

Висновки. Запропонований нами Логістичний центр "Сигнівка" дасть можливість:

- створити промислово складський комплекс;
- мінімізувати транспортні затрати з усіх напрямків;
- раціонально використати земельну ділянку промислової зони;
- забезпечити соціально-економічне зростання міста.

Література

1. Крикавський Є. Економічний потенціал логістичних систем. – Львів: Вид-во ДУ "Львівська політехніка", 1997. – 168 с.
2. www.lfa.com.ua/territory_evaluation.html
3. www.21.com.ua/ukrainian/portfel/logis/logdnepr.html

УДК 534.111

Здобувач Х.І. Ліщинська; доц. А.П. Сенік,
канд. фіз.-мат. наук – НУ "Львівська політехніка"

ПЕРІОДИЧНІ АТЕВ-ФУНКЦІЇ І МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ У ДОСЛІДЖЕННІ ОДНОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ СИСТЕМ

З використанням періодичних Атев-функцій, методів Ван-дер-Поля та усереднення розроблено методику дослідження коливних процесів у багатовимірних (двовимірних) нелінійно пружних системах. Отримано математичні залежності, які визначають вплив різної природи нелінійних сил на основні параметри динамічного процесу.

Competitor K.I. Lishchynska; assoc. prof. A.P. Senyk – NU "L'viv'ska Politekhnikha"

Periodic Ateb-functions and Van-der-Pole method in research of single-frequency oscillations of two-dimensional nonlinearly elastic systems

With use of periodic Ateb-functions, methods of Van-der-Pole and averages it is developed a technique of research of oscillatory processes in many-dimensional (two-dimensional) nonlinearly elastic systems. It is received mathematical dependences which define agency of the different nature of nonlinear forces on key parameters of dynamic process.

Актуальність і постановка задачі. Аналітичні методи дослідження коливних процесів у квазілінійних системах із зосередженими масами і розподіленими параметрами розроблені у достатній мірі для теоретичних і практичних цілей. Особливо ефективними методами їх використання є методи, в основі яких лежить теорія збурень [1, 2], зокрема асимптотичні методи нелінійної механіки [3-5]. Проблема значно ускладнюється у випадку, коли нелінійно-пружні характеристики систем мають чітко виражений нелінійний характер. Для таких систем тільки в окремих випадках вдається аналітично описати процес, а значить дослідити вплив тих чи інших сил (параметрів) на коливання. Зокрема, для систем зі степеневою нелінійністю або близьких до них на основі використання періодичних Атев-функцій [6-7], вдалось узагальнити асимптотичні методи КБМ на випадок одночастотних коливань у системах із зосередженими масами [8-10] та одновимірних систем із розподіленими параметрами [11-14]. Метою цієї роботи є узагальнення вказаних аналітичних методів на більш складні системи, а саме, багатовимірні (двовимірні) системи із розподіленими параметрами, нелінійно-пружні характеристики

яких можна апроксимувати близькою до степеневі залежністю. Таким чином, предметом дослідження цієї роботи є коливні процеси у системах, які описуються диференціальним рівнянням

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^v u_{xx} - \beta^2 (u_y)^v u_{yy} = \varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}). \quad (1)$$

Це рівняння охоплює коливні процеси широкого спектра двовимірних середовищ із розподіленими параметрами, зокрема, коливання стрічки транспортерів, пластини і т. д., і в ньому $u(t, x, y)$ – відхилення перерізу середовища з координатами x, y у довільний момент часу t ; $\alpha, \beta, v, \varepsilon$ – сталі, до того ж

$v+1 = \frac{2n+1}{2m+1}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$); ε – малий параметр; $f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$ – відома аналітична функція, яка, зрештою, описує: відхилення нелінійно пружних характеристик системи від степеневих законів; різної природи сили опору; дисипативні сили й ін. Параметр ε у правій частині вказує на малу величину найбільшого значення цих сил порівняно із найбільшим значенням відновлювальної сили – $\max \alpha^2 (u_x)^v u_{xx} \ll \max \varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$, і $\max \beta^2 (u_y)^v u_{yy} \ll \max \varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$.

Методика розв'язування. Для визначення впливу нелінійних сил на коливний процес систем, які описуються рівнянням (1), перейдемо до побудови його розв'язку. Відповідно до методів збурень [1, 2], розглянемо спочатку його незбурену ($\varepsilon = 0$) модель, тобто рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^v u_{xx} - \beta^2 (u_y)^v u_{yy} = 0. \quad (2)$$

Легко переконатись, що для побудови розв'язку рівняння (2) можна використати метод відокремлення змінних [15], відповідно до якого функцію $u(t, x, y)$ будемо шукати у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t)V(x, y). \quad (3)$$

Тоді функції $T(t)$ і $V(x, y)$ визначаються диференціальними рівняннями

$$\ddot{T}(t) + \lambda (T(t))^{v+1} = 0, \quad (4)$$

$$\alpha^2 (V_x(x, y))^v V_{xx}(x, y) + \beta^2 (V_y(x, y))^v V_{yy}(x, y) + \lambda V(x, y) = 0, \quad (5)$$

де λ – невідомий параметр, що буде визначено нижче.

Лінійно незалежні розв'язки рівнянь (4) і (5) виражаються через періодичні Ateb-функції у вигляді [16]

$$T(t) = T_0 \left\{ \begin{array}{l} ca \left(v+1, 1, \left(\frac{v+2}{2} \lambda T_0^v \right)^{\frac{1}{2}} t \right), \\ sa \left(v+1, 1, \left(\frac{v+2}{2} \lambda T_0^v \right)^{\frac{1}{2}} t \right) \end{array} \right\}, \quad (6)$$

$$V(x, y) = V_0 \left\{ \begin{array}{l} ca \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (x + \delta y) \right), \\ sa \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (x + \delta y) \right) \end{array} \right\}, \quad (7)$$

де $T_0, V_0, \lambda, \delta$ – сталі.

Для визначення λ і δ вважатимемо, що у сфері зміни незалежних лінійних змінних x, y поміщається ціле число півхвиль. Тому із властивостей періодичних Атеб-функцій випливає

$$\left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (b + \delta y) = \left(k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) + \delta y \right), \quad (8)$$

$$i \quad \left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (x + \delta c) = \left(x + m\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right), \quad (9)$$

де $k, m = 1, 2, \dots$; $\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)$ – півперіод Атеб-функцій, які описують процес зміни хвилі вздовж і впоперек середовища. Співвідношення (8) і (9) визначають параметри λ і δ у вигляді

$$\delta = \frac{mb}{kc}, \quad (10)$$

$$\lambda_{km} = \frac{2V_0^\nu(\alpha^2(kc)^{\nu+2} + \beta^2(mb)^{\nu+2})}{(\nu+2)(kc)^{\nu+2}} \left(\frac{k}{b}\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right)^{\nu+2}. \quad (11)$$

Підставляючи (10) і (11) в (6) і (7), із (3) отримаємо множину одночас-
тотних розв'язків рівняння (2) (за вказаних вище припущень) у вигляді

$$u(t, x, y) = a_k \left\{ \begin{array}{l} ca(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \varphi_k), \\ sa(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \varphi_k) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ca\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\left(\frac{k}{b}x + \frac{m}{c}y\right)\right), \\ sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\left(\frac{k}{b}x + \frac{m}{c}y\right)\right) \end{array} \right\}, \quad (12)$$

де a і φ сталі ($a = T_0V_0$), а $\omega_{km}(a)$ визначається залежністю

$$\omega_{km}(a) = \sqrt{\frac{\alpha^2(kc)^{\nu+2} + \beta^2(mb)^{\nu+2}}{(kc)^{\nu+2}} \left(\frac{k}{b}\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right)^{\nu+2}} a^{\frac{\nu}{2}}. \quad (13)$$

Примітки:

1. Нижче, для простоти, за розв'язок незбуреного рівняння будемо вибирати

$$u(t, x, y) = aca(\nu + 1, 1, \omega_k(a)t + \varphi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right), \quad (14)$$

в якому a і φ сталі;

2. Для компактності запису, індекс k , який вказує на форму коливань, опускатимемо.

Маючи множину одночастотних розв'язків незбуреного рівняння, розглянемо збурений його аналог (1). Існують різні підходи знаходження розв'язків вказаного типу рівнянь. Нижче зупинимось на підході, який побудований на узагальненні методу Ван-дер-Поля [16] для так званих коротких систем, тобто систем, для яких довжина основної хвилі є співрозмірною із геометричними розмірами середовища. Тоді, як трактує метод Ван-дер-Поля, співвідношення (14) можна вважати і розв'язком збуреного рівняння (1), тільки для останнього випадку параметри a і φ будуть вже функціями часу. З врахуванням вказаного, для випадку збуреного рівняння маємо:

$$u_t(x, y) = \dot{a}ca(\nu + 1, 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right) - \frac{2a}{\nu + 2}(\omega(a) + \dot{\varphi}) \cdot sa(1, \nu + 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right). \quad (15)$$

Приймаючи до уваги, що для випадку незбуреного рівняння

$$u_t(x, y) = -\frac{2a}{\nu + 2}\omega(a) \cdot sa(1, \nu + 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right). \quad (16)$$

відповідно до методу Ван-дер-Поля, із (15) і (16) отримуємо перше диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі змінні $\dot{a}(t)$ і $\dot{\varphi}(t)$

$$\dot{a}ca(\nu + 1, 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right) - \frac{2a}{\nu + 2}\dot{\varphi}(a) \cdot sa(1, \nu + 1, \psi) \cdot sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right) = 0. \quad (17)$$

Наступним диференціюванням (16) отримуємо:

$$u_{tt} = -\frac{2}{\nu + 2}sa\left(1, \frac{1}{\nu + 1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu + 1}\right)(x + \delta y)\right) \times \left\{ \dot{a}\left(\omega + a\frac{d\omega}{da}\right)sa(1, \nu + 1, \psi) - a\omega(a)(\omega(a) + \dot{\varphi}) \cdot ca^{\nu+1}(\nu + 1, 1, \psi) \right\}. \quad (18)$$

Підставляючи (10) в (1), з урахуванням того, що

$$\begin{aligned}
 u_x &= k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) aca^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi), \\
 u_{xx} &= -k^2\Pi^2\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) a\frac{1}{\nu+1}ca^{\frac{-\nu}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) \times \\
 &\quad \times sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi), \\
 u_y &= k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \delta aca^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi), \\
 u_{yy} &= -k^2\Pi^2\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \delta^2 a\frac{1}{\nu+1}ca^{\frac{-\nu}{\nu+1}}\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) \times \\
 &\quad \times sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) ca(\nu+1, 1, \psi),
 \end{aligned} \tag{19}$$

отримуємо друге диференціальне рівняння, яке зв'язує невідомі параметри $\dot{a}$ і $\dot{\phi}$ вигляду

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \dot{a} \frac{\nu+2}{2} \omega(a) sa(1, \nu+1, \psi) + \dot{\phi} a \omega ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi) \right\} \\
 &sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) = -\frac{\nu+2}{2} f^*(a, \psi, x, y),
 \end{aligned} \tag{20}$$

де $f^*(a, \psi, x, y)$ відповідає значенню функції $f(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy})$ за умови, що u і її похідні визначаються відповідно до формул (14), (16), (19).

Система диференціальних рівнянь (17), (20) визначає закони зміни $a(t)$ і $\phi(t)$ залежностями

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{-\int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^c f^*(a, \psi, x, y) sa(1, \nu+1, \psi) \cdot sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) d\psi dx dy}{a\omega \int_0^b \int_0^c sa^2\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) dx dy}, \\
 \dot{\phi} &= -\frac{\nu+2}{2} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^c f^*(a, \psi, x, y) ca(1, \nu+1, \psi) \cdot sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) d\psi dx dy}{\omega \int_0^b \int_0^c sa^2\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)(x+\delta y)\right) dx dy}.
 \end{aligned}$$

Висновки

Таким чином, розроблена методика дає змогу оцінити вплив фізико-механічних характеристик середовища на АФХ його коливань. Вона показує, що вже для незбуреного випадку період (частота) його коливань істотно залежить від амплітуди, а викладені у статті результати можуть бути узагальнені на випадок неавтономних систем, а як частковий випадок при $\nu=0$ (за де-

яких обмежень щодо середовища) отримуємо відомі результати [4], які стосуються коливань квазілінійних двовимірних середовищ.

Література

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 272 с.
2. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
4. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: ВШ, 1976. – 592 с.
5. Рабинович М.И. Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем// ДАН СССР. – 1971. – 191, № 6. – С. 1253-1256.
6. Сеник П.М. Про Ateb-функції// Доп. АН УРСР. – 1968, № 1. – С. 23-26.
7. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції// Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325-333.
8. Сеник П.М., Смерека И.П., Сокил Б.И. Асимптотический метод и периодические Ateb-функции в теории существенно нелинейных колебаний// В сб.: Асимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1977. – С. 143-156.
9. Сокил Б.И. Об асимптотическом представлении решения одной нелинейной системы при резонансе// Укр. мат. журн. – 1983. – 35, № 3. – С. 390-392.
10. Смерека И.П. Стационарные колебательные процессы в существенно нелинейных автономных системах, возбуждаемых мгновенными силами// Укр. мат. журн. – 1981. – 53, № 1. – С. 112-115.
11. Сокил Б.И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными// Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 6. – С. 803-805.
12. Сокил Б.И. Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння// Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 6. – С. 782-785.
13. Ліщинська Х.І. Застосування Ateb-функції для дослідження нелінійних коливань одновимірних систем// Вісник Хмельницького НУ. – 2006, № 4. – С. 62-65.
14. Сокил Б.І., Ліщинська Х.І. Асимптотичний метод і періодичні Ateb-функції у дослідженні коливних процесів рухомих нелінійно пружних одновимірних систем// Вісник НУ "Львівська політехніка": Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – 2006, № 556. – С. 57-64.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1977. – 736 с.
16. Сокил Б.І., Ліщинська Х.І. Динамічні процеси в сильно нелінійних двовимірних системах і Ateb-функції у їх дослідженні// Наук. вісник НЛТУ України: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУУ. – 2007, вип. 17.5. – С. 213-217.

УДК 517.39:519.872.6

Доц. Р.В. Зінко, канд. техн. наук;
О.М. Маковейчук¹ – НУ "Львівська політехніка"

ПРИНЦИПИ ФОРМУВАННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Запропоновано принципи формування інтелектуальної транспортної системи для великих міст. Зокрема, наведено приклад для міста Львова.

Assoc. prof. R.V. Zinko; O.M. Makoveychuk¹ – NU "L'viv's'ka Politekhnik"

Principle of creating of Intelligent Transportation Systems

There is the Principle of creating of Intelligent Transportation Systems for a big city. Also the example for the Lviv city is represented.

¹ провідний інженер-програміст – ТЗОВ "БІТ" (leading eng. – "BIT" Ltd.)