

УДК 336.71:336.27 Доц. Б.Ю. Кишакевич, канд. екон. наук – Дрогобицький державний педагогічний ун-ет ім. Івана Франка

ВИКОРИСТАННЯ КОВАРІАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ VAR ПОРТФЕЛЯ

Розглянуто передумови виникнення та поширення VaR методології оцінки ризику. Показано основні методики визначення VaR та проаналізовано популярну коваріаційну (*variance-covariance*) модель обчислення VaR для портфеля, дохідність якого є лінійно залежною від дохідностей усіх активів, що входять у нього. Визначено сильні та слабкі сторони такої моделі.

Ключові слова: ризик, дельта-нормальна модель, довірчий рівень, коваріаційна модель, оцінка ризику, value at risk.

Assist. prof. B.Yu. Kyshakevych – Drohobych state pedagogical university named after Ivan Franko

Usage of variance-covariance model for portfolio VaR calculation

The article deals with the origin and expansion preconditions of VaR methodology of risk assessment. The basic methods of VaR computation are shown and a popular variance-covariance model of portfolio VaR calculation is analyzed, the profitability of which is in linear dependence on all assets profitabilities that form it. Strong and weak points of a given model are defined.

Keywords: risk, delta-normal model, confidence level, variance-covariance model, risk assessment, value at risk.

Вступ. До початку XX ст. ризик розглядали та вивчали лише стосовно страхового бізнесу. Вперше про ризик як про невід'ємний елемент бізнесу та економічної науки заговорив у 20-х роках минулого століття економіст Френк Найт. Він розмежував поняття ризику як вимірної невизначеності і невизначеності взагалі. Наступний серйозний крок зробив Гаррі Марковіц, роботи якого лежать в основі всієї сучасної фінансової теорії. Марковіц пов'язав поняття ризику та доходності. Основний його постулат – дохідність зростає лише разом з ризиком. Цей постулат відомий сьогодні практично всім, проте в 1953 р., коли вийшла загальновідома праця Марковіца, і до початку 1970-х років його теорія не викликала особливого інтересу. Проте в 1970-ті роки фінансовий світ переживав значні коливання валютних курсів, значний стрибок ціни на нафту, що сукупно ускладнювало прогнозування ціни експортованої продукції в майбутньому. Тоді спеціалісти звернулись до ідеї Марковіца. Згодом значний вклад у розвиток ідеї використання VaR методики зробили такі економісти, як Пірсон, Бассак, Шапіро, Мертон, Могран, Бедер та інші.

Постановка завдання. Загалом, усі методи визначення VaR можна класифікувати в три широкі категорії:

- параметричні (RiskMetrics та GARCH);
- непараметричні (Historical Simulation and the Hybrid model);
- напівпараметричні (Extreme Value Theory, CAViaR та quasi-maximum likelihood GARCH).

Результати, отримані від використання цих методів, можуть доволі сильно відрізнятись. Бедер у 1995 р., використовуючи вісім різних методів до

трьох гіпотетичних портфелів, отримав результати оцінки VaR, які у деяких випадках відрізнялись у 14 разів. Для того, щоб визначити, який метод слід обрати для аналізу ризику, необхідно розібратись із основними припущеннями, математичними моделями та обчислювальною технікою такого підходу. Тільки після цього попереднього кроку слід робити вибір методу обчислення VaR, який би найбільш точно відповідав меті дослідження. У статті ставиться завдання визначити сильні та слабкі сторони використання коваріаційного методу, який по своїй суті є параметричним.

Виклад основного матеріалу. Після Марковіца першими використали на практиці VaR співробітники відомого інвестиційного банку J.P. Morgan. У кінці 1980-х років в J.P. Morgan з приходом нового керівництва вирішили замінити методiku оцінки ризику та форму його представлення. Новий голова ради директорів Деніс Везерстоун вимагав від своїх підлеглих, щоб вони замість величезної кількості розрізнених показників представили йому одну єдину цифру – суму, яку може втратити банк наступного дня через можливе падіння курсів акцій та валют.

З часом VaR почали використовувати регулятори фондового ринку. Так наприклад, він є обов'язковим у брокерсько-дилерській звітності, яку вимагає використовувати Комісія по біржах та цінних паперах США (SEC). Згідно із Базельськими стандартами міжнародні вимоги до достатності капіталу банків також сформульовані в термінах VaR [1]. Відповідно до цієї методики, банки повинні резервувати трикратний розмір десятиденного VaR, тобто рекомендується трикратний захист порівняно із середніми коливаннями. У літературі наводять аналог теорії опору матеріалів: балку розраховують таким чином, щоб вона могла витримати трьох- або п'ятикратні навантаження порівняно із звичайними умовами.

Кількість днів, які вказано в VaR, має доволі чіткий економічний зміст. Це термін, протягом якого ризик-менеджери планують у випадку погіршення ситуації позбутися від небезпечних активів.

Хоча термін VaR (Value-at-risk) почав активно використовуватись зі середини 1990-х років, його зародження сягає у 50-ті роки XX ст., коли його вперше було згадано в рамках теорії портфеля Марковіца. Згодом VaR знайшов широке використання в 90-х роках у зв'язку із вимогами базельського комітету та зарекомендував себе як надійний помічник ризик-менеджерів. На сьогодні у цілому світі широко використовують позначення "VaR". Загалом Value at Risk (VaR) – вартісна міра ризику. Іншими словами, це виражена в грошових одиницях величина, яку не перевищать очікувані протягом певного періоду часу втрати із заданою ймовірністю. VaR характеризується трьома параметрами:

- **часовий горизонт**, величина якого залежить від конкретної ситуації. Рекомендації "Базель-2" – 10 днів, згідно з методикою Risk Metrics – 1 день. Більш розповсюджений розрахунок із часовим горизонтом 1 день. 10 днів використовуються для розрахунку величини капіталу, який покриває можливі збитки;
- **рівень довіри** (confidence level) – рівень допустимого ризику. У базельських документах використовується величина 99 %, в системі RiskMetrics – 95 %;

- **базова валюта**, в якій обчислюється показник [2].

Іншими словами, VaR – це величина збитків, яка із ймовірністю, що дорівнює рівню довіри (наприклад, 99 %), не буде перевищена. Отже, в 1 % випадків збитки становитимуть величину, більшу ніж VaR.

З одного боку, VaR – це дуже проста та зрозуміла інтуїтивно концепція, проте обчислення, які доводиться виконувати при цьому – доволі складна статистична проблема. Хоча існуючі моделі для обчислення VaR використовують різні методології, всі вони мають спільну структуру, для якої характерними є такі етапи:

- ринкова переоцінка (Mark-to-market) портфеля;
- визначення розподілу прибутку портфелю;
- обчислення VaR портфеля [3].

Головна відмінність між VaR методами пов'язана із пунктом 2, у якому передбачається вибір методу оцінки можливим змін вартості портфелю. У SAViaR моделях не потрібно виконувати оцінку розподілу, оскільки ці методи дають змогу визначити безпосередньо медіану розподілу.

Існує багато моделей для оцінки VaR, кожна із яких ґрунтується на певному наборі припущень. Проте до основних моделей можна віднести:

1. Коваріаційну (variance-covariance (VCV)), в якій припускається, що фактори ризику є завжди нормально розподілені і що зміна вартості портфелю є лінійно залежною від усіх факторів ризику;
2. Історичного моделювання (historical simulation). Тут припускається, що прибуток, який дають активи, в майбутньому будуть задовольняти такому ж розподілу, який вони мали в минулому (historical market data);
3. Моделювання методом Монте-Карло.

Коваріаційна або дельта-нормальна модель стала популярною завдяки Моргану (сьогодні J.P. Morgan Chase) на початку 1990-х рр., коли було опубліковано "RiskMetrics Technical Document". Надалі ми розглянемо простий випадок, коли тільки фактор ризику для даного портфелю визначає вартість активів як таких. Наступні два припущення дають змогу перетворити проблему оцінки VaR в лінійну алгебраїчну задачу:

- Портфель складається із активів, таких, що приріст вартості портфелю є лінійно залежним від (або є лінійною комбінацією) всіх приростів вартості активів, так що дохідність портфелю є лінійно залежною від дохідностей усіх активів.
- Дохідності усіх активів є нормально розподіленими.

Виберемо інструмент, вартість якого залежить лише від єдиного фактора ризику – ціни P базового активу, який входить в портфель. Перший крок полягає в оцінці початкової вартості портфеля

$$V_0 = V(P_0). \quad (1)$$

Позначимо через Δ_0 частинну похідну першого порядку, або, іншими словами, чутливість портфеля до змін ціни активу [4]. Цю похідну часто називають модифікованою дюрацією портфеля інструментів із фіксованою дохідністю або дельтою для деривативів. Отже, можлива втрата вартості, dV , може бути визначена таким чином:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_{P=P_0} dP = \Delta_0 dP . \quad (2)$$

Якщо існує нормальний розподіл доходностей, тоді значення VaR для портфеля може бути отримане як добуток розміру активу на VaR базового активу портфеля:

$$VaR = |\Delta_0| \times (k_{1-\alpha} \sigma P_0) . \quad (3)$$

У випадку нормального розподілу випадкової величини інтервал довіри $(1-\alpha)$ завжди характеризується єдиним параметром квантилем $(k_{1-\alpha})$, який вказує положення шуканого значення випадкової величини (симетрично в обох хвостах розподілу) відносно середнього $(E[r_t])$, який виражений у кількостях стандартних відхилень доходності портфеля (σ_t) . Для найбільш використовуваних значень довірчого інтервалу 95 і 99 % відповідні квантилі будуть становити, відповідно, $-1,65$ та $2,33$ стандартних відхилень доходності портфеля. σ – середньоквадратичне відхилення можливих змін вартості базового активу. Такий метод оцінки називають аналітичним. Для фінансового інструменту з фіксованою дохідністю як фактор ризику виступає дохідність r і співвідношення ціна/дохідність. У такому випадку, VaR інструменту знаходять таким чином:

$$dV = -\Delta_M V dr , \quad (4)$$

$$VaR = k_{1-\alpha} \sigma \Delta_M V , \quad (5)$$

де Δ_M – модифікована дюрація облігації.

Коваріаційний (variance-covariance) метод є єдиним, який дає змогу отримати оцінку VaR у замкнутому вигляді. Оскільки ціни активів і відповідно їх відношення не можуть бути від'ємними, то як дохідність r_t можна прийняти логарифмічні прирости.

$$r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (6)$$

Якщо логарифми відношення цін розподілені нормально, тоді самі відношення будуть підпорядковуватись логнормальному розподілу [5]. На практиці часто замість логарифмічних приростів використовують звичайні відсоткові зміни цін, оскільки, як можна переконатись шляхом розкладу в ряд Тейлора, для достатньо малих $\Delta P_t = (P_t - P_{t-1})$ ці величини можна вважати еквівалентними

$$\ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(1 + (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}) \approx (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1} . \quad (7)$$

Припущення про нормальний закон розподілу змін факторів ризику значно полегшує знаходження величини VaR, оскільки в цьому випадку розподіл доходностей інструментів, які є лінійними комбінаціями факторів ризику, також буде нормальним. Ця важлива властивість буде справджуватись для будь-якого портфелю, складеного із інструментів з лінійними ціновими властивостями, як наприклад, акцій чи валют.

Для визначення величини VaR, яке використовується в коваріаційному методі, розглянемо інструмент, який складається із єдиного активу. Очевидно, що розмір денного прибутку або збитку за такою інвестиційною позицією бу-

де дорівнювати зміні ціни цього активу за цей день. Тоді, найменш очікувана ціна наступного дня із заданою ймовірністю $(1-\alpha)$ буде дорівнювати

$$P_{(t+1,1-\alpha)} = P_t \exp(E[r_t] - k_{1-\alpha}\sigma_t). \quad (8)$$

Стандартне відхилення доходності може бути оціненим як за обмеженою вибіркою цін (історичний метод спостережень), так і з використанням методів прогнозування [6]. Популярним та порівняно простим у використанні є експоненціальне згладжування з параметром λ , яке використано у системі RiskMetrics

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_t^2. \quad (9)$$

Величина VaR відображає не ціну (чи вартість) як таку, а її найбільш очікувану зміну за один день:

$$VaR_{(1,1-\alpha)} = P_t[\exp(-k_{1-\alpha}\sigma_t) - 1]. \quad (10)$$

На практиці величину $[\exp(-k_{1-\alpha}\sigma_t) - 1]$ для зручності замінюють на її наближене значення $-k_{1-\alpha}\sigma_t$. Знак "-" опускають також і використовують абсолютне значення VaR.

Висновки. До переваг дельта-нормальної або коваріаційної оцінки VaR можна віднести простоту реалізації та швидкість обчислень навіть для дуже великої кількості фінансових активів, що входять в портфель, оскільки ця оцінка замінює кожен позицію в портфелі її лінійною апроксимацією. Для цього достатньо оцінити волатильність та математичне сподівання логарифмів приросту капіталу, побудувати таблицю кореляцій для випадку портфеля, який складається з декількох активів, і знайти шукану квантиль нормального закону.

До недоліків цього методу відносять недооцінку значень, які не описуються нормальним розподілом доходностей (хвости розподілу Леві) і, в деяких випадках, неадекватний опис поведінки нелінійних фінансових інструментів, таких як іпотечні цінні папери. У реальному житті хвости розподілів логарифмів приростів виявляються важчими, ніж у нормального розподілу. Звичайно, можна скористатись гіперболічними розподілами, проте не варто забувати, що дуже часто з ускладненням моделі помилки нагромаджуються і "з'їдають" усі переваги.

Література

1. **Лобанов А.** Проблемы метода при расчете value at risk // Рынок ценных бумаг. – 2000. – №21(180). – С. 54-59
2. **Basak, S. and A. Shapiro,** 2001, Value-at-Risk Based Management: Optimal Policies and Asset Prices, Review of Financial Studies, v.14. – Pp. 371-405.
3. **Morgan J.P.** Reuters. RiskMetrics Technical Document. 4-th Ed., 1996. – P. 345
4. **Blanco C.** Component VaR, VaR delta and VaR beta in Risk Management. (Paper presented at the UNICOM Risk & Return Conference. London, 1999. №12 November.)
5. **Kealhofer, S.,** 1995. Managing default risk in portfolios of derivatives. In: Derivative Credit Risk, Ch. 4. Risk Publications. – Pp. 49-66.
6. **Merton, R.,** 1974. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates // Journal of Finance 28. – Pp. 449-470.