені напруження p . Декартову систему координат $Oxyz$ виберемо так, щоби вісь Oz була паралельною до зусиль p . У тілі розміщено пружне відносно жорстке ($1 \leq E_1/E = \varepsilon < \infty$; E, E_1 – модулі Юнга матриці та включення відповідно) еліпсоїдальне включення, яке обмежене поверхнею $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a, b \gg c$). Задача полягає у встановленні напружень у включенні та концентрації напружень у матриці біля нього.

Розв'язок задачі, на основі математичної моделі включення [1], зводиться до системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi G} \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_S [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \ln(x - \xi + R) d\xi d\eta + D_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_S [\tilde{\sigma}_{zy}]_* \cdot \\ & \ln(x - \xi + R) d\xi d\eta + \frac{1}{hG_1} \int_{-a}^x [\tilde{\sigma}_{zx}]_* dx + D_3 \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta = \frac{p\mu}{Gd_2} - 2p \frac{G\mu d_2 - G_1\mu d_5}{G_1 G d_2 d_4} + A_1; \\ & \frac{1}{2\pi G} \left(D_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \iint_S [\tilde{\sigma}_{zy}]_* \ln(y - \eta + R) d\xi d\eta + D_2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \iint_S [\tilde{\sigma}_{zx}]_* \cdot \ln(y - \eta + R) d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{hG_1} \int_{-b}^y [\tilde{\sigma}_{zy}]_* dy + D_3 \Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta = \frac{p\mu}{Gd_2} - 2p \frac{G\mu d_2 - G_1\mu d_5}{G_1 G d_2 d_4} + A_2, \quad (x, y) \in S, z = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут S – еліптична область $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; $h = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}; \quad D_1 = \frac{\mu_1 d_3 G - \kappa G_1}{2G_1 d_1 d_4}; \quad D_2 = \frac{2\mu_1 d_3 G + d_4 G_1 - d_5 \kappa G_1}{8\pi G_1 G d_1 d_4};$$

$$D_3 = \frac{d_3 G_1 + \mu_1 G}{2\pi G_1 d_1 d_4}; \quad G = \frac{E}{2d_2}; \quad G_1 = \frac{E_1}{2d_5}; \quad d_1 = 1 - \mu; \quad d_2 = 1 + \mu; \quad d_3 = 1 - 2\mu;$$

$d_4 = 1 - \mu_1$; $d_5 = 1 + \mu_1$; $\kappa = 3 - 4\mu$; μ, μ_1 – відповідно коефіцієнт Пуассона матриці та включення; $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$, $[\tilde{u}_z]_*$ – невідомі стрибки збурених (наявністю в тілі включення) дотичних напружень та нормальних зміщень берегів тріщини S , на яких діють навантаження, знесені з поверхонь включення $z = \pm h$; A_1, A_2 – довільні сталі. Крім цього у рівняннях (1) враховано, що напружено-деформівний стан $\hat{\sigma}^0, \bar{u}^0$ в однорідному тілі визначається поданнями

$$(\sigma_{zz}^0)_* = 2p; \quad [u_z^0]_* = \frac{pc}{Gd_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad \frac{\partial(u_x^0)_*}{\partial x} = \frac{\partial(u_y^0)_*}{\partial y} = -\frac{\mu p}{Gd_2}, \quad (2)$$

де $[B]_* = B^+ - B^-$; $(B)_* = B^+ + B^-$, "+" і "-" означає, що значення величини $B^\pm$ береться відповідно на поверхнях $\pm h$. Тензор напружень $\hat{\sigma}$ і вектор зміщень $\bar{u}$ у тілі з включенням визначаються суперпозицією задач [1]

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^0 + \hat{\hat{\sigma}}; \quad \bar{u} = \bar{u}^0 + \bar{\bar{u}}. \quad (3)$$

Оскільки розглядається відносно жорстке ($1 \leq \varepsilon < \infty$) включення, то вважатимемо, що основними параметрами, які характеризують напружено-деформівний стан у такому включенні, будуть невідомі стрибки напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$. Вони повинні задовольняти умови

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = 0, \quad (4)$$

якщо $\varepsilon = 1$, $\mu_1 = \mu$.

Стрибок зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ для такого включення вважатимемо відомим. Він повинен задовольняти умови:

а) якщо $\varepsilon = 1$, $\mu_1 = \mu$

$$[\tilde{u}_z]_* = 0, \quad (5)$$

б) якщо $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$

$$[u_z]_* = [\tilde{u}_z]_* + [u_z^0]_* = 0 \Rightarrow [\tilde{u}_z]_* = -[u_z^0]_*. \quad (6)$$

Враховуючи, що для стрибка зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ відомі крайні значення (5), (6) і, користуючись інтерполяційним підходом, для наближеного визначення $[\tilde{u}_z]_*$ матимемо подання

$$[\tilde{u}_z]_* = C_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; \quad C_1 = \frac{pc(G - G_1)}{GG_1 d_2}, \quad 1 \leq \varepsilon \leq \infty. \quad (7)$$

Розв'язок системи рівнянь (1) шукатимемо у вигляді таких функцій:

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{C_2 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{C_3 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad (8)$$

де C_2, C_3 – невідомі сталі.

Підставляючи вирази (7), (8) у рівняння (1), одержимо таку систему рівнянь відносно C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} C_2 \left(\frac{bD_1 F_1(k)}{G} - \frac{a^2 F_2(k)}{bG} - \frac{a^2}{cG_1} \right) + 2\pi b C_3 D_2 F_2(k) = \\ = \frac{p(\mu G_1(3 + \mu_1) - G(\mu d_5 + 2\mu_1))}{GG_1 d_2 d_4} + \frac{pE(k)(G - G_1)(G_1 d_3 + \mu_1 G)}{\lambda GG_1^2 d_1 d_2 d_4}; \\ C_3 \left(\frac{bD_1 F_2(k)}{G} - \frac{b^3 F_1(k)}{a^2 G} - \frac{b^2}{cG_1} \right) + 2\pi b C_2 D_2 F_1(k) = \\ = \frac{p(\mu G_1(3 + \mu_1) - G(\mu d_5 + 2\mu_1))}{GG_1 d_2 d_4} + \frac{pE(k)(G - G_1)(G_1 d_3 + \mu_1 G)}{\lambda GG_1^2 d_1 d_2 d_4} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{де: } E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta; F_1(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}; F_2(k) = \frac{a^2 E(k) - b^2 K(k)}{a^2 k^2};$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Довільні сталі A_1, A_2 у рівняннях (9) вибрано такими

$$A_1 = A_2 = -\frac{p\mu}{G_1 d_2}, \quad (10)$$

щоби розв'язок (8) задовольняв частковий випадок задачі при $\varepsilon = 1, \mu_1 = \mu$ (умова (4)).

Розв'язавши систему рівнянь (9), одержуємо

$$C_2 = \frac{2pbQ_1}{\varepsilon a^2 \lambda d_2^2 Q_2}; C_3 = \frac{a^2 C_2}{b^2}, \quad (11)$$

$$\text{де } Q_1 = \varepsilon \lambda d_1 d_2 (\mu \varepsilon d_2 (3 + \mu_1) - d_5 (\mu d_5 + 2\mu_1)) + E(k)(d_5 - \varepsilon d_2)(\varepsilon d_2 d_3 + \mu_1 d_5);$$

$$Q_2 = E(k)(\mu_1 d_3 d_5 - \kappa d_2 \varepsilon) - 2\lambda d_1 d_4 d_5, \lambda = \frac{b}{c}.$$

Аналізуючи вирази (8), (11) бачимо, що при $\varepsilon = 1, \mu_1 = \mu$ задовольняється умова (4), а при $\varepsilon \rightarrow \infty, \mu_1 = 0$ маємо

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{2pbx(d_3 E(k) - 3\lambda \mu d_1)}{\lambda a^2 d_2 \kappa E(k) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{2py(d_3 E(k) - 3\lambda \mu d_1)}{\lambda b d_2 \kappa E(k) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}. \quad (12)$$

При $c \rightarrow 0$ із (12) отримуємо частковий результат для пластинчастого абсолютно жорсткого еліптичного включення

$$[\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{-6pb\mu d_1 x}{a^2 d_2 \kappa E(k) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{-6p\mu d_1 y}{b d_2 \kappa E(k) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad (13)$$

з якого для $a = b$ ($E(k) = \pi/2$) отримуємо відомі [2, 3] подання для пластинчастого дископодібного абсолютно жорсткого включення.

На основі співвідношень (7), (8), (11) і даних [1] для обчислення напружень у включенні матимемо формули

$$\sigma_{zz} = \frac{E(k)(a^2 d_3 C_2 - 2GC_1)}{4bd_1} + p, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{C_2 \lambda a^2}{2b} - \frac{p\mu}{2d_2}, \quad (x, y) \in S. \quad (14)$$

Підставивши у вирази (14) співвідношення (11), маємо подання

$$\sigma_{zz} = pE(k) \frac{\left(\varepsilon d_2 - d_5 + \frac{d_3 Q_1}{Q_2} \right)}{2\lambda d_1 d_2^2 \varepsilon} + p; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{pQ_1}{\varepsilon d_2^2 \varepsilon Q_2} - \frac{p\mu}{2d_2}, \quad (x, y) \in S, \quad (15)$$

які виражають напруження в еліпсоїдальному пружному ($1 \leq \varepsilon < \infty$) включенні.

Як бачимо ці напруження є сталими, що відповідає відомій теоремі [4] про еліпсоїдальне включення в однорідному полі напружень. У частковому випадку при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$ із (15) одержуємо формули

$$\sigma_{zz} = \frac{p(4d_1 E(k) - 3\lambda \mu d_3)}{2\lambda d_2 \kappa} + p; \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{p(E(k)d_3 - 3\mu \lambda d_1)}{\kappa d_2 E(k)} - \frac{p\mu}{2d_2}, \quad (x, y) \in S \quad (16)$$

для обчислення напружень в абсолютно жорсткому еліпсоїдальному включенні.

При $a = b$ із (16) отримуємо формули для обчислення напружень в абсолютно жорсткому сфероїдальному включенні. Аналіз виразів (16) показує, що при $c \rightarrow 0$ (випадок пластинчастого абсолютно жорсткого дископодібного включення) напруження $\sigma_{xx} \rightarrow -\infty$ і $\sigma_{yy} \rightarrow -\infty$, а σ_{zz} набуває вигляду

$$\sigma_{zz} = p \left(1 - \frac{3\mu d_3}{2d_2 \kappa} \right), \quad (x, y) \in S. \quad (17)$$

Введено локальну систему координат $O_1 n t z$,

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi - t \sin \theta + n \cos \theta, \\ y &= b \sin \varphi + t \cos \theta + n \sin \theta, \quad z = z, \end{aligned} \quad (18)$$

де φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

θ – кут між додатними напрямками осей $O_1 x$ і нормалі до контура $O_1 n$. На основі [5] і (7), (8), (18) одержуємо формулу для визначення розподілу напружень σ_{zz} у матриці в околі контура еліпсоїдального включення.

$$\sigma_{zz} = \frac{(\rho + n)\sqrt{\rho}(2GC_1 - a^2d_3C_2)}{2d_1c\sqrt{(\rho + 2n)^3}} + \frac{\rho\sqrt{\rho}C_2a^2\lambda}{2b\sqrt{(\rho + 2n)^3}} + p, \quad z = 0, \quad 0 \leq n < a, b, \quad (19)$$

де $\rho = \frac{bf(\varphi)}{a\lambda^2}$ – радіус заокруглення вершини включення;

$$f(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Співвідношення (19) показує, що напруження σ_{zz} на контурі ($n = 0$) еліпсоїдального пружного включення не залежить від кута φ , тобто є величиною сталою

$$\sigma_{zz} = \frac{2GC_1 + a^2\mu C_2}{2d_1c} + p. \quad (20)$$

Напруження σ_{zz} , які визначаються згідно з формулою (19), можна розглядати, зокрема, як функцію трьох змінних n, c, ε , тобто $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(n, c, \varepsilon)$. Поклавши у (19) спочатку $n = 0$, а потім $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$ із виразу (19) одержимо формулу

$$\sigma_{zz} = \frac{p(E(k)(\mu d_3 - \kappa) - 3\mu^2\lambda d_1)}{d_1d_2\kappa E(k)} + p \quad (21)$$

для наближеного обчислення концентрації напружень у матриці на контурі абсолютно жорсткого еліпсоїдального включення, з якої випливає, що при $c \rightarrow 0$ напруження $\sigma_{zz} \rightarrow -\infty$, при $p > 0$.

Якщо у співвідношенні (19) спочатку спрямувати $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\mu_1 = 0$, а потім $c \rightarrow 0$, то матимемо

$$\sigma_{zz} = \frac{3p\mu d_3\sqrt{bf(\varphi)}}{2d_2\kappa E(k)\sqrt{2an}} + O(n), \quad (22)$$

звідси при $a = b$ одержимо випадок абсолютно жорсткого дископодібного пластинчастого включення, тобто

$$\sigma_{zz} = \frac{3p\mu d_3\sqrt{a}}{\pi d_2\kappa\sqrt{2n}} + O(n). \quad (23)$$

Спрямовуючи в (22) $n \rightarrow 0$, бачимо, що $\sigma_{zz} \rightarrow +\infty$ при $p > 0$. Якщо у формулі (19) спочатку спрямувати $c \rightarrow 0$, то при $n > 0$ розподіл напружень σ_{zz} набуває сталого значення p , тобто не залежить від ε , що відповідає випадку однорідного тіла.

Таким чином, границя функції $\lim_{n \rightarrow 0, c \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty} \sigma_{zz}(n, c, \varepsilon)$ залежить від того, у

якій послідовності змінні n, c, ε прямують до відповідних граничних значень, а це означає, що границя не існує. Тому при використанні розв'язку пружної задачі для тіла з абсолютно жорстким пластинчастим ($c = 0$) включенням в задачах механіки руйнування необхідно це враховувати, оскільки КІН K_I

(основний параметр лінійної механіки руйнування) для пластинчастого еліптичного абсолютно жорсткого включення буде приймати різні значення. Зокрема, якщо K_I визначати згідно з формулою

$$K_I = \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{2\pi n} \sigma_{zz}, \quad (24)$$

у яку підставити вираз (22), то одержимо, що

$$K_I = \frac{3pd_3\mu\sqrt{\pi b f(\varphi)}}{2d_2\kappa E(k)\sqrt{a}}. \quad (25)$$

Якщо ж для визначення K_I застосувати формулу

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sigma_{zz}, \quad (26)$$

у яку підставити подання (21), то

$$K_I = -\frac{3p\mu^2\sqrt{\pi b f(\varphi)}}{2d_2\kappa E(k)\sqrt{a}}. \quad (27)$$

Порівняння між собою КІН K_I , що даються формулами (25) і (27), показує, що вони не збігаються. Це пояснюється тим, що у формулі (24) не враховується вплив на K_I торцевих напружень $\tilde{\sigma}_{nn}$, що діють на контурі включення, які виражаються другим доданком у правій частині рівності (19).

Література

1. Стадник М.М. Об одном методе приближенного решения трехмерной упругой задачи для тела с тонким включением// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1988, № 1. – С. 53-65.
2. Kassir M.K., Sih G.C. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity// Int.J. Solids Struct. – 1968. – V.4. – p.225-241.
3. Силованюк В.П. Жесткое пластинчатое включение в упругом пространстве// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1984, № 5. – С. 80-84.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1983. – 296 с.
5. Стадник М.М. Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994, № 4. – С. 30-40.

УДК 621.9.048.6

Т.С. Ярошевич – Луцький НТУ; доц. П.П. Нахаєв, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів; проф. М.П. Ярошевич, д-р техн. наук – Луцький НТУ

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДУ РОЗБІГУ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ДЕБАЛАНСНИМ ЗБУДНИКОМ ТА АСИНХРОННИМ ЕЛЕКТРОДВИГУНОМ

Розглянуто динамічні процеси, що відбуваються під час розбігу дебалансного збудника резонансної вібраційної машини з двигуном обмеженої потужності. Проаналізовано вплив на процес розбігу жорсткості пружної підвіски робочого органу.