

За допомогою моделей спрогнозуємо річний обсяг короткотермінових кредитів на наступні два періоди $t = 7, 8$ (табл. 6).

Табл. 6. Прогнозні значення

Період (t)	Квадратична модель (y_{kv})	Експоненційна модель (y_{ek})
7(2008 р.)	336 723	351 512
8(2009 р.)	457 289	540 364

Висновок. Проаналізовано ефективність банківської системи України за останні роки, динаміку основних показників діяльності банків, а також основні чинники, що впливають на функціонування банківських установ. На основі статистичних даних проведено математичне моделювання динаміки короткотермінових та довготермінових кредитів за допомогою часових трендів. Побудовано квадратичну та експоненційну моделі, які досить добре апроксимують досліджуваний процес, оскільки значення коефіцієнта кореляції для обох рівнянь є близьким до одиниці. За допомогою моделей спрогнозовано річний обсяг короткотермінових та довготермінових кредитів на наступні два періоди.

Література

1. Калашникова З.В. Зарубежный опыт жилищного кредитования и его применение в России// Финансовый менеджмент. – 2002, № 1.
2. Ипотека в ФРГ// Бизнес и банки. – 1995, № 5-6. – С. 7.
3. Грабовецкий Б.Є. Економічне прогнозування та планування: Навч. посіб. – К.: Центр навч. літ.-ри. – 2003.
4. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Тов-во "Знання". – 1998.
5. Вісник НБУ. Щомісячний наук.-прак. журнал Нац. банку України. – 2007, № 6 (червень).

УДК 517.945

Доц. В.П. Карашецький, канд. техн. наук –
НЛТУ України, м. Львів

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ПЛОЩЕЮ ТРИКУТНИКА НА ОСНОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОВНИХ ПОЛІНОМІВ

Отримано кубатурні формули чисельного інтегрування за площею трикутника на основі інтерполяційних повних поліномів для лагранжевого трикутника першого, другого, третього і четвертого порядків.

Ключові слова: кубатурна формула, лагранжевий трикутник, симплексні координати.

Assist. prof. V.P. Karashetsky – NUFWT of Ukraine, L'viv

Cubature formulas for numerical integration through triangle area with full interpolation polynomials

Cubature formulas for numerical integration through triangle area were obtained with full interpolation polynomials for Lagrangian triangle of the first, second, third and fourth orders.

Keywords: cubature formula, Lagrangian triangle, natural coordinators.

Розглянемо задачу обчислення інтегралу:

$$\int_{S_m} f(x, y) ds, \quad (1)$$

де: $f(x, y)$ – неперервна функція у межах лагранжевого трикутника, якщо задані значення функції $f(x, y)$ у вузлах, як вказано на рис. 1; s_m – площа лагранжевого трикутника.

У загальному випадку кількість P вузлів лагранжевого трикутника дорівнює кількості членів повного двовимірного поліному n -го степеня і визначається за формулою

$$P = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad (2)$$

Інтерполюємо функцію $f(x, y)$ повним поліномом n -го степеня

$$f(x, y) = \vec{K} \vec{\eta}_*, \quad (3)$$

де $\vec{K} = (1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n) \quad (4)$

координатний вектор поточної точки з координатами x, y ; $\vec{\eta}_* = (\eta_1, \dots, \eta_P)^*$ – вектор-стовпець коефіцієнтів поліному.

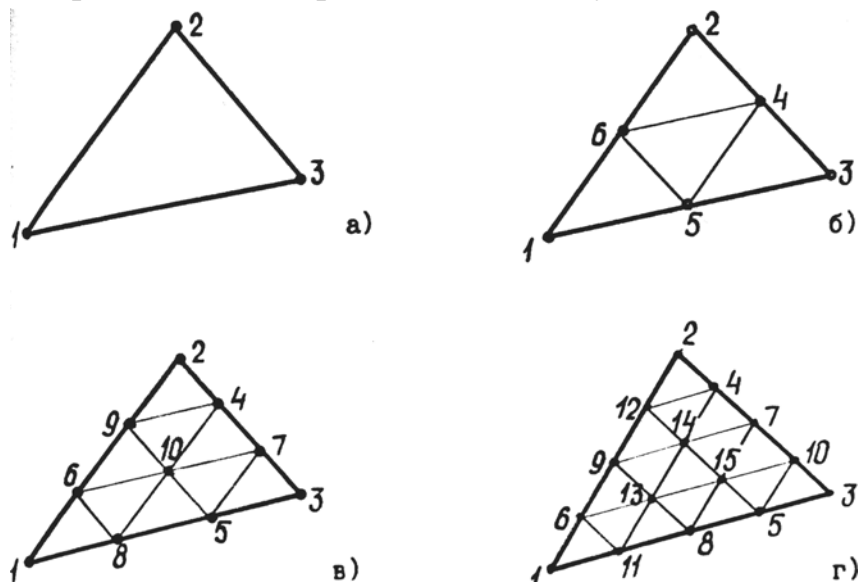


Рис. 1.
Лагранжеві
трикутники:
а) першого порядку;
б) другого порядку;
в) третього порядку;
г) четвертого порядку

Склавши вирази виду (3) для кожного з P вузлів лагранжевого трикутника, отримуємо векторне рівняння

$$\vec{f}_* = K_* \vec{\eta}_*, \quad (5)$$

де $\vec{f}_* = (f_1, \dots, f_P)^*$ – P -вимірний вектор-стовпець значень функції $f(x, y)$ у вузлах лагранжевого трикутника;

$$K_* = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & x_1^n & y_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_P & y_P & x_P y_P & \dots & x_P^n & y_P^n \end{bmatrix} \quad (6)$$

– P -вимірна квадратна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (4) у вузлах лагранжевого трикутника. З (5) випливає, що $\vec{\eta}_* = K_*^{-1} \vec{f}_*$, тому

$$f(x, y) = \vec{K} K_*^{-1} \vec{f}_*. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у такому вигляді

$$f(x, y) = \vec{N} \vec{f}_*, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad \vec{N} = \vec{K} K_*^{-1} = (N_1, \dots, N_P) \quad (9)$$

– вектор-рядок функцій форми (базисних функцій). Підставивши (5) у вираз (8), з врахуванням (6) отримуємо

$$f(x, y) = \vec{N} K_* \vec{\eta}_* = \eta_1 \sum_{j=1}^P N_j + \eta_2 \sum_{j=1}^P N_j x_j + \eta_3 \sum_{j=1}^P N_j y_j + \dots + \eta_{P-1} \sum_{j=1}^P N_j x_j^{\eta_j} + \eta_P \sum_{j=1}^P N_j y_j^{\eta_j}, \quad (10)$$

де j -порядковий номер вузла лагранжевого трикутника.

Порівнюючи (10) з (3), отримуємо систему P рівнянь такого вигляду

$$\sum_{j=1}^P N_j = 1; \sum_{j=1}^P N_j x_j = x; \sum_{j=1}^P N_j y_j = y; \dots \sum_{j=1}^P N_j x_j^{\eta_j} = x^{\eta_j}; \sum_{j=1}^P N_j y_j^{\eta_j} = y^{\eta_j}, \quad (11)$$

якій мають задовольняти функції форми повного двовимірного поліному n -го степеня.

Шуканий інтеграл (1) з врахуванням (8) набуває такого вигляду:

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = \int_{s_m} \vec{N} \vec{f}_* ds. \quad (12)$$

Скористуємося для лагранжевого трикутника симплексною системою відносних координат [3], у якій симплексні координати L_1, L_2, L_3 точки E , що належить трикутнику (рис. 2), визначаються як відношення площ

$$L_i = \frac{s_i}{s_m}, i = \overline{1, 3}, \quad (13)$$

де: s_i – площа трикутника з вершиною у точці E і стороною, протилежною i -ій вершині трикутника; s_m – площа лагранжевого трикутника.

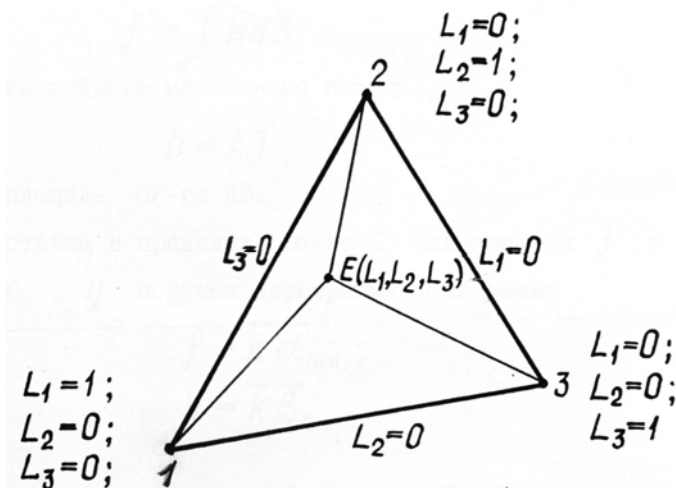


Рис. 2.
Симплексні координати
в лагранжевому трикутнику

Для будь-якої точки, розміщеної на стороні, протилежній i -ій вершині,

$$L_i = 0, i \in \{1, 2, 3\}. \quad (14)$$

Екстремальні значення симплексних координат лежать в межах від 0 до 1. Зв'язок між симплексними і декартовими координатами визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 = x; \\ L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 = y; \\ L_1 + L_2 + L_3 = 1, \end{cases} \quad (15)$$

де $x_i, y_i, i = \overline{1,3}$ – координати вершин трикутника.

За початок прямокутної системи координат можна прийняти будь-яку точку всередині трикутника, однак частіше всього його поміщають в одну з вершин трикутника. Розташування координатних осей X, Y прямокутної системи вибирається довільно.

Як видно із порівняння (15) з (11), для лагранжевого трикутника першого порядку симплексні координати є одночасно функціями форми, тобто

$$N_1 = L_1; N_2 = L_2; N_3 = L_3. \quad (16)$$

Згідно з методикою, викладеною в [3], елементи вектора $\vec{N}$ функцій форми для лагранжевих трикутників, зображених на рис. 1, б, в, г, визначаються за формулами:

- для лагранжевого трикутника другого порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1); N_2 = L_2(2L_2 - 1); \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1); N_4 = 4L_2L_3; \\ N_5 &= 4L_1L_3; N_6 = 4L_1L_2, \end{aligned} \quad (17)$$

- для лагранжевого трикутника третього порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2); N_2 = \frac{1}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2); \\ N_3 &= \frac{1}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2); N_4 = \frac{9}{2} L_2L_3(3L_2 - 1); \\ N_5 &= \frac{9}{2} L_1L_3(3L_3 - 1); N_6 = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1 - 1); \\ N_7 &= \frac{9}{2} L_2L_3(3L_1 - 1); N_8 = \frac{9}{2} L_1L_3(3L_1 - 1); \\ N_9 &= \frac{9}{2} L_1L_2(3L_2 - 1); N_{10} = 27L_1L_2L_3, \end{aligned} \quad (18)$$

- для лагранжевого трикутника четвертого порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{3} L_1(32L_1^3 - 48L_1^2 + 22L_1 - 3); N_2 = \frac{1}{3} L_2(32L_2^3 - 48L_2^2 + 22L_2 - 3); \\ N_3 &= \frac{1}{3} L_3(32L_3^3 - 48L_3^2 + 22L_3 - 3); N_4 = \frac{16}{3} L_2L_3(8L_2^2 - 6L_2 + 1); \\ N_5 &= \frac{16}{3} L_1L_3(8L_3^2 - 6L_3 + 1); N_6 = \frac{16}{3} L_1L_2(8L_1^2 - 6L_1 + 1); \\ N_7 &= 4L_2L_3(16L_2L_3 - 4L_2 - 4L_3 + 1); N_8 = 4L_1L_3(16L_1L_3 - 4L_1 - 4L_3 + 1); \\ N_9 &= 4L_1L_2(16L_1L_2 - 4L_1 - 4L_2 + 1); N_{10} = \frac{16}{3} L_2L_3(8L_3^2 - 6L_3 + 1); \end{aligned} \quad (19)$$

$$N_{11} = \frac{16}{3} L_1 L_3 (8L_1^2 - 6L_1 + 1); N_{12} = \frac{16}{3} L_1 L_2 (8L_2^2 - 6L_2 + 1);$$

$$N_{13} = 32L_1 L_2 L_3 (4L_1 - 1); N_{14} = 32L_1 L_2 L_3 (4L_2 - 1); N_{15} = 32L_1 L_2 L_3 (4L_3 - 1).$$

Як видно з (16)-(19), функції форми для лагранжевих трикутників мають вигляд алгебраїчних виразів відносно симплексних координат.

Друга перевага симплексної системи координат полягає в тому, що інтегрування за площею s_m лагранжевого трикутника може бути легко виконане в аналітичному вигляді, якщо застосувати відому формулу інтегрування [4]

$$\int_{s_m} L_1^a L_2^b L_3^c ds = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2s_m, \quad (20)$$

де площа s_m трикутника визначається через координати його вершин у прямокутній системі координат за формулою

$$s_m = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Враховуючи (12), (16), (20), отримуємо кубатурну формулу для лагранжевого трикутника першого порядку

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = \int_{s_m} (N_1 f_1 + N_2 f_2 + N_3 f_3) ds = f_1 \int_{s_m} L_1 ds + f_2 \int_{s_m} L_2 ds + f_3 \int_{s_m} L_3 ds = \frac{2}{3!} s_m \sum_{i=1}^3 f_i,$$

або остаточно

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = s_m \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 f_j. \quad (22)$$

Площа s_m трикутника обчислюється згідно з (21). Підставляючи (17)-(19) у (12) і враховуючи (20), отримуємо кубатурні формули для лагранжевого трикутника другого, третього і четвертого порядків

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = s_m \frac{1}{3} \sum_{j=4}^6 f_j; \quad (23)$$

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = s_m \left(\frac{1}{30} \sum_{j=1}^3 f_j + \frac{3}{40} \sum_{j=4}^9 f_j + \frac{9}{20} f_{10} \right); \quad (24)$$

$$\int_{s_m} f(x, y) ds = s_m \left(\frac{4}{45} \sum_{j=4}^6 f_j - \frac{1}{45} \sum_{j=7}^9 f_j + \frac{4}{45} \sum_{j=10}^{12} f_j + \frac{8}{45} \sum_{j=13}^{15} f_j \right). \quad (25)$$

Кубатурні формули (22), (23) з врахуванням (21) збігаються з кубатурними формулами, наведеними у довідковій літературі з чисельного інтегрування, наприклад [1, 2]. Кубатурні формули (24), (25) для лагранжевих трикутників третього і четвертого порядків отримані вперше.

Вказаним способом можна отримати кубатурні формули для лагранжевих трикутників більш високих порядків.

Література

1. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 372 с.

2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Eisenberg M.A., Malvern L.E. On Finite Elements Integration in Natural Coordinators, Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 1973, Vol. 7, pp. 574-575.

УДК 517.39: 519.872.6

Доц. Р.В. Зінько, канд. техн. наук –
НУ "Львівська політехніка"

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ОЦІНЦІ ЙМОВІРНОСТІ ДОРОЖНЬО-ТРАНСПОРТНИХ ПРИГОД

Використання клітинкових автоматів при моделюванні дорожньо-транспортних пригод (ДТП) дає змогу вираховувати ймовірність виникнення пригоди у кожній точці дороги з урахуванням перебування в цій точці автомобіля. При використанні комп'ютерного моделювання на основі принципів клітинкових автоматів можна сформувати віртуальну статистичну базу залежно від найрізноманітніших чинників, що спричиняють ДТП на заданому перехресті.

Assist. prof. R.V. Zinko – NU "L'vivs'ka Politekhnika"

The computer modeling of origin of road accident

The cellular automata for modeling of road accidents enables to calculate the probability of origin of accidents in every point of the road. The stay of a car in this point is taken into account. At the computer modeling on the basis of principles of cellular automata a virtual statistical base is formed. It takes the most various road factors on the set crossing into account.

У різних галузях науки і техніки зростає роль математичних методів дослідження складних систем і процесів їх функціонування. Загальновизнано, що зі всіх керованих процесів, що вивчаються на основі статистичних даних, найскладніші протікають в економічних і соціальних системах, до яких належить система забезпечення безпеки дорожнього руху.

Останнім часом питання забезпечення безпеки дорожнього руху різко загострилася, зросли вимоги до якості аналізу і підготовки пропозицій з прийняття управлінських рішень. Тому для оброблення, аналізу та інтерпретації великих обсягів початкової інформації використовують математичні моделі, що отримуються на основі методів багатовимірної оброблення даних та статистичних даних.

Серед математичних моделей, які формуються на основі оброблення статистичних даних, можна відзначити моделі для прогнозування [1]. Прогнозування в управлінні системою забезпечення безпеки дорожнього руху дає змогу [2]:

- проаналізувати тенденції розвитку стану аварійності і оцінити стан аварійності в майбутньому;
- виявити показники і чинники, що найбільш істотно впливають на стан аварійності;
- кількісно оцінити ступінь цього впливу;
- визначити можливі зміни у структурі аварійності в майбутньому і спрогнозувати основні напрями роботи зі забезпечення безпеки дорожнього руху;
- виявити різні альтернативи дій для досягнення поставленої мети, а також сформувати самі цілі;
- обґрунтувати управлінські рішення щодо оптимального розподілу наявних сил, засобів, фінансових і матеріальних ресурсів.