

СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Розглянуто статистичну модель задачі розподілу ресурсів, у якій математичне формулювання має вигляд одноцільової задачі лінійного програмування. Цільова функція задачі залежить від деяких сталих цін на виготовлену одиницю продукції, яка реалізується виробником на ринку у деякий момент часу. Оскільки задача розподілу ресурсів обчислює план роботи підприємства, то реалізація цього плану здійснюється протягом деякого часового періоду, у процесі якого оптові ціни реалізації продукції можуть стати неактуальними на ринку товаровиробників.

Assist. prof. O.O. Kovalenko – L'viv state institute of the newest technologies and management after V. Chornovola

The statistical model of the task of resources distribution

The statistical model of the task of resources distribution, in which mathematical formulation has the appearance of single-purpose task of the linear programming is considered. The objective function of task depends on some permanent prices on the made unit of products which will be realized a producer on a market in some moment of time. As a task of division of resources calculates the plan of work of enterprise, realization of this plan is carried out during some sentinel period in the process of which the wholesale prices of realization of products can become irrelevant on the market of commodity producers.

Класична задача про використання ресурсів [1] у дослідженні операцій має таку математичну модель. Нехай на випуск n видів продукції $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ витрачається m видів сировини $C_1, C_2, \dots, C_m$. Відомі витрати a_{ij} ресурсів i -го виду, обсяг b_i ресурсів i -го виду і величина прибутку s_j від реалізації одиниці продукції j -го виду. Необхідно так організувати випуск продукції, виходячи з наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток. Вихідні дані задачі запишемо у наступній таблиці:

Табл. 1. Зведена таблиця коефіцієнтів математичної моделі

Види ресурсів	Види продукції						Запаси ресурсів
	Π_1	Π_2	...	Π_j	...	Π_n	
C_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
C_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
C_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
C_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Прибуток від одиниці продукції	s_1	s_2	...	s_j	...	s_n	
Випуск продукції	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	

Обсяги випуску продукції $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ позначимо як $x_1, x_2, \dots, x_n$. Таким чином, керовані параметри математичної моделі виробництва формалізуються у вигляді вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а параметри, що характеризують стан виробництва, у вигляді векторів $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – характеристика ресурсних обмежень; $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – характеристика прибутку від одиниці

продукції кожного виду та матриці $A = \{a_{ij}\}_{mn}$ – технологічна матриця випуску продукції з використання ресурсів.

Побудуємо цільову функцію як формалізацію мети виробництва – отримання максимального прибутку від виготовлення продукції. Цільова функція, яку позначимо $F(X, S)$, буде мати наступний вигляд:

$$F(X, S) = s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 + \dots + s_n \cdot x_n \rightarrow \max. \quad (1)$$

Побудуємо область обмежень ресурсних обмежень Ω , якій повинні належати плани (вектори) X . Ця область є множиною векторів X , складові якого $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, повинні задовольняти ресурсним обмеженням вектора B відповідно з технологією виробництва, що характеризується технологічною матрицею виробництва продукції A . Область допустимих (можливих) планів виробництва Ω є множиною векторів X , складові яких повинні задовольняти системі нерівностей:

[illegible]

Виходячи з економічного змісту моделі, об'єми x_j випуску продукції P_j можуть набувати лише невід'ємних значень:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Таким чином, задача про використання ресурсів у розглянутій постановці має наступне математичне формулювання:

[illegible]

Таке математичне формулювання має вигляд одноцільової задачі лінійного програмування. Цільовою функцією є функція (1), яка залежить від деяких сталих цін на виготовлену одиницю деякої продукції, що реалізується виробником на ринку у деякий момент часу. Оскільки задача розподілу ресурсів обчислює план роботи підприємства, то реалізація цього плану здійснюється протягом деякого часового періоду, у процесі якого оптові ціни реалізації продукції, закладені у модель 1, можуть стати неактуальними на ринку.

На кожному підприємстві ведуть статистичну звітність своєї діяльності, де наведено як дані з прибутковості цього підприємства, так і об'єми реалізації кожної продукції. Такі дані можна навести у табл. 2, яка повинна слугувати основою для побудови функції регресії, яка вказує залежність між прибутком підприємства як показником регресії і об'ємами реалізації кожної виробленої продукції, як чинниками регресії [2].

Цю статистику Θ можна записати у вигляді наступної табл. 2, яку одержала внаслідок m спостережень за параметрами $F, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ деякої підприємства.

Табл. 2. Зведена таблиця коефіцієнтів математичної моделі

Показник F	Фактори			
	Π_1	Π_2	...	Π_n
f_1	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	...	$x_1^{(n)}$
f_2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	...	$x_2^{(n)}$
...	...	...	...	...
f_m	$x_m^{(1)}$	$x_m^{(2)}$	...	$x_m^{(n)}$

У багатьох випадках при аналізі економіко-соціальних систем вплив на деякий параметр – показник системи здійснюють декілька чинників, тобто необхідно розглядати кореляційну залежність показника Y від деякої множини чинників $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$

$$F = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) + E,$$

де: E – стохастична складова кореляційної моделі. Найпростішим виглядом залежності f є її лінійна специфікація.

$$F = c_0 + c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2 + \dots + c_n\Pi_n + E. \quad (3)$$

Або у матричному вигляді

$$F = \Pi \times C + E, \quad (4)$$

де: Π – матриця значень чинників $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$; F – матриця значень показника F , отриманих у статистиці Θ , C – вектор коефіцієнтів множинної лінійної регресії (3).

Ці матриці мають такий вигляд

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m^{(1)} & x_m^{(2)} & \dots & x_m^{(n)} \end{pmatrix},$$

стовпець з одиниць включено у матрицю Π для отримання вільного члена при матричному множенні.

Вектор C є вектором невідомих коефіцієнтів економетричної моделі (4), а вектор E – вектором залишків цієї економетричної моделі, які мають випадковий характер.

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}.$$

У покоординатному вигляді модель буде мати такий вигляд

$$f_i = c_0 + c_1 x_i^{(1)} + c_2 x_i^{(2)} + \dots + c_n x_i^{(n)} + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Для розрахунку оцінок коефіцієнтів багатofакторної лінійної регресійної моделі

$$\hat{f}_i = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 x_i^{(1)} + \hat{c}_2 x_i^{(2)} + \dots + \hat{c}_n x_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

де

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \dots \\ \hat{y}_m \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \dots \\ \hat{c}_n \end{pmatrix},$$

застосуємо метод найменших квадратів, звідки одержимо формулу для розрахунку параметрів $\hat{C}$ у матричному вигляді

$$\hat{C} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y, \quad (7)$$

де: $(X^T \cdot X)^{-1}$ – матриця, обернена до добутку матриць $X^T \cdot X$.

Рівняння (6) використаємо у моделі 1 як цільову функцію і одержимо модель 2 задачі оптимального використання ресурсів.

$$F(X, \hat{C}) = \hat{c}_0 + \hat{c}_1 \cdot x_1 + \hat{c}_2 \cdot x_2 + \dots + \hat{c}_n \cdot x_n \rightarrow \max$$

[illegible]

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Розв'язок такої моделі буде обчислювати оптимальний план використання ресурсів підприємства з врахуванням динаміки оптових цін на ринку, яка склалася під час реалізації такої продукції.

Література

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972.
2. Назаренко О.М. Основы економетрики. – К.: Центр навч. літ-ри, 2005. – 392 с.

УДК 621.86.017.4 **Проф. Є.В. Харченко, д-р техн. наук – НУ "Львівська політехніка"; ст. викл. С. Собковскі, магістр – Вармінсько-Мазурський університет в м. Ольштині, Польща; студ. Ю.Є. Носов – НУ "Львівська політехніка", Україна**

ДИНАМІКА ПІДЙІМАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ З РОЗМІЩЕННЯМ У КАРЕТЦІ ПРИВОДОМ І ПРОТИВАГОЮ

Розглянуто результати математичного моделювання процесів пуску будівельного підйимального пристрою з приводом, змонтованим у каретці. Аналіз динаміч-