

міжну опору. За цим навантаженням і величиною прольоту l_2 визначаємо T_{np} (див. номограму).

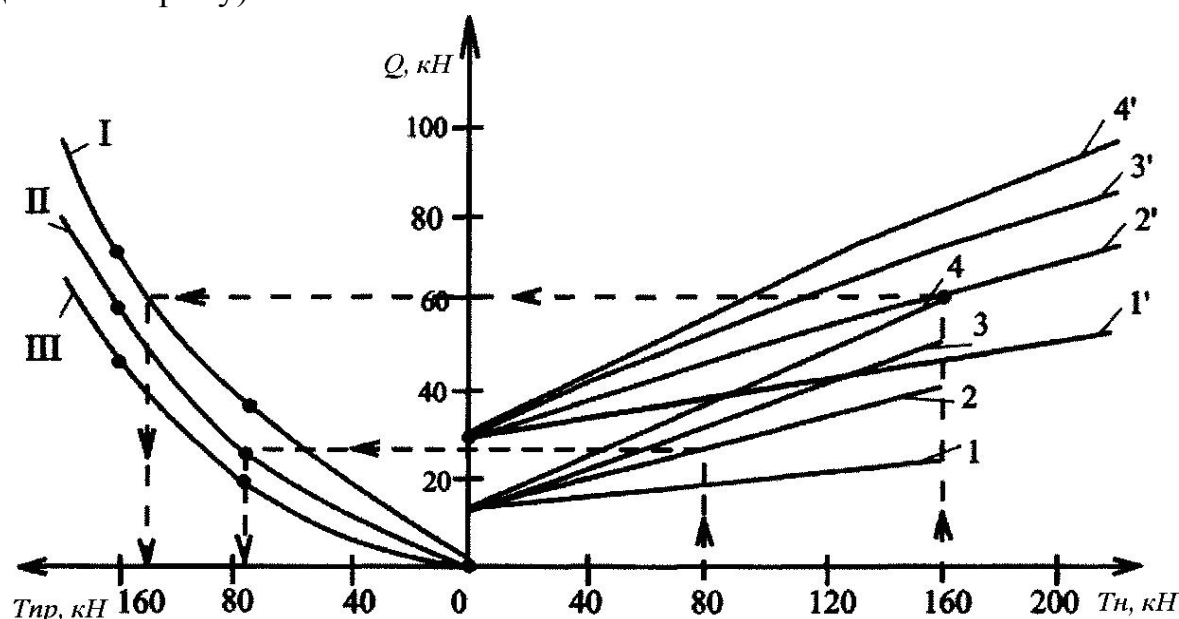


Рис. 2. Номограма для визначення натягу канату проміжної опори

На номограмі визначимо зусилля $T_{np} = 78$ кН, якщо натяг несучого канату становить 80 кН, кут його перегину 10° , а довжина прольоту $l_2 = 40$ м, а при $T_H = 160$ кН, $\alpha = 10^\circ$, $l_2 = 30$ м; $T_{np} = 135$ кН.

- 1, 2, 3, 4 – графіки $Q = f(T_H)$ відповідно при кутах підходу несучого канату 5° , 10° , 15° , 20° .
- 1, 2, 3, 4 – відповідає вантажопідймальності установки 16 кН; аналогічно 1', 2', 3', 4' – вантажопідймальності 32 кН.
- I, II, III – графіки $T_H = f(Q)$ відповідно при довжинах прольоту $l_2 = 30$ м; 40 м; 50 м.

Література

1. Качурин В.К. Теория висящих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1962. – 224 с.
2. Мартинців М.П. Розрахунок основних елементів підвісних канатних лісотранспортних установок. – К.: Ясмина, 1996. – 175 с.

УДК 517.9

Проф. П.М. Гащук, д-р техн. наук; аспір. І.І. Назар –
НУ "Львівська політехніка"

ВПЛИВ ІМПУЛЬСНИХ СИЛ НА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ГНУЧКИХ РОБОЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИВОДУ У РЕЗОНАНСНОМУ ВИПАДКУ

Досліджено нелінійні коливання гнучких робочих елементів приводу під дією імпульсного збурення, частота яких близька до однієї із власних частот частотного спектру гнучкого елемента приводу (так званий резонансний випадок). Гнучкий робочий елемент приводу моделюється як однорідне одновимірне середовище, що рухається зі сталою швидкістю. Отримано математичні залежності, які визначають закони зміни амплітуди й частоти коливань гнучкого робочого елемента приводу залежно від природи імпульсних сил і нелінійно-пружних його характеристик.

Prof. P.M. Haschuk, post-graduate I.I. Nazar – NU "L'vivs'ka Politehnika"

Influence of impulsive forces on nonlinear vibrations of flexible working elements of drive in resonance case

The nonlinear vibrations of flexible working elements of drive are explored under the action of impulsive indignation, frequency of which is near to one of own frequencies of frequency spectrum of flexible element of drive (so-called resonance case). The flexible working element of drive is designed as a homogeneous oncemasurable environment which moves with permanent speed. Mathematical dependences which determine the laws of change of amplitude and frequency of vibrations of flexible working element of drive depending on nature of impulsive forces and his nonlinear-resilient descriptions are got.

Вступ: Задача про коливальні явища в приводах з гнучкими робочими елементами. Практично завжди експлуатацію приводів із гнучкими робочими елементами супроводжують яскраво виражені коливальні процеси, і в багатьох випадках ці процеси здатні навіть цілком порушувати нормальне функціонування систем з такими приводами. Коливання зумовлені дією на привідну систему (а подеколи-подекуди – суто на гнучкий робочий елемент) сил відповідної природи – періодичних, імпульсних (детермінованих й випадкових). Аналітичне дослідження впливу на коливальні процеси в приводах зазначеного штибу різних чинників (кінематичних і фізико-механічних параметрів самого приводу та параметрів періодичних впливів-збурень) пов'язане із значними математичними труднощами, оскільки відсутні точні математичні методи побудови розв'язків систем диференціальних рівнянь, що правлять за прийнятні математичні моделі гнучкого робочого елемента приводу. Наявність у диференціальному рівнянні змішаної похідної за лінійною і часовою змінними унеможливорює, навіть у разі лінійних аналогів таких систем, застосування для дослідження перебігу динамічних процесів відомих класичних (Фур'є чи д'Аламбера) методів інтегрування рівнянь з частинними похідними.

Найпростіші моделі коливних рухомих середовищ, висунуті, скажімо, в [1-3], спираються на низку не дуже привабливих припущень-обмежень (щодо швидкості руху середовища [1], щодо характеру дії зовнішнього збурення [2] та доволі часто – щодо природи нелінійних сил взагалі), а це значною мірою звужує клас прикладних задач, де ці моделі можуть стати в нагоді.

І все ж, в деяких прикладних задачах особливого змісту можна віднайти систему спрощень, відносити які до надмірних нема вагомих підстав. У цьому разі йдеться про задачу дослідження впливу на перебіг динамічних процесів в приводі з гнучким робочим елементом (на амплітудно-частотну характеристику робочого елемента): а) імпульсних сил, частота котрих близька до однієї із частот власного частотного спектру гнучкого робочого елемента, б) швидкості руху робочого елемента, в) фізико-механічних параметрів приводу.

Прийнятна модель гнучкого робочого елемента. Нехай за модель гнучкого елемента приводу може правити середовище зі сталим поперечним перерізом та рівномірно розосередженою вздовж своєї довжини масою (рис. 1). І нехай це середовище рухається зі сталою швидкістю.

У такому разі гнучкий елемент, якщо знехтувати ще і його згинальною жорсткістю, можна ототожнити з ниткою, і диференціальне рівняння його поперечних коливань подати у вигляді [4]

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} = \mu \left(F(u, u_x, u_t) + \sum_{j=1}^n F_j(u, u_x, u_t) \cdot \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) \right), \quad (1)$$

де: $u(x, t)$ – поперечне переміщення перерізу гнучкого елемента приводу з координатою x в довільну мить часу t ; V – модуль швидкості v його руху; $\alpha^2 = T/m$ – фізико-механічний параметр (T – модуль натягу T у гнучкому елементі приводу, m – його погонна маса); $F(u, u_x, u_t)$ – функція, яка характеризує пружні властивості гнучкого елемента, дисипативні сили і сили іншої природи; μ – малий параметр, який вказує на малу величину вказаних сил; δ – дельта функція Дірака; $t_i + j\tau$ – мить дії імпульсної сили; τ – період дії імпульсних чинників; $F_j(u, u_x, u_t)$ – функція, яка характеризує інтенсивність імпульсних сил. Зауважмо таке: 1. Диференціальне рівняння (1) описує також і поздовжні коливання гнучкого робочого елемента, але в такому разі стала α має відповідно інший зміст; 2. Сила ваги елементарного об'єму гнучкого елемента є малою порівняно із окресленими вище силами і нею нехтуємо.

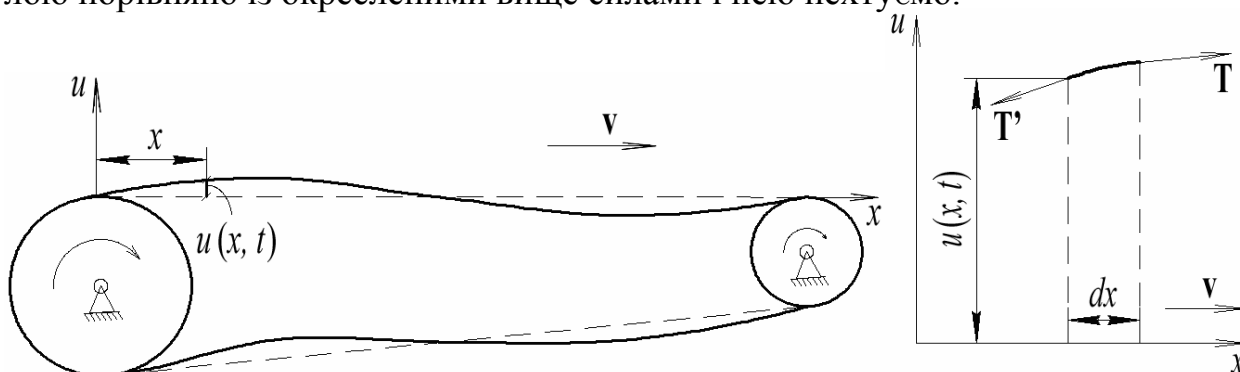


Рис. 1. Схема гнучкого робочого елемента приводу

Диференціальному рівнянню (1) поставимо у відповідність крайові умови

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

що засвідчують відсутність поперечних переміщень гнучкого елемента у деяких фіксованих точках $x=0$, $x=l$ (скажімо, в точках дотикання гнучкого елемента до шківів).

Надалі розглядатимемо лише випадок малих (порівняно із натягом T) нелінійних та імпульсних сил. Отож, права частина диференціального рівняння (1) є малою величиною порівняно із $\alpha^2 u_{xx}$. Для дослідження розв'язків цього рівняння використаємо загальні ідеї методу збурень [5] у поєднанні з методом Бубнова-Гальоркіна [6]. У такому разі розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайові умови (2), є сенс представити у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^s X_k(x) T_k(t),$$

де $X_k(x)$ – такі функції, що справджують крайові умови (2): $X_k(0) = X_k(l) = 0$. Легко переконатись, що прийнятною в цьому сенсі буде система функцій

$\{X_k(x)\} = \left\{ \sin \frac{k\pi}{l} x \right\}$. Отож, беручи до уваги повноту й ортонормованість системи функцій $X_k(x)$, для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ із (1) після нескладних перетворень висновуємо звичайні диференціальні рівняння

$$\ddot{T}_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 (\alpha^2 - V^2) T_k(t) = \mu \left(\bar{F}_k(T_k, \dot{T}_k) + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{jk}(T_k, \dot{T}_k) \cdot \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) \right), \quad (3)$$

$$\text{де: } \bar{F}_k(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{p_0} \int_0^l F(u, u_x, u_t) X_k(x) dx; \bar{F}_{jk}(T_k, \dot{T}_k) = \frac{1}{p_0} \int_0^l F_j(u, u_x, u_t) X_k(x) dx; p_0 = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

Резонансний випадок. Найцікавішим є випадок, коли частота власних коливань рівняння-моделі (незбурений рух) пов'язана із частотою імпульсного збурення співвідношенням $\frac{k\pi}{l} \sqrt{\alpha^2 - V^2} \approx \frac{q}{r} \nu$ (r, q – взаємно прості числа); тут $\nu = 2\pi / \tau$. Зазначене раніше дає підстави диференціальне рівняння (3) коливань гнучкого робочого елемента за дії імпульсних сил записати у вигляді

$$\ddot{T}_k + \left(\frac{q}{r} \nu \right)^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k = \mu \left(\bar{F}_k(T_k, \dot{T}_k, \nu t) - \Delta T_k + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{jk}(T_k, \dot{T}_k, \nu t) \cdot \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) \right),$$

$$\left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 (\alpha^2 - V^2) = \left(\frac{q}{r} \nu \right)^2 + \mu \Delta, \quad (4)$$

де $\mu \Delta$ – розбалансування.

На відміну від диференціального рівняння (1), побудувати і дослідити розв'язок рівняння (4) значно простіше. Зокрема, можна використати асимптотичний метод нелінійної механіки [7] чи метод Ван-дер-Поля [8, 9].

Метод Ван-дер-Поля. Зупинімось на методі Ван-дер-Поля, який є найпростішим і доволі зручним для інженерних досліджень. Відповідно до нього, заміною змінних $T_k(t) = a_k \cos \psi_k$, $\dot{T}_k(t) = -a_k \frac{q}{r} \nu \sin \psi_k$, $\psi_k = \frac{q}{r} \nu t + \theta_k$, рівняння зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно нових змінних a_k і θ_k :

$$\begin{aligned} \dot{a}_k = & -\sin \psi_k \frac{r\mu}{qv} \left(\bar{F}_k \left(a_k \cos \psi_k - av \frac{q}{r} \sin \psi_k \right) - \Delta a \frac{q}{r} \nu \cos \psi_k + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{jk} \left(a_k \cos \psi_k - av \frac{q}{r} \sin \psi_k \right) \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) \right), \\ \dot{\theta}_k = & -\cos \psi_k \frac{r\mu}{aqv} \left(\bar{F}_k \left(a_k \cos \psi_k - av \frac{q}{r} \sin \psi_k \right) - \Delta a \frac{q}{r} \nu \cos \psi_k + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{jk} \left(a_k \cos \psi_k - av \frac{q}{r} \sin \psi_k \right) \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Вважаючи, що $F(u, u_x, u_t)$ і $F_j(u, u_x, u_t)$ – многочлени, представимо функції $\bar{F}_k(a_k \cos \psi_k - a \omega_k \sin \psi_k)$ і $\bar{F}_{jk}(a_k \cos \psi_k - a \omega_k \sin \psi_k)$ у вигляді сум:

$$\begin{aligned}\sin \psi_k \bar{F}_k(u, u_x, u_t) &= F_{k0}^s(a) + \sum_n (F_{kn}^{ss}(a) \sin n\psi_k + F_{kn}^{sc}(a) \cos n\psi_k), \\ \sin \psi_k \bar{F}_{jk}(u, u_x, u_t) &= F_{jk0}^s(a) + \sum_n (F_{jkn}^{ss}(a) \sin n\psi_k + F_{jkn}^{sc}(a) \cos n\psi_k), \\ \cos \psi_k \bar{F}_k(u, u_x, u_t) &= F_{k0}^c(a) + \sum_n (F_{kn}^{cs}(a) \sin n\psi_k + F_{kn}^{cc}(a) \cos n\psi_k), \\ \cos \psi_k \bar{F}_{jk}(u, u_x, u_t) &= F_{jk0}^c(a) + \sum_n (F_{jkn}^{cs}(a) \sin n\psi_k + F_{jkn}^{cc}(a) \cos n\psi_k).\end{aligned}$$

Використовуючи властивості δ -функції Дірака

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad \sum_j \delta(t - j\tau) = \frac{\nu}{\tau} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1} \cos j\nu t \right], \quad \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

системі диференціальних рівнянь (5) після усереднення [10] можна надати вигляду

$$\begin{aligned}\frac{da_k}{dt} &= -\frac{\mu r}{2\pi\nu q} \left(F_{k0}^s(a) + \sum_j \left(F_{k0}^s(a) + \sum_{n=1} \sum_{k=1} (F_{jkn}^{sc}(a) \cos n(r\theta_k + k\nu t_i) + F_{jkn}^{ss}(a) \sin n(r\theta_k + k\nu t_i)) \right) \right), \\ \frac{d\theta_k}{dt} &= \frac{\mu r}{2qv} - \frac{\mu}{aqv} \left(F_{k0}^c(a) + \sum_j \left(F_{k0}^c(a) + \sum_{n=1} \sum_{k=1} (F_{jkn}^{cs}(a) \sin n(r\theta_k + k\nu t_i) + F_{jkn}^{cc}(a) \cos n(r\theta_k + k\nu t_i)) \right) \right).\end{aligned}$$

Приклад. Розглянемо поперечні коливання гнучкого робочого елемента приводу за умови, що малі сили тертя й опору пропорційні швидкості руху гнучкого елемента приводу, а імпульсні сили пропорційні величині $(\lambda u + \gamma u^3)$, а отже – відхиленню від рівноважного положення:

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} = \mu \left((\lambda u + \gamma u^3) \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \delta(t - (t_i + j\tau)) - \beta u_t \right).$$

У першому наближенні одночастотні коливання такого гнучкого елемента за крайових умов (2) можна записати у вигляді

$$u(x, t) = a(t) \cos \left(\frac{\nu}{2} qt + \theta(t) \right),$$

де $a(t)$ і $\theta(t)$ пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\mu \left(\frac{\beta a}{2} + \frac{a(2\lambda + \gamma a^2)}{2\pi q} \left(\sin 2\theta + \sin \left(2\theta + q \frac{\pi}{2} \right) \right) - \frac{\gamma a^3}{8\pi q} (1 + (-1)^q) \sin 4\theta \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{\omega^2 - \left(\frac{qv}{2} \right)^2}{qv} - \mu \left(\frac{4\lambda + 3\gamma a^2}{4\pi q} + \frac{\lambda + \gamma a^2}{2\pi q} \left(\cos 2\theta + \cos \left(2\theta + q \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\gamma a^2}{8\pi q} (1 + (-1)^q) \cos 4\theta \right).\end{aligned}$$

На рис. 2 відображено приклади зміни в часі амплітудної характеристики коливань при різних сталих швидкостях руху гнучкого елемента приводу.

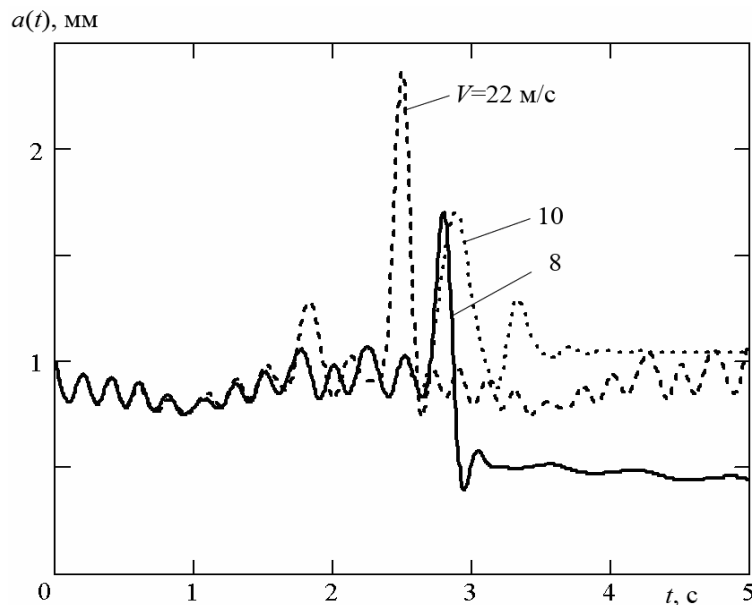


Рис. 2. Зміна з часом амплітудної характеристики резонансних коливань гнучкого робочого елементу

Резюме. Із отриманих результатів випливає таке:

- 1) незмінність швидкості руху гнучкого елементу приводу сприяє зменшенню частоти його коливань;
- 2) зростання швидкості V руху гнучкого робочого елементу приводу загалом веде до збільшення резонансного значення амплітуди; зокрема, при $V = 22$ м/с резонансна амплітуда на 28 % перевищує резонансну амплітуду при $V = 10$ м/с;
- 3) наявність імпульсних сил призводить до зміни резонансної амплітуди і фази в момент їх дії;
- 4) нелінійні сили впливають на форму хвиль і їх поширення;
- 5) вплив фізико-механічних параметрів гнучкого елементу приводу є істотним; зокрема, збільшення його натягу зменшує величину резонансної амплітуди.

Література

1. **Боженко М.В., Сліпчук А.М.** Вплив повздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем// Вісник НУ "Львівська політехніка": Динаміка, міцність та проектування машин та приладів. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2005, № 509. – С. 25-30.
2. **Назар І.І., Сокіл Б.І.** Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем// Вісник НУ "Львівська політехніка": Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів: НУ "Львівська політехніка". – 2006, № 560. – С. 71-75.
3. **Сліпчук А.М.** Нелінійні поперечні коливання пружної рухомої балки// Вісник НУ "Львівська політехніка": "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні". – Львів: НУ "Львівська політехніка". – 2004, № 515. – С. 47-51.
4. **Доценко П.Д.** Колебание и устойчивость движущейся полосы// Машиноведение, 1969, № 5. – С. 18-24.
5. **Найфе А.Х.** Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
6. **Галеркин Б.Г.** Стержни и пластинки// Вестник инженеров техников. – 1915, № 19. – С. 23-32.
7. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
8. **Казакевич В.В.** Приближенный метод исследования некоторых типов сильно нелинейных систем// Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. – К.: Наук. думка. – 1963, т. 1. – С. 226-252.
9. **Wan der Pol.** A Teory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations// Radio Review, 1920, № 1.
10. **Митропольский Ю.А.** Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1972. – С. 440.