

Коректувальні пристрої дають змогу виміряти температуру газового потоку за проміжок часу набагато менший, ніж стала часу приймача температури. Тому схеми приймачів температури з коректуючими пристроями часто використовують при необхідності короткочасних вимірювань високих температур потоку, що перевищують допустимі для приймачів.

Висновки. У роботі розглянуто методи вимірювання швидкозмінних температур газових потоків шляхом введення поправок у покази інерційних приймачів температури та описано методику проведення таких вимірювань.

Література

1. **Фединець В.О.** Дослідження динамічних характеристик термоперетворювачів для вимірювання температури газових середовищ// Вимірювальна техніка та метрологія. – 2003, вип. 63. – С. 60-62.
2. **Kilburg H.P.** A High Response Probe for Measurement of Total Temperature and Total Pressure Profiles through Turbulent Boundary Layer with Heat Transfer in Supersonic Flow// AIAA. – Paper, № 68-374. – 1978. – 9 pp.
3. **Alverman W.** Bestimmung von Temperaturprofilen mit Thermoelementen// Ztschr. fur Flugwissenschaften. – IV. – V.14, № 4. – 1986. – P. 179-183.
4. **Softley E.J.** Use of a Pulse Heated Fine Wire Probe for the Measurement of Total Temperature in Shock Driven Facilities// AIAA. – Paper, № 68-393. – 1988. – 12 pp.
5. **Quamby A.** Transient Response of Wire Resistance Thermometers// RAS. – V.68, № 646. – 1984. – P. 696-698.
6. **Basic Theory** of Millisecond Response Thermocouples// Instrument Practice. – V.24, № 10. – 1970. – P. 687-691.

УДК 539.375

*Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук; ст. викл. І.В. Дідух –
НЛТУ України, м. Львів*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОСТУ ПОВЕРХНЕВОЇ ПІВЕЛІПТИЧНОЇ ТРІЩИНИ У ПРУЖНОПЛАСТИЧНОМУ ТІЛІ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Робота присвячена проблемам оцінки ресурсу елементів конструкцій, підданих дії циклічного навантаження на стадії росту поверхневої тріщини. Основу математичної моделі становить диференціальне рівняння в частинних похідних для дослідження кінетики втомних тріщин у тривимірному пружнопластичному тілі в умовах малоциклової і багатоциклової втоми. У цьому рівнянні основним параметром, що відповідає за ріст втомної тріщини є ефективний розмах розкриття її вершини. Запропонована в роботі математична модель дає змогу ефективного розрахунку елементів конструкцій з урахуванням наявності поверхневої півеліптичної тріщини.

Ключові слова: втомна тріщина, залишкова довговічність, циклічне навантаження, ефективний розмах розкриття вершини тріщини.

Prof. M.M. Stadnyk; senior teacher I.V. Didukh – NUFWT of Ukraine, L'viv

The mathematical model growth of surface semi-elliptical crack in elastoplastic body under cyclic loading

The work is devoted the problems of assessing the life time of structural elements at the stage of surface cracks propagation under cyclic loading. The mathematical model is based on a partial differential equation to determine the kinetics of fatigue cracks in a three-dimensional elastoplastic body under high-cycle or low-cycle fatigue. In this equation, the basic parameter, responsible for crack growth rate, is the effective crack tip opening displacement

range. The proposed mathematical model in this work gives possibility of effective calculation on the life time of structural elements with account of fatigue surface semi-elliptical crack.

Keywords: fatigue crack, residual life time, cyclic loading, effective crack tip opening displacement range

Оцінка міцності та ресурсу роботи елементів конструкцій досить часто базується на методах лінійної механіки руйнування, в основу якої покладена концепція коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), за допомогою яких можна визначати напруження і деформації в малому okolí вершини тріщини. Оскільки елементи відповідальних конструкцій працюють під високими рівнями циклічних напружень, то для їх виготовлення використовують сталі низької та середньої міцності ($\sigma_T = 200 \dots 1300$ МПа), руйнування яких супроводжується значними пластичними деформаціями. А відтак, застосування лінійної механіки руйнування, результати якої синтезовані у багатьох роботах і довідникових посібниках, є не досить коректним для визначення напружено-деформованого стану і розрахунку залишкового ресурсу в таких випадках.

У процесі виготовлення або експлуатації елементів конструкцій у них можуть виникати тріщиноподібні дефекти. Ці дефекти під дією циклічного навантаження розвиваються і через деякий час стають критичними, що призводить до руйнування конструкції. Тому розрахунок ресурсу елементів конструкцій на основі вивчення процесу поширення в них втомних тріщин із застосуванням підходів нелінійної механіки руйнування, зокрема узагальненої δ_K -моделі [1], є актуальною науково-технічною проблемою. Вирішенню проблеми щодо побудови відповідної математичної моделі для встановлення ресурсу елементів конструкцій на стадії розвитку втомних поверхневих неавтономельних тріщин присвячена дана робота.

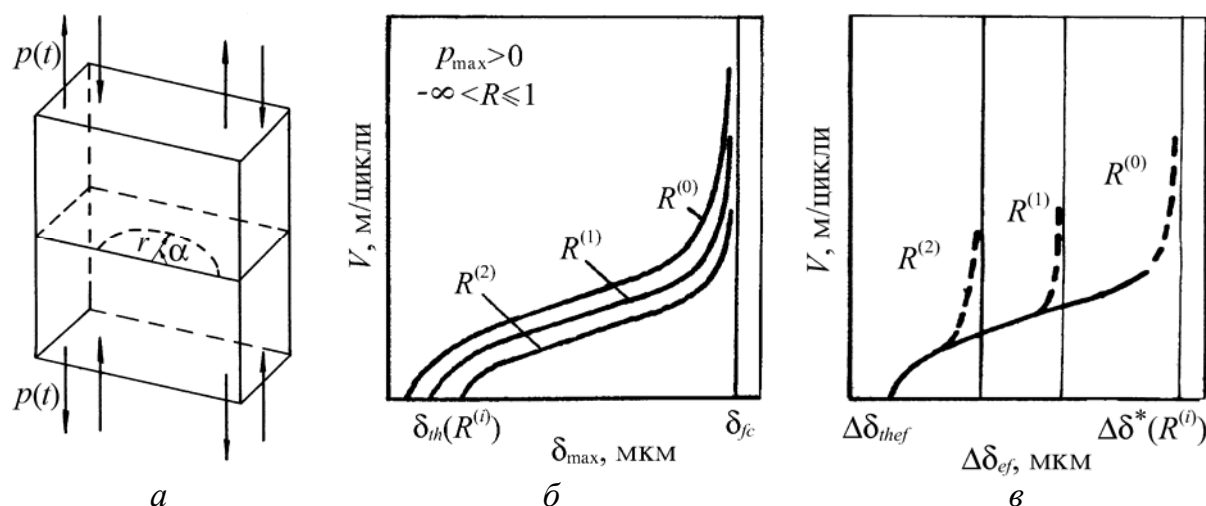


Рис. 1. Втомна поверхнева півеліптична тріщина в тривимірному тілі (а), схематичне зображення діаграм росту втомної тріщини в осях $V \sim \delta_{max}$ (б), і $V \sim \Delta \delta_{ef}$ (в)

Для дослідження росту втомної тріщини, зокрема поверхневої півеліптичної тріщини (рис. 1, а) у пружно-пластичному тілі під циклічним навантаженням $p(t)$, в роботі запропоновано диференціальне рівняння в частинних

похідних, отримане на основі відомих у літературі результатів [2], в якому швидкість росту тріщини V є однозначною функцією максимального розкриття її вершини $\delta_{\max} = \delta_{|p=p_{\max}}$ на стадії навантаження (рис. 1, б) для заданої асиметрії $R = p_{\min} / p_{\max}$. Максимальне розкриття вершини тріщини визначаємо аналітично на основі результатів [3].

$$\frac{\partial r}{\partial N} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} = V(\lambda, A, m, \lambda_0), \quad r(\alpha, N)|_{N=0} = r_0(\alpha), \quad (1)$$

$$\text{де: } V(\lambda, A, m, \lambda_0) = \frac{1}{A(R)} \left[\left(\frac{\lambda_0(R)}{\lambda_0(R) - \lambda} \right)^{m(R)} - 1 \right]^{-1}, \quad \lambda = 1 - \sqrt{\frac{\delta_{\max}}{\delta_{fc}}}, \quad \lambda_0 = 1 - \sqrt{\frac{\delta_{th}}{\delta_{fc}}}; \quad N -$$

кількість циклів; A, m – константи матеріалу, які визначаються на основі даних експерименту і є різними (рис. 1 б) для кожної асиметрії циклічного навантаження; δ_{th} – константа матеріалу для заданої асиметрії навантаження, порогове значення розкриття вершини втомної тріщини, нижче якого вона не росте; δ_{fc} – константа матеріалу, критичне значення розкриття вершини втомної тріщини, інваріант відносно асиметрії навантаження.

Для того, щоб більш адекватно описати процеси пластичного деформування, що відбуваються у вершині фізичної тріщини під час дії на тіло циклічного навантаження, перейдемо у диференціальному рівнянні (1) від координат $V \sim \delta_{\max}$ до координат $V \sim \Delta\delta_{ef}$ за формулою

$$\delta_{\max} = \frac{\Delta\delta_{ef}}{U_1^2 / 2}, \quad (2)$$

де: $\Delta\delta_{ef} = \delta_{\max} - \delta_{\min}$ – розмах розкриття вершини тріщини з урахуванням пластичних витяжок, що формуються на її берегах, внаслідок виникнення залишкових деформацій при проходженні через пластичну зону; $\delta_{\min} = \delta_{|p=p_{\min}}$ на стадії розвантаження; U_1 – відома в літературі функція, що знаходиться шляхом розв'язання відповідних граничних задач теорії тріщин або з експерименту і є функцією асиметрії для автотемпильної тріщини та асиметрії і рівня зовнішнього навантаження для неавтотемпильної тріщини.

Використовуючи формули (1) і (2), маємо:

$$\frac{\partial r}{\partial N} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{1}{A_1} \left[\left(\frac{\sqrt{\Delta\delta^*(R)} - \sqrt{\Delta\delta_{thef}}}{\sqrt{\Delta\delta_{ef}} - \sqrt{\Delta\delta_{thef}}} \right)^{m_1} - 1 \right]^{-1}. \quad (3)$$

Тут швидкість росту тріщини є однозначною функцією ефективного розмаху розкриття її вершини $\Delta\delta_{ef}$ ($\Delta\delta_{thef} \leq \Delta\delta_{ef} < \Delta\delta^*(R)$) і не залежить від асиметрії навантаження на першій і другій ділянках діаграми втомного руйнування (рис. 1 в), $\Delta\delta_{thef} = \Delta K_{thef}^2 / (2\sigma_0 E)$ – константа матеріалу, інваріант відносно асиметрії навантаження, порогове значення ефективного розмаху розкриття вершини втомної тріщини, нижче якого тріщина не росте,

$\Delta\delta^*(R) = \delta_{fc} U_1^2 / 2$, константи A_1, m_1 є інваріантними відносно асиметрії навантаження і тому для їх визначення достатньо побудувати лише одну діаграму втомного руйнування.

У частковому випадку, для дослідження росту втомної тріщини за малоциклової втоми, формулу (3) можна замінити наближено еквівалентною формулою

$$\frac{\partial r}{\partial N} \left[1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2} = C_0 \Delta\delta_{ef}^{n_0}, \quad (4)$$

де C_0, n_0 – константи матеріалу інваріантні відносно асиметрії навантаження.

Для визначення параметра ефективного розмаху розкриття вершини тріщини $\Delta\delta_{ef}$, який входить у диференціальні рівняння (3) і (4), розглянемо зміну напружено-деформованого стану в її вершині протягом одного циклу навантаження (рис. 2 а).

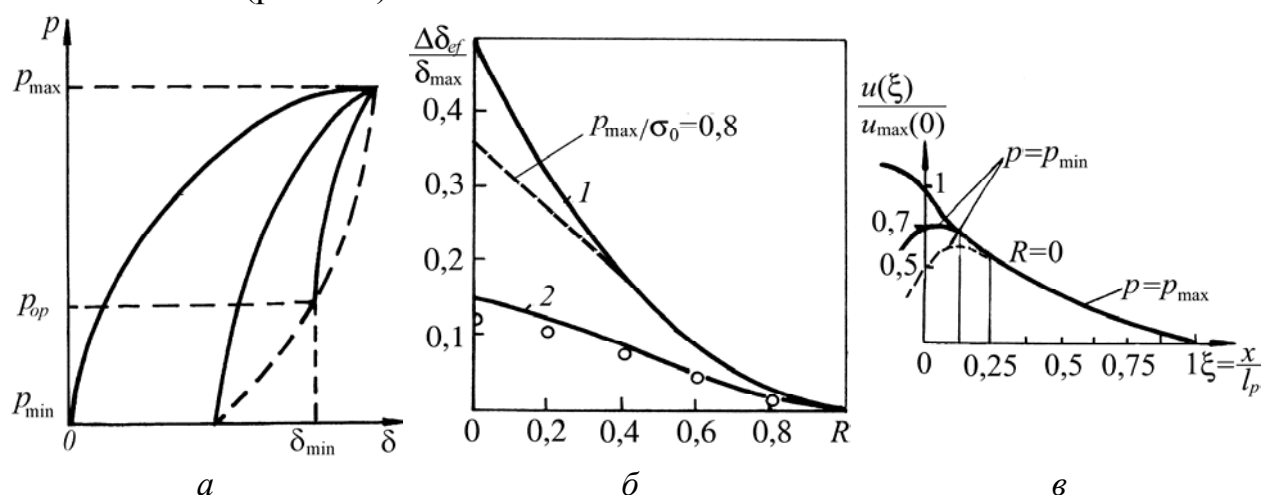


Рис. 2. Залежність величини розкриття вершини тріщини $\delta_{\min}$ від напруження $p(t)$ за один цикл навантаження (а), зміна відносного розмаху розкриття вершини тріщини залежно від асиметрії навантаження (б), зміна переміщення $u(\xi)$ берегів модельного розрізу і розмірів циклічної пластичної зони за наявності пластичних витяжок на берегах втомної тріщини (в)

Тоді, зберігаючи структуру формули для визначення мінімального розкриття вершини ідеальної тріщини

$$\delta_{\min} = \left(1 - \frac{1}{2}(1 - R)^2 \right) \delta_{\max}, \quad (5)$$

яка запропонована в роботі (J.R. Rice) і припускаючи, що зі зміною напружень $p_{\min} \leq p \leq p_{op}$ $\delta_{\min}$ залишається сталим як на стадії розвантаження ($p = p_{\max} - \Delta p$, $\Delta p = p_{\max} - p_{\min}$), так і довантаження ($p = p_{\min} + \Delta p$), у формулі (5), у виразі для асиметрії замість $p_{\min}$ ставимо величину p_{op} , тоді отримаємо:

$$\Delta\delta_{ef} = \frac{U_1^2}{2} \delta_{\max}; \quad (6)$$

$$\Delta \delta_{ef} = \frac{2l_{pf}}{l_p} \delta_{\max}, \quad l_{pf} = \frac{U_1^2}{4} l_p. \quad (7)$$

Тут $U_1 = 1 - p_{op} / p_{\max}$, l_{pf}, l_p – відповідно, статична і циклічна пластичні зони. У випадку відомої з літератури функції

$$U_1(R) = 1 - (0,45 + 0,2 R + 0,25 R^2 + 0,1 R^3),$$

встановленої теоретично для $R \geq 0$, отримане за формулою (6) відносно значення $\Delta \delta_{ef}$ (рис. 2 б, крива 2) добре узгоджуються з експериментальним [4], а максимальна відносна похибка при $R = 0$ не перевищує 10%. На основі результатів, поданих на (рис. 2 б) можна вказати межі застосовності формули (6) для визначення $\Delta \delta_{ef}$, якщо $U_1(R) = 1 - R$ (ідеальна тріщина, крива 1). Вона прийнятна для автомодельної тріщини при $R \geq 0,7$ і для неавтомодельної (рис. 2 б, штрихова лінія) – при $p_{\max} / \sigma_0 \geq 0,8$ (σ_0 – усереднене значення напружень, задане на берегах модельної тріщини, згідно з узагальненою δ_k -моделлю). Визначати $\Delta \delta_{ef}$ можна також за формулою (7) через величину циклічної пластичної зони. Як впливає з формули (7), завдяки наявності пластичних витяжок на берегах втомної тріщини зменшуються розміри циклічної пластичної зони а відповідно, і ефективний розмах розкриття вершини тріщини $\Delta \delta_{ef}$. На рис. 2 у показано, що для автомодельної тріщини при $R = 0$ частина пластичної області, яка циклується з урахуванням наявності пластичних витяжок товщиною $h_{res} = u_{\min}$ на берегах тріщини, становить 0,12 від всієї пластичної області. Без урахування пластичних витяжок зона циклічного пластичного деформування значно збільшується і становить 0,25 – відомий у літературі результат [5]. При цьому величина $\Delta \delta_{ef}$ зменшується на 20 % порівняно з ідеальною тріщиною.

Диференціальне рівняння в частинних похідних (3) використаємо для опису кінетики втомної поверхневої півеліптичної тріщини, віднесеної до полярної системи координат $O r \alpha$ у площині тривимірного тіла (рис. 1 а). За припущення, що півеліптична тріщина у процесі свого розвитку від початкового розміру до критичного залишається півеліптичною [6], тоді її радіус-вектор $r(\alpha, N)$ визначається за формулою

$$r(\alpha, N) = \frac{a(N) c(N)}{\sqrt{a^2(N) \cos^2 \alpha + c^2(N) \sin^2 \alpha}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (8)$$

Очевидно, для встановлення розмірів контуру поверхневої півеліптичної тріщини під циклічним навантаженням достатньо знати розвиток її півосей $a(N)$ і $c(N)$. Для їх знаходження диференціальне рівняння в частинних похідних (3) запишемо у двох точках контуру тріщини ($\alpha = \pi / 2$, і $\alpha = 0$). Врахову-

ючи те, що $r(\pi / 2, N) = a$; $r(0, N) = c$, $\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\pi/2} = \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$, отримаємо:

$$\frac{da}{dN} = V(A_1, m_1, \Delta\delta_{thef}, \lambda^{(1)}), \quad \lambda^{(1)} = 1 - \sqrt{\frac{\Delta\delta_{ef}^{(1)}}{\Delta\delta^*(R)}}, \quad (9)$$

$$\frac{dc}{dN} = V(A_1, m_1, \Delta\delta_{thef}, \lambda^{(2)}), \quad \lambda^{(2)} = 1 - \sqrt{\frac{\Delta\delta_{ef}^{(2)}}{\Delta\delta^*(R)}}, \quad (10)$$

$$a(0) = a_0, \quad c(0) = c_0, \quad (11)$$

де $\Delta\delta_{ef}^{(1)} = \Delta\delta_{ef} |_{\alpha=\pi/2}$, $\Delta\delta_{ef}^{(2)} = \Delta\delta_{ef} |_{\alpha=0}$, a_0, c_0 – відповідно мала і велика півосі початкової поверхневої півеліптичної тріщини.

Якщо швидкість росту втомної тріщини описується диференціальними рівняннями (1) або (3), то для обчислення констант матеріалу A, m (A_1, m_1) за допомогою методу найменших квадратів отримаємо такі формули:

$$a_1(m)a_2(m) - n_1 a_3(m) = 0, \quad A = 10^{-a_1(m)/m_1},$$

$$\text{де: } a_1(m) = \sum_{i=1}^{n_1} \lg(x_i^m - 1) V_i^e, \quad a_2(m) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^m \lg x_i}{x_i^m - 1}, \quad a_3(m) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i^m \lg x_i}{x_i^m - 1} \lg((x_i^m - 1) V_i^e),$$

$$x_i = \lambda_0 / (\lambda_0 - \lambda_i), \quad \lambda_i = 1 - \sqrt{\frac{\delta_{\max}^{(i)}}{\delta_{fc}}}; \quad V_i^e, \delta_{\max}^{(i)} - \text{координати експериментальних то-}$$

чок відповідно швидкості росту тріщини і максимального розкриття вершини; n_1 – кількість точок експерименту; $\lambda_0 = 1 - \sqrt{\delta_{th} / \delta_{fc}}$ – визначено експериментально.

Таким чином, задача дослідження кінетики розвитку втомної поверхневої півеліптичної тріщини зводиться до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $a(N)$ і $c(N)$. Після знаходження розв'язку цих рівнянь форма і розміри тріщини у довільний момент часу $t = N / \nu$ (ν – частота циклічного навантаження) визначаються залежністю (8).

Для визначення довговічності тіла $N = N^*$ і критичних розмірів тріщини $r^* = r(N^*, \alpha)$ використовуємо критерій критичного розкриття її вершини. Вважаємо, що тіло з поверхневою півеліптичною тріщиною під циклічним навантаженням зруйнується, якщо для кожної асиметрії R виконується умова

$$\max \{ \Delta\delta_{ef} |_{\alpha=\pi/2}, \Delta\delta_{ef} |_{\alpha=0} \} = \Delta\delta^*(R).$$

Таким чином запропонована в роботі математична модель розвитку втомної поверхневої півеліптичної тріщини дає змогу ефективно і з достатньою для практики точністю, розраховувати ресурс відповідальних елементів конструкцій. Отримані при цьому результати можуть бути використані для відбраковки елементів конструкцій, а також встановлення часу їх профілактичного огляду у процесі експлуатації.

Література

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.

2. **Андрейкив А.Е.** Пространственные задачи теории трещин. – К.: Наук. думка, 1982. – 245 с.
 3. **Визначення** величини розкриття вершини тріщини у пружнопластичних тілах/ В.В. Панасюк, О.Є. Андрейків, М.М. Стадник, І.В. Дідух// Физ.-хим. механика на материалах. – 1990, № 6. – С. 53-61.
 4. **Elber W.** Fatigue crack closure under cyclic tension.// Eng. Fract. Mech. – 1970. – 2, N1. – P. 37-45.
 5. **Newman J.C.** A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading// ASTM STP 748 (1981). – P. 53-81.
 6. **Методика** розрахунку довговічності артилерійських стволів на стадії розвитку поверхневих тріщин з урахуванням дії високих температур/ О.Є. Андрейків, М.М. Стадник, В.А. Зазуляк, І.В. Дідух, О.М. Белас// Артилерійські ствольні системи, боєприпаси, засоби артилерійської розвідки та керування вогнем: Зб. наук. праць. – К.: Наука, 1998. – С. 90-99.
-
-