

5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 539.3 Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

ВПЛИВ ТИПУ НАВАНТАЖЕННЯ НА КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ТІЛА З ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ

Отримано нову теоретичну залежність для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I в тілі з еліптичною тріщиною при складному навантаженні. Встановлено величини зусиль, за яких в околі контура тріщини настає локальне руйнування.

Prof. M.M. Stadnyk – NUFWT of Ukraine, L'viv

The influence of type of loading on the coefficient of intensity of stress for body with elliptic crack

The new theoretical formula of calculation for K_I in the body with elliptic crack under complicated loading has been proposed. The value of force for start of local fracture in the place around of contour of crack has been obtained.

Розглянемо тривимірне пружне тіло, у якому міститься еліптична тріщина. Систему декартових координат $Oxyz$ виберемо так, щоби її початок знаходився у центрі еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. На безмежності до тіла прикладені рівномірно-розподілені зусилля q_1, q_2, p , кожне з яких паралельне відповідно до осей Ox , Oy , Oz . Користуючись силовим критерієм K_{Ic} , треба встановити граничне значення зусиль q_{1*}, q_{2*}, p_* .

Для розв'язку сформульованої задачі розглянемо спочатку більш загальну задачу теорії пружності. Вважатимемо, що у тілі замість тріщини розміщено еліпсоїдальну порожнину, обмежену поверхнею $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $c \ll a, b$. Така задача зводиться [1] до розв'язання системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_*}{R} d\xi d\eta + \frac{d_3}{2G} \iint_S \left([\tilde{\sigma}_{zx}]_* \frac{\partial R^{-1}}{\partial x} + [\tilde{\sigma}_{zy}]_* \frac{\partial R^{-1}}{\partial y} \right) d\xi d\eta = -\frac{4\pi p d_1}{G};$$

$$\int_{-a}^x [\tilde{\sigma}_{zx}]_* dx = \frac{c(q_1(2+\mu) + q_2 - p\mu)}{d_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$\int_{-b}^y [\tilde{\sigma}_{zy}]_* dy = \frac{c(q_2(2+\mu) + q_1 - p\mu)}{d_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$
(1)

відносно стрибків зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ та дотичних напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$, $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$ берегів $z = \pm 0$ еліптичної S тріщини $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, на яких діють навантаження, знесені з поверхонь $z = \pm h = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ еліпсоїдальної порожнини. Тут G – модуль зсуву матеріалу, $d_1 = 1 - \mu$; $d_2 = 1 + \mu$; $d_3 = 1 - 2\mu$, μ – коефіцієнт Пуассона; $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\tilde{u}_z = u_z - u_z^0$, $\tilde{\sigma}_{zx} = \sigma_{zx} - \sigma_{zx}^0$, $\tilde{\sigma}_{zy} = \sigma_{zy} - \sigma_{zy}^0$ – збурене поле зміщень і напружень, викликане наявністю у тілі порожнини; u_z^0 , σ_{zx}^0 , σ_{zy}^0 – поле зміщень і напружень в однорідному тілі.

Розв'язавши систему рівнянь (1), матимемо

$$[\tilde{u}_z]_* = D_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; [\tilde{\sigma}_{zx}]_* = \frac{D_2 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; [\tilde{\sigma}_{zy}]_* = \frac{D_3 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad (2)$$

де:

$$D_1 = \frac{b}{\lambda G E(k)} \left[p \left(2d_1 \lambda + \frac{\mu d_3 E(k)}{2d_2} \right) - \frac{d_3}{4a^2 d_2} (a^2 (3 + \mu) (q_1 + q_2) E(k) + \right. \\ \left. + d_2 (q_2 - q_1) (a^2 F_2(k) - b^2 F_1(k))) \right]; \lambda = \frac{b}{c}, \\ D_2 = -c \cdot \frac{q_1 (2 + \mu) + q_2 - p\mu}{a^2 d_2}; D_3 = -c \cdot \frac{q_2 (2 + \mu) + q_1 - p\mu}{b^2 d_2}; \\ F_1(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}; F_2(k) = \frac{1}{k^2} \cdot \left(E(k) - \frac{b^2}{a^2} K(k) \right); \\ E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta; K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}; k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Розв'язок (2) забезпечує відсутність стрибків напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини, тобто

$$[\sigma_{zx}]_* = [\tilde{\sigma}_{zx}]_* + [\sigma_{zx}^0] = 0; [\sigma_{zy}]_* = [\tilde{\sigma}_{zy}]_* + [\sigma_{zy}^0] = 0.$$

Перейшовши до локальної системи прямокутних координат $O_1 n t z$

$$x = a \cos \varphi - t \sin \theta + n \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi - t \cos \theta + n \sin \theta, \quad z = z \quad (3)$$

де: φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, θ – кут між додатними напрямками осей $O_1 x$ і нормалі до контура $O_1 n$, на основі [2], (2), (3) одержуємо асимптотичні подання

$$[\tilde{u}_z]_{*n}' = -\frac{D_1 \sqrt{f(\varphi)}}{\sqrt{-2abn}} + O(n);$$

$$[\tilde{\sigma}_{zn}]_* = ab\sqrt{ab} \cdot \frac{D_2 \cos^2 \varphi + D_3 \sin^2 \varphi}{f(\varphi)^{3/2} \sqrt{-2n}} + O(n), \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_{nn} = \frac{\lambda}{2b} \cdot (a^2 D_2 \cos^2 \varphi + b^2 D_3 \sin^2 \varphi); \quad (x, y) \in S,$$

$$f(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Використовуючи залежності (4) і результат [2], матимемо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \frac{2p\lambda}{E(k)} + p \left(1 + \frac{\mu}{2d_2} \right) - \frac{1}{2d_1} \left((3 + \mu) d_1 \frac{q_1 + q_2}{2d_2} - \right. \\ & \left. - (q_2 - q_1) \frac{d_1 E(k) - 2d_3 F_2(k)}{2E(k)} - (d_1 f^2(\varphi) - a^2 d_3) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

для визначення концентрації напружень на контурі ($n = 0$) еліпсоїдальної порожнини.

Вважатимемо тепер, що замість еліпсоїдальної порожнини у тілі розміщена еліптична тріщина. Введемо позначення

$$c_0 = c_1 + c_2, \quad (6)$$

де $2c_1$ – початкове (до навантаження тіла) розкриття поверхонь еліптичної тріщини при $x = 0$, $y = 0$, яке для "ідеальної" тріщини рівне нулю, тобто $c_1 = 0$, однак в експериментальних дослідженнях, взагалі кажучи, $c_1 \neq 0$, оскільки c_1 залежить від технології утворення тріщини у дослідному зразку; $2c_2$ – величина нормальних переміщень берегів тріщини при $x = 0$, $y = 0$, яка обчислюється (чи вимірюється) за умови, що на тіло діють лише зусилля p , напруження $q_1 = q_2 = 0$.

Якщо деформування тіла з "ідеальною" тріщиною відбувається в межах пружної деформації при дії зусиль p , то згідно з поданням (2), вона приймає форму еліпсоїдальної порожнини

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1, \quad c_2 = \frac{pd_1 b}{GE(k)}. \quad (7)$$

Для знаходження коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) $K_I^{(1)}$ скористаємося залежністю [1]

$$K_I^{(1)} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \frac{\sigma_{zz}}{2} \sqrt{\pi \rho}, \quad (8)$$

де ρ – радіус кривини у вершині порожнини; $\rho_0 = c_0^2 f(\varphi) / (ab)$; σ_{zz} – концентрація напружень (5) на контурі еліпсоїдальної порожнини з півосями a, b, c_0 .

Якщо $c_1 = 0$, то згідно з (7)

$$\rho_0 = \frac{p^2 d_1^2 b f(\varphi)}{a G^2 E^2(k)}. \quad (9)$$

Підстановка співвідношення (5) (при $c = c_0$) у залежність (8) дає подання

$$K_I^{(1)} = \frac{p\sqrt{\pi b f(\varphi)}}{E(k)\sqrt{a}} - \frac{c_0\sqrt{\pi f(\varphi)}}{4\sqrt{ab}} \left((3 + \mu) \frac{q_1 + q_2}{2d_2} - \right. \\ \left. - \frac{q_2 - q_1}{d_1} \left((a^2 d_3 - d_1 f^2(\varphi)) \frac{\sin^2 \varphi}{f^2(\varphi)} + \frac{d_1 E(k) - 2d_3 F_2(k)}{2E(k)} \right) \right) \quad (10)$$

яке показує, що зусилля q_1 і q_2 , які діють паралельно до площини тріщини, впливають на величину $K_I^{(1)}$, що хоч і опосередковано, відзначено в роботах [3, 4]. Частковий випадок подання (10) при $q_1 = q_2 = 0$ одержано в роботі [5]. Якщо у співвідношенні (10) покласти, що $a \rightarrow \infty$, $q_1 = \mu(q_2 + p)$, то отримаємо відоме [6] значення $K_I^{(1)}$ для пластини з тріщиною довжини $2b$, яка навантажена зусиллями p і q_2 , тобто

$$K_I^{(1)} = \sqrt{\pi b} \left(p - \frac{c_0 q_2}{2b} \right). \quad (11)$$

Треба сказати, що при одержанні формули (10) для $K_I^{(1)}$ вважається, що зусилля p діють на тіло з еліптичною тріщиною (півосі $a, b, 0$), а зусилля q_1, q_2 – на тіло з еліпсоїдальною порожниною (півосі a, b, c_0), яка утворилася в результаті дії навантаження p .

Аналіз формул (10) показує, що $K_I^{(1)}$ приймає екстремальні значення у точках $(0, \pm b, 0)$ або $(\pm a, 0, 0)$, залежно від величин $q_1, q_2, a/b$.

Якщо граничний стан настає в точках $(0, \pm b, 0)$, тобто при $\varphi = \pm\pi/2$, то на основі (10) та критерію Ірвіна [7], матимемо подання

$$p_*^{(1)} - \frac{c_{0*} E(k)}{8b} \left((3 + \mu) \frac{q_{1*} + q_{2*}}{d_2} - \frac{q_{2*} - q_{1*}}{d_1} \left(1 - 3\mu - \frac{2d_3 F_2(k)}{E(k)} \right) \right) = \frac{K_{Ic}^{(1)} E(k)}{\sqrt{\pi b}}, \quad (12)$$

$$p_*^{(1)} = p_*|_{\varphi=\pi/2},$$

з якого встановлюємо критичні навантаження $p_*^{(1)}, q_{1*}, q_{2*}$. Тут $c_{0*} = c_{1*} + c_{2*}$; $c_{1*} = c_1 \cdot \left(1 + \frac{p_*}{2Gd_2} \right)$; c_{2*} обчислюється згідно з виразом (7) при $p = p_*^{(1)}$; $K_{Ic}^{(1)}$ – критичне значення КІН за тривісного навантаження. Оскільки вираз (12) зв'язує три залежні величини $p_*^{(1)}, q_{1*}, q_{2*}$, то двом із них, зокрема, q_{1*}, q_{2*} надається довільного допустимого значення, а третя $p_*^{(1)}$ визначається із (12).

У випадку одновісного розтягу тіла зусиллями $p = p_1, q_1 = q_2 = 0$, із (12) маємо

$$p_{1*}^{(1)} = \frac{K_{Ic} E(k)}{\sqrt{\pi b}}. \quad p_{1*}^{(1)} = p_{1*}|_{\varphi=\pi/2}, \quad (13)$$

де K_{Ic} – критичне значення КІН за одновісного розтягу.

Природно виникає питання чи величини $K_{Ic}^{(1)}$ і K_{Ic} рівні між собою. Для пластини з лінійною тріщиною довжини $2b$ при двовісному розтязі експериментальні дослідження [3, 4] показали, що $K_{Ic}^{(1)} \neq K_{Ic}$. Однак, за відсутності в літературі формули (11), автори робіт [3, 4] для обчислення $K_{Ic}^{(1)}$ користувались формулою $K_I = p\sqrt{\pi b}$, яка не враховує впливу зусиль q_2 , що, звичайно, вплинуло на отриманий ними результат.

Якщо граничний стан настає в точках $(\pm a, 0, 0)$, тобто при $\varphi = 0; \pi$, то для визначення $p_{1*}^{(2)}$, q_{1*} , q_{2*} матимемо

$$p_*^{(2)} - \frac{c_0 E(k)}{8b} \left((3 + \mu) \frac{q_{1*} + q_{2*}}{d_2} - \frac{q_{2*} - q_{1*}}{d_1} \left(d_1 - \frac{2d_3 F_2(k)}{E(k)} \right) \right) = K_{Ic}^{(1)} E(k) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi b^2}}; \quad (14)$$

$$p_*^{(2)} = p_*|_{\varphi=0}.$$

Тут c_{2*} – визначається із виразу (7) при $p = p_*^{(2)}$.

Із рівностей (12), (14) визначаємо критичне зусилля $p_* = \min \{ p_*^{(1)}, p_*^{(2)} \}$ при заданих значеннях q_{1*} , q_{2*} .

Література

1. Стадник М.М. Об одном методе приближенного решения трехмерной упругой задачи для тела с тонким включением// Физ.-хим. механика материалов. – 1988, № 1. – С. 53-65.
2. Стадник М.М. Концентрація напружень біля пружного еліпсоїдального включення у безмежному тілі// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002, № 6. – С. 25-30.
3. Лебедев А.А., Музыка Н.Р. Несущая способность пластины с трещиной при двухосном растяжении// Пробл. прочности. – 2001, № 2. – С. 20-27.
4. Іваницький Я.Л., Штаюра С.Т., Костів Р.Б. Оцінка тріщиностійкості матеріалів при двовісному навантаженні// Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 697-702.
5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
6. Стадник М.М. Силовий критерій гранично-рівноважного стану пластини з тріщиною під двовісним навантаженням// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007, № 6. – С. 14-16.
7. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. – J. Appl. Mech., 1957, 24, № 3. – P. 361-364.

УДК 630.*36(100)

Проф. Б.В. Білик, канд. техн. наук;
ст. викл. М.М. Борис, канд. техн. наук;
доц. А.Г. Кусий, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ В ТРАНСМІСІЯХ ПОВНОПРИВІДНИХ МАШИН З РЕАКТИВНИМИ КОНТУРАМИ

Наведено динамічну схему трансмісії повнопривідного автомобіля з реактивними контурами та визначено частоти її власних крутильних коливань. Отримані ма-