

жимів сушіння пиломатеріалів знайдено інтегральні значення ентальпії (тепловмісту) залежно від вологості деревини і товщини матеріалу. Уточнено методику витрат розрахунку теплоти і повітря на процес сушіння і визначено середнє значення ексергії ($\eta_Q=0,14$) одного кілограма циркуляційного повітря в камері

2. Ідентифіковано закономірності зміни режимних параметрів за їх інтегральною величиною – ентальпією в процесі сушіння букових пиломатеріалів у вигляді функціональної залежності $H_i=f(W_i, S_1)$. Залежності апроксимовано за методом середніх та методом найменших квадратів. Отримано загальне розрахункове рівняння, яке поєднує режимні параметри середовища (температуру (t_c), відносну вологість (ϕ)) та характеристики матеріалу (вологість (W_i), товщину (S_1)) в процесі сушіння букових пиломатеріалів. За величиною зміни ентальпії, де $I_2 \approx I_1$ та вологовмісту (d_2) можна визначати питомі витрати теплоти на випаровування 1 кг води.

Література

1. Кречетов И.В. Сушка и защита древесины. – М.: Лесн. пром-сть, 1987. – 432 с.
2. Соколов П.В. Сушка древесины. – М.: Лесн. пром-сть, 1968. – 360 с.
3. Сергоский П.С., Расьев А.И. Гидротермическая обработка и консервирование древесины. – М.: Лесн. пром-сть, 1987. – 360 с.
4. Руководящие технические материалы по технологии камерной сушки древесины. – Архангельск.: ЦНИИМОД, 1985. – 143 с.
5. Билей П.В. Сушка древесины твердых лиственных пород. – М.: Экология, 1992. – 224 с.
6. Билей П.В., Гуменюк Ж.Я., Соколовський І.А. Спосіб сушіння деревини// Деклараційний патент на винахід. Бюл. № 12 від 15.12.2003 F26B3/00, № 2003021463.

УДК 517.945

Доц. В.П. Карашецький, канд. техн. наук –
НЛТУ України, м. Львів

КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ОБ'ЄМОМ ТЕТРАЕДРА НА ОСНОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОВНИХ ПОЛІНОМІВ

Отримані кубатурні формули чисельного інтегрування за об'ємом тетраедра на основі інтерполяційних повних поліномів для лагранжевого тетраедра першого, другого, третього і четвертого порядків.

Ключові слова: кубатурна формула, лагранжевий тетраедр, симплексні координати.

Assoc. prof. V.P. Karashetsky – NUFWT of Ukraine, L'viv

Cubature formulas for numerical integration through tetrahedron volume with full interpolation polynomials

Cubature formulas for numerical integration through tetrahedron volume were obtained with full interpolation polynomials for LaGrange tetrahedron of the first, second, third and fourth orders.

Keywords: cubature formula, LaGrange tetrahedron, natural coordinators.

Розглянемо задачу обчислення інтегралу

$$\int_{V_m} \omega(x, y, z) dv, \quad (1)$$

де: $\omega(x, y, z)$ – неперервна функція у межах лагранжевого тетраедра, якщо задані значення функції $\omega(x, y, z)$ у вузлах, як вказано на рис. 1; v_m – об'єм лагранжевого тетраедра.

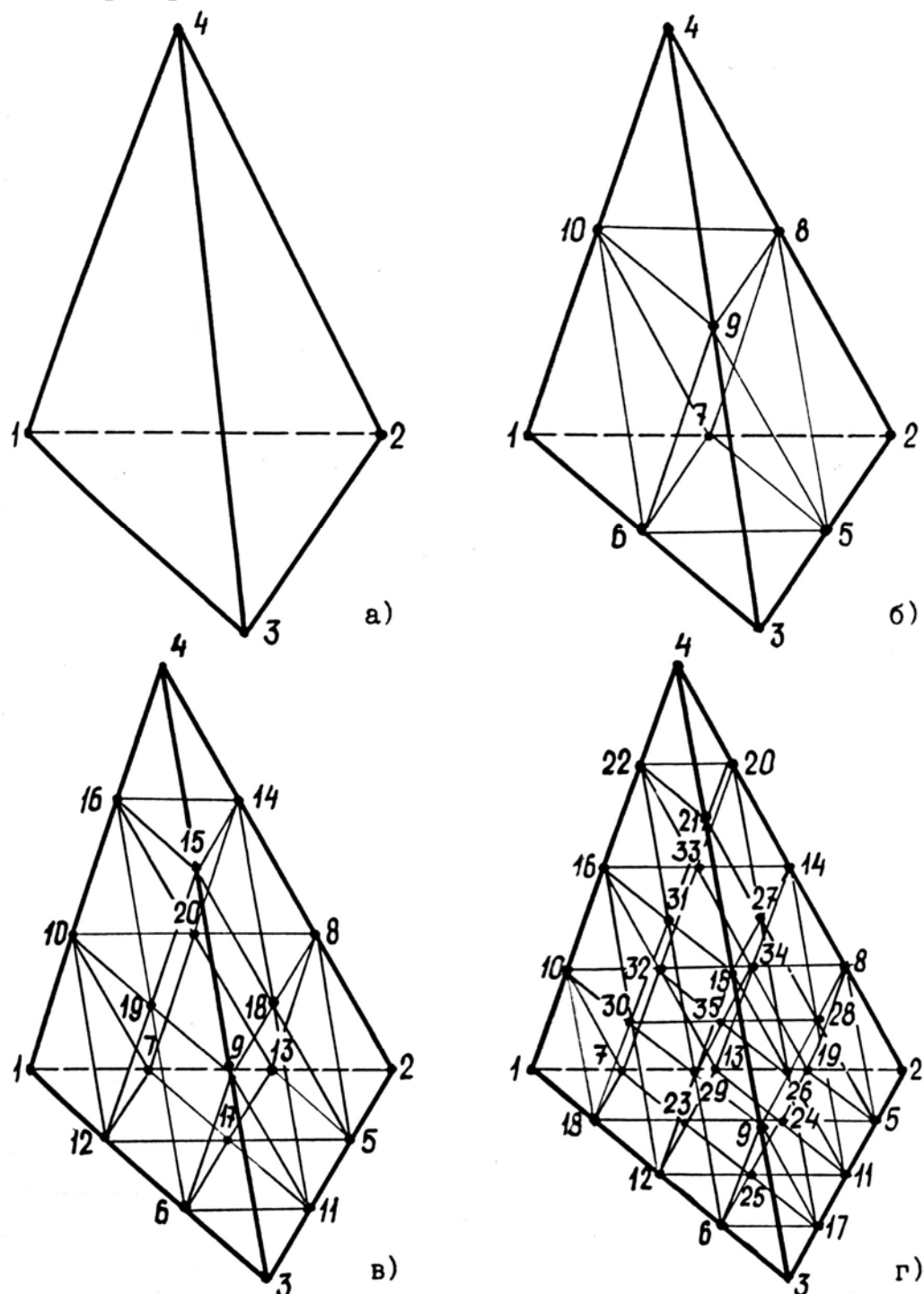


Рис. 1. Лагранжеві тетраедри: а) першого порядку; б) другого порядку; в) третього порядку; г) четвертого порядку

У загальному випадку кількість P вузлів лагранжевого тетраедра дорівнює кількості членів повного поліному n -го степеня і визначається за допомогою такого виразу

$$P = \frac{(n+3)!}{n!3!}. \quad (2)$$

Інтерполюємо функцію $\omega(x, y, z)$ повним поліномом n -го степеня

$$\omega(x, y, z) = \vec{K} \vec{\eta}_*, \quad (3)$$

$$\text{де} \quad \vec{K} = (1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, xyz, \dots, x^n, y^n, z^n) \quad (4)$$

– координатний вектор поточної точки з координатами x, y, z , яка зображається вектором-рядком, що містить добутки вигляду $x^a y^b z^c$ ($a, b, c \leq n, a + b + c \leq n$); $\vec{\eta}_* = (\eta_1, \dots, \eta_P)^*$ – вектор-стовпець коефіцієнтів поліному.

Склавши вирази виду (3) для кожного з P вузлів лагранжевого тетраедра, отримуємо векторне рівняння

$$\vec{\omega}_* = K_* \vec{\eta}_*, \quad (5)$$

де: $\vec{\omega}_* = (\omega_1, \dots, \omega_P)^*$ – P – вимірний вектор-стовпець значень функції $\omega(x, y, z)$ у вузлах лагранжевого тетраедра;

$$K_* = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & \dots & x_1^n & y_1^n & z_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_P & y_P & z_P & x_P y_P & y_P z_P & z_P x_P & \dots & x_P^n & y_P^n & z_P^n \end{pmatrix}; \quad (6)$$

P – вимірна квадратна матриця, рядки якої є координатними векторами вигляду (4) у вузлах лагранжевого тетраедра. З (5) випливає, що $\vec{\eta}_* = K_*^{-1} \vec{\omega}_*$, тому

$$\omega(x, y, z) = \vec{K} K_*^{-1} \vec{\omega}_*. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у такому вигляді

$$\omega(x, y, z) = \vec{N} \vec{\omega}_*, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad \vec{N} = \vec{K} K_*^{-1} = (N_1, \dots, N_P) \quad (9)$$

– вектор-рядок функцій форми (базисних функцій). Підставивши (5) у вираз (8), з врахуванням (6) дістаємо

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) = \vec{N} K_* \vec{\eta}_* = & \eta_1 \sum_{j=1}^P N_j + \eta_2 \sum_{j=1}^P N_j x_j + \eta_3 \sum_{j=1}^P N_j y_j + \eta_4 \sum_{j=1}^P N_j z_j + \dots + \\ & + \eta_{P-2} \sum_{j=1}^P N_j x_j^n + \eta_{P-1} \sum_{j=1}^P N_j y_j^n + \eta_P \sum_{j=1}^P N_j z_j^n, \end{aligned} \quad (10)$$

де j – порядковий номер вузла лагранжевого тетраедра.

Порівнюючи (10) з (3), отримуємо систему P рівнянь такого вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^P N_j &= 1; \sum_{j=1}^P N_j x_j = x; \sum_{j=1}^P N_j y_j = y; \sum_{j=1}^P N_j z_j = z; \\ \dots \sum_{j=1}^P N_j x_j^n &= x^n; \sum_{j=1}^P N_j y_j^n = y^n; \sum_{j=1}^P N_j z_j^n = z^n, \end{aligned} \quad (11)$$

якій повинні задовольняти функції форми повного поліному n -го степеня.

Шуканий інтеграл (1) з врахуванням (8), тепер має вигляд

$$\int_{v_m} \omega(x, y, z) dv = \int_{v_m} \vec{N} \vec{\omega} dv. \quad (12)$$

Скористуємося для лагранжевого тетраедра симплексною системою відносних координат [2], в якій симплексні координати L_1, L_2, L_3, L_4 точки E , що належить тетраедру (рис. 2), визначаються як відношення об'єктів

$$L_i = \frac{v_i}{v_m}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (13)$$

де: v_i – об'єм тетраедра з вершиною у точці E і гранню, протилежною i -ій вершині тетраедра; v_m – об'єм тетраедра.

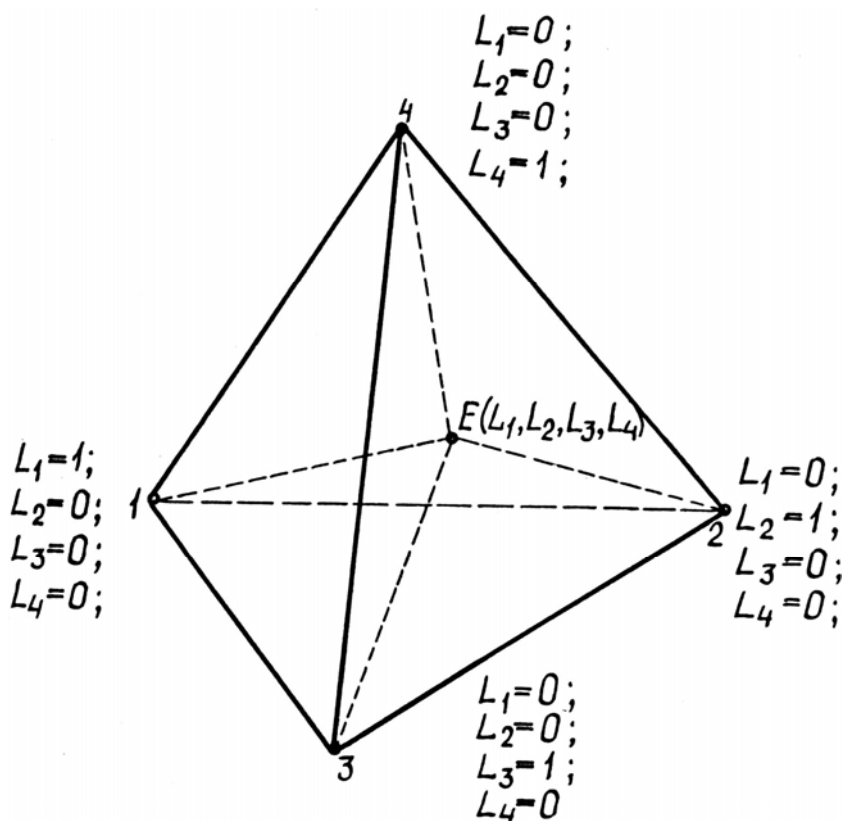


Рис. 2. Симплексні координати в лагранжевому тетраедрі

Для будь-якої точки розміщеної на грані, протилежній i -ій вершині,

$$L_i = 0. \quad (14)$$

Екстремальні значення симплексних координат лежать у межах від 0 до 1.

Зв'язок між симплексними і декартовими координатами визначається системою рівнянь

$$\begin{aligned} L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 &= x; \\ L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 &= y; \\ L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 &= z; \\ L_1 + L_2 + L_3 + L_4 &= 1, \end{aligned} \quad (15)$$

де $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, 4}$ – координати вершин тетраедра.

За початок прямокутної системи координат можна прийняти будь-яку точку всередині об'єму тетраедра, однак найчастіше його поміщають в одну з вершин тетраедра. Розташування у просторі координатних осей XYZ прямокутної системи вибирається довільно.

Як видно із порівняння (15) з (11), для лагранжевого тетраедра першого порядку симплексні координати є одночасно функціями форми, тобто

$$N_1 = L_1; N_2 = L_2; N_3 = L_3; N_4 = L_4. \quad (16)$$

За методикою, викладеною в [2], елементи вектора $\vec{N}$ функцій форми для лагранжевих тетраедрів, зображених на рис. 1 б, в, г, визначаються за формулами:

- для лагранжевого тетраедра другого порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1); N_2 = L_2(2L_2 - 1); \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1); N_4 = L_4(2L_4 - 1); \\ N_5 &= 4L_2L_3; N_6 = 4L_1L_3; N_7 = 4L_1L_2; \\ N_8 &= 4L_2L_4; N_9 = 4L_3L_4; N_{10} = 4L_1L_4, \end{aligned} \quad (17)$$

- для лагранжевого тетраедра третього порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} L_1(3L_1 - 1)(3L_1 - 2); N_2 = \frac{1}{2} L_2(3L_2 - 1)(3L_2 - 2); \\ N_3 &= \frac{1}{2} L_3(3L_3 - 1)(3L_3 - 2); N_4 = \frac{1}{2} L_4(3L_4 - 1)(3L_4 - 2); \\ N_5 &= \frac{9}{2} L_2L_3(3L_2 - 1); N_6 = \frac{9}{2} L_1L_3(3L_3 - 1); \\ N_7 &= \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1 - 1); N_8 = \frac{9}{2} L_2L_3(3L_3 - 1); \\ N_9 &= \frac{9}{2} L_1L_3(3L_1 - 1); N_{10} = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_2 - 1); \\ N_{11} &= \frac{9}{2} L_2L_4(3L_2 - 1); N_{12} = \frac{9}{2} L_3L_4(3L_3 - 1); \\ N_{13} &= \frac{9}{2} L_1L_4(3L_1 - 1); N_{14} = \frac{9}{2} L_2L_4(3L_4 - 1); \\ N_{15} &= \frac{9}{2} L_3L_4(3L_4 - 1); N_{16} = \frac{9}{2} L_1L_4(3L_4 - 1); \\ N_{17} &= 27L_1L_2L_3; N_{18} = 27L_2L_3L_4; N_{19} = 27L_1L_3L_4; N_{20} = 27L_1L_2L_4, \end{aligned} \quad (18)$$

- для лагранжевого тетраедра четвертого порядку

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{3} L_1(32L_1^3 - 48L_1^2 + 22L_1 - 3); N_2 = \frac{1}{3} L_2(32L_2^3 - 48L_2^2 + 22L_2 - 3); \\ N_3 &= \frac{1}{3} L_3(32L_3^3 - 48L_3^2 + 22L_3 - 3); N_4 = \frac{1}{3} L_4(32L_4^3 - 48L_4^2 + 22L_4 - 3); \\ N_5 &= \frac{16}{3} L_2L_3(8L_2^2 - 6L_2 + 1); N_6 = \frac{16}{3} L_1L_3(8L_3^2 - 6L_3 + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_7 &= \frac{16}{3} L_1 L_2 (8L_1^2 - 6L_1 + 1); N_8 = 4L_2 L_3 (4L_2 - 1)(4L_3 - 1); \\
 N_9 &= 4L_1 L_3 (4L_1 - 1)(4L_3 - 1); N_{10} = 4L_1 L_2 (4L_1 - 1)(4L_2 - 1); \\
 N_{11} &= \frac{16}{3} L_2 L_3 (8L_3^2 - 6L_3 + 1); N_{12} = \frac{16}{3} L_1 L_3 (8L_1^2 - 6L_1 + 1); \\
 N_{13} &= \frac{16}{3} L_1 L_2 (8L_2^2 - 6L_2 + 1); N_{14} = \frac{16}{3} L_2 L_4 (8L_2^2 - 6L_2 + 1); \\
 N_{15} &= \frac{16}{3} L_3 L_4 (8L_3^2 - 6L_3 + 1); N_{16} = \frac{16}{3} L_1 L_4 (8L_1^2 - 6L_1 + 1); \\
 N_{17} &= 4L_2 L_4 (4L_2 - 1)(4L_4 - 1); N_{18} = 4L_3 L_4 (4L_3 - 1)(4L_4 - 1); \\
 N_{19} &= 4L_1 L_4 (4L_1 - 1)(4L_4 - 1); N_{20} = \frac{16}{3} L_2 L_4 (8L_4^2 - 6L_4 + 1); \\
 N_{21} &= \frac{16}{3} L_3 L_4 (8L_4^2 - 6L_4 + 1); N_{22} = \frac{16}{3} L_1 L_4 (8L_4^2 - 6L_4 + 1); \\
 N_{23} &= 32L_1 L_2 L_3 (4L_1 - 1); N_{24} = 32L_1 L_2 L_3 (4L_2 - 1); \\
 N_{25} &= 32L_1 L_2 L_3 (4L_3 - 1); N_{26} = 32L_2 L_3 L_4 (4L_3 - 1); \\
 N_{27} &= 32L_2 L_3 L_4 (4L_4 - 1); N_{28} = 32L_2 L_3 L_4 (4L_2 - 1); \\
 N_{29} &= 32L_1 L_3 L_4 (4L_3 - 1); N_{30} = 32L_1 L_3 L_4 (4L_1 - 1); \\
 N_{31} &= 32L_1 L_3 L_4 (4L_4 - 1); N_{32} = 32L_1 L_2 L_4 (4L_1 - 1); \\
 N_{33} &= 32L_1 L_2 L_4 (4L_4 - 1); N_{34} = 32L_1 L_2 L_4 (4L_2 - 1); \\
 N_{35} &= 256L_1 L_2 L_3 L_4.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Як видно з (16)-(19), функції форми для лагранжевих тетраедрів мають вигляд алгебраїчних виразів стосовно симплексних координат.

Друга перевага лагранжевого тетраедра може бути легко виконане в аналітичному вигляді, якщо застосувати відому формулу інтегрування [3]

$$\int_{v_m} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6v_m, \tag{20}$$

де об'єм v_m тетраедра визначається через координати його вершин у прямокутній системі координат за формулою

$$v_m = \frac{1}{6} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Враховуючи (12), (16), (20), отримуємо кубатурну формулу для лагранжевого тетраедра першого порядку

$$\begin{aligned}
 \int_{v_m} \omega(x, y, z) dv &= \int_{v_m} (N_1 \omega_1 + N_2 \omega_2 + N_3 \omega_3 + N_4 \omega_4) dv = \\
 &= \omega_1 \int_{v_m} L_1 dv + \omega_2 \int_{v_m} L_2 dv + \omega_3 \int_{v_m} L_3 dv + \omega_4 \int_{v_m} L_4 dv = \frac{6}{4!} v_m (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4),
 \end{aligned}$$

або остаточно
$$\int_{v_m} \omega(x, y, z) dv = v_m \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \omega_j. \quad (22)$$

Об'єм v_m тетраедра обчислюється згідно з (21). Формула (22) з врахуванням (21) збігається з кубатурною формулою для тривимірного симплексу, наведеною у [1].

Підставляючи (17)-(19) у (12) і враховуючи (20), отримуємо не відомі раніше кубатурні формули для лагранжевого тетраедра другого, третього і четвертого порядків

$$\int_{v_m} \omega(x, y, z) dv = v_m \left(-\frac{1}{20} \sum_{j=1}^4 \omega_j + \frac{1}{5} \sum_{j=5}^{10} \omega_j \right); \quad (23)$$

$$\int_{v_m} \omega(x, y, z) dv = v_m \left(\frac{1}{40} \sum_{j=1}^4 \omega_j + \frac{9}{40} \sum_{j=17}^{20} \omega_j \right); \quad (24)$$

$$\int_{v_m} \omega(x, y, z) dv = v_m \left(-\frac{1}{84} \sum_{j=1}^4 \omega_j + \frac{4}{105} \sum_{j=5}^{10} \omega_j - \frac{1}{35} \sum_{j=11}^{16} \omega_j + \frac{4}{105} \sum_{j=17}^{34} \omega_j + \frac{32}{105} \omega_{35} \right). \quad (25)$$

Вказаним способом можна отримати кубатурні формули для лагранжевих тетраедрів більш високих порядків.

Як бачимо з (24) кубатурна формула для лагранжевого тетраедра третього порядку не залежить від значень функції $\omega(x, y, z)$ у вузлах з 5 до 16, що значно спрощує її обчислення.

Література

1. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 372 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Eisenberg M.A., Malvern L.E. On Finite Elements Integration in Natural Coordinators, Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 1973, Vol. 7, p. – P. 574-575.

УДК 332.133.6:658.7 (477.83)

Аспір. М.В. Гомонай-Стрижко –

Інститут регіональних досліджень НАН України

ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ЛОГІСТИЧНОГО ЦЕНТРУ "СИГНІВКА" У МІСТІ ЛЬВОВІ

Розроблено і обґрунтовано ефективну математично-транспортну модель логістичного центру на території промислового вузла "Сигнівка" у місті Львові. Наведено структуру нового логістичного центру "Сигнівка".

Post-graduate M.V. Gomonaj-Stryzhko – Regional research institute NASU

Substantiation of the model of the logistic centre "Sygnivka" in the city of Lviv

This article elaborates the efficient mathematical transport model of the logistic centre on the territory of the industrial complex in the city of Lviv. The structure of the new logistic centre "Sygnivka" has been described.