

Література

1. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. – М.: Мир, 1966. – 286 с.
2. Семенов В.В. Смена парадигмы в теории транспортных потоков// Препринт № 46 Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2006.
3. Семенов В.В. Математическое моделирование транспортных потоков мегаполиса// Препринт № 34 Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004.
4. Neumann von J. Theory of Self-Reproducing Automata (Urbana: University of Illinois Press, 1966).
5. Wolfram S. Rev. Mod. Phys. 55 601 (1983).
6. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
7. Ванг В.К. Исследование динамических систем методами клеточного автомата// УФН, т.169, № 5. – С. 481-505.
8. Nagel K. and Schreckenberg M. A cellular automaton model for freeway traffic, J. Physique I 2, 2221 (1992).
9. Barlovic R., Santen L., Schadschneider A. and Schreckenberg M. Metastable states in cellular automata for traffic flow, Eur. Phys. J. B 5, 793 (1998).
10. Маковейчук О.М. Моделювання транспортних потоків методами клітинкових автоматів// Наук. вісник НЛТУУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУУ. – 2007, вип. 17.4. – С. 269-271.
11. Zhan, F. B. and Noon, C. E. 1998. Shortest Path Algorithms: An Evaluation Using Real Road Networks. Transportation Science 32, 1 (Jan. 1998), 65-73.

УДК 534.111

*Проф. Б.І. Сокіл, д-р техн. наук; Х.І. Ліщинська –
НУ "Львівська політехніка"*

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ ДВОВИМІРНИХ СИСТЕМАХ І АТЕВ-ФУНКЦІЇ В ЇХ ДОСЛІДЖЕННІ

Розроблено методику дослідження коливних процесів сильно нелінійних двовимірних систем обмежених розмірів. Вперше використано періодичні Атев-функції при побудові одночастотних розв'язків рівнянь з частинними похідними, що описують динамічний процес вказаних систем. Це дало можливість отримати залежність частоти від геометричних розмірів, фізико-механічних параметрів і амплітуди коливань.

Prof. B.I. Sokil, Kh.I. Lishchyn'ska – NU "L'viv'ska politehnica"

Dynamic processes in strongly nonlinear bivariate systems and Ateb-functions in their research

It is developed a technique of research of oscillatory processes of strongly nonlinear bivariate systems of restricted sizes. For the first time it is used periodic functions at construction of single-frequency solutions of the equations with partial derivatives which describe dynamic process of the indicated systems. It has enabled to receive association of frequency on geometrical sizes, physicomechanical parameters and amplitudes of oscillations.

Актуальність і постановка задачі. Реально існуючі у коливних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами сили опору, в'язко-пружні та іншої природи сили приводять до швидкого зникання коливань із вищими частотами та встановлення у них динамічного процесу із частотою, яка близька до частоти зовнішнього періодичного збурення (за наявності такого) або першої основної частоти частотного спектру системи. Такі задачі для випадку, коли нелінійні характеристики системи прийма-

ють максимальні значення, які є малими порівняно з лінійними відновлювальними силами, розглядались як для систем із зосередженими масами, так і розподіленими параметрами (див., наприклад [1-5]). Проблема значно ускладнюється у випадку, коли пружні характеристики системи мають чітко виражений нелінійний характер. Деякі найпростіші моделі таких систем із зосередженими масами і одновимірних із розподіленими параметрами були предметом досліджень робіт [6-10] і ін. У цій статті проведено спробу узагальнити деякі найпростіші результати робіт [8, 9] на випадок багатовимірних систем (точніше кажучи – двовимірних) за умови, що пружні властивості їх матеріалу мають чітко виражений степеневий закон.

Методика дослідження. Математичною моделлю коливань таких систем є диференціальне рівняння з частинними похідними

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^v u_{xx} - \beta^2 (u_y)^v u_{yy} = 0, \quad (1)$$

$t \geq 0, 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c$, в якому α, β, v, b, c – сталі, причому $v + 1 = (2m + 1)/(2n + 1)$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$

Легко переконатись, що для побудови розв'язку рівняння (1) можна використати метод відокремлення змінних, відповідно до якого функцію $u(t, x, y)$ будемо шукати у вигляді

$$u(t, x, y) = T(t)V(x, y), \quad (2)$$

де $T(t)$ і $V(x, y)$ – періодичні відповідно по t і x, y функції.

Підставляючи останнє у рівняння (1) для знаходження невідомих функцій $T(t)$ і $V(x, y)$ отримуємо диференціальні рівняння

$$\ddot{T}(t) + \lambda (T(t))^{v+1} = 0, \quad (3)$$

$$\alpha^2 (V_x(x, y))^v V_{xx}(x, y) + \beta^2 (V_y(x, y))^v V_{yy}(x, y) + \lambda V(x, y) = 0, \quad (4)$$

де λ – невідомий параметр, що буде визначений нижче.

Лінійно незалежні розв'язки рівнянь (3) і (4) виражаються через періодичні Атеб-функції [11, 12] у вигляді

$$T(t) = T_0 \left\{ \begin{array}{l} ca \left(v + 1, 1, \left((v + 2)/2 \cdot \lambda T_0^v \right)^{\frac{1}{2}} t \right), \\ sa \left(v + 1, 1, \left((v + 2)/2 \cdot \lambda T_0^v \right)^{\frac{1}{2}} t \right) \end{array} \right\}, \quad (5)$$

$$V(x, y) = V_0 \left\{ \begin{array}{l} ca \left(1/(v + 1), 1, \left[(v + 2)\lambda / (2V_0^v (\alpha^2 + \delta^{v+2}\beta^2)) \right]^{\frac{1}{v+2}} (x + \delta y) \right), \\ sa \left(1/(v + 1), 1, \left[(v + 2)\lambda / (2V_0^v (\alpha^2 + \delta^{v+2}\beta^2)) \right]^{\frac{1}{v+2}} (x + \delta y) \right) \end{array} \right\}, \quad (6)$$

де T_0, V_0 – сталі.

Перейдемо до визначення сталих λ і δ . Для цього вважатимемо, що в області зміни незалежних лінійних змінних x, y поміщається ціле число півхвиль. Тому із властивостей періодичних Атеб-функцій випливає

$$\left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (b + \delta y) = \left(k\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) + \delta y \right), \quad (7)$$

$$\left(\frac{(\nu+2)\lambda}{2V_0^\nu(\alpha^2 + \delta^{\nu+2}\beta^2)} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} (x + \delta c) = \left(x + m\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right), \quad (8)$$

де $k, m = 1, 2, \dots$, $\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)$ – півперіод періодичних Атеб-функцій, які описують процес зміни хвилі по довжині і впоперек області. Співвідношення (7) і (8) визначають параметри λ і δ у вигляді

$$\delta = \frac{mb}{kc}, \quad (9)$$

$$\lambda_{km} = \frac{2V_0^\nu(\alpha^2(kc)^{\nu+2} + \beta^2(mb)^{\nu+2})}{(\nu+2)(kc)^{\nu+2}} \left(\frac{k}{b}\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right)^{\nu+2}. \quad (10)$$

Підставляючи (9) і (10) в (5) і (6) із (2) отримаємо множину одночас-
тотних розв'язків рівняння (1) за вказаних вище припущень у вигляді

$$u(t, x, y) = a \left\{ \begin{aligned} &ca\left(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \theta\right), \left[ca\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, \Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\left(\frac{k}{b}x + \frac{m}{c}y\right)\right) \right], \\ &sa\left(\nu+1, 1, \omega_{km}(a)t + \theta\right) \left[sa\left(\frac{1}{\nu+1}, 1, \Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right)\left(\frac{k}{b}x + \frac{m}{c}y\right)\right) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

де a і θ сталі ($a = T_0V_0$), а $\omega_{km}(a)$ визначається залежністю

$$\omega_{km}(a) = \sqrt{\frac{\alpha^2(kc)^{\nu+2} + \beta^2(mb)^{\nu+2}}{(kc)^{\nu+2}} \left(\frac{k}{b}\Pi\left(1, \frac{1}{\nu+1}\right) \right)^{\nu+2}} a^{\frac{\nu}{2}}. \quad (12)$$

Як і варто було чекати, із останньої формули граничним переходом при $\alpha \rightarrow 0$ (чи $\beta \rightarrow 0$) маємо частоту коливань одновимірного середовища (див., наприклад, [8]).

Нижче на рис. 1 представлено залежність частоти коливань від параметрів a і ν , і від параметрів ν і α – на рис. 2.

Висновки. Із представлених залежностей випливає:

- а) зі зростанням параметру ν (при фіксованому значенні амплітуди a) частота коливань спадає для малих значень амплітуди і зростає – для великих її значень;
- б) зі зростанням параметру a : для $-1 < \nu < 0$ – частота коливань спадає; при $\nu > 0$ – частота коливань зростає;

в) зі зростанням параметру α (при фіксованих ν і a) частота коливань зростає, причому швидкість зростання найбільша при $\nu \rightarrow -1$.

г) зі зростанням параметру ν (при фіксованих α і a) частота коливань спадає.

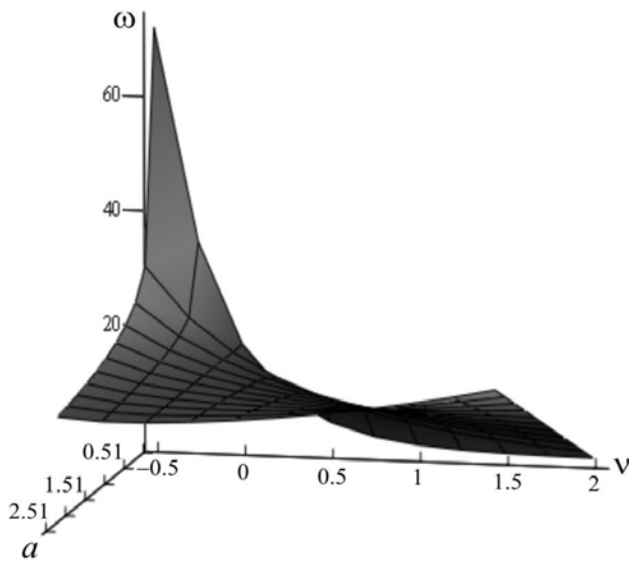


Рис. 1

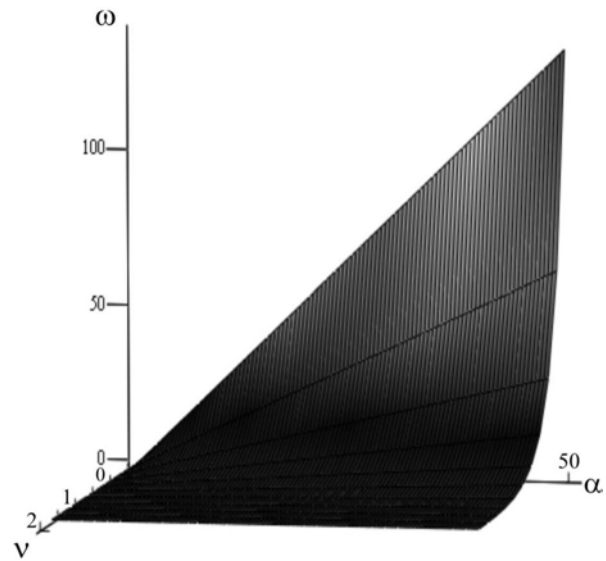


Рис. 2

Необхідно зауважити, на основі викладеного та загальної ідеї асимптотичних методів КБМ можна отримати і результати, які стосуються динамічних процесів систем близьких до розглядуваних.

Література

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возмущением. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
3. Дейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 229 с.
4. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд-во АН УССР, 1970. – 379 с.
5. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.
6. Сенник П.М., Смерека И.П., Сокил Б.И. Асимптотический метод и периодические Ateb-функции в теории существенно нелинейных колебаний// В сб.: Асимптотические и качественные методы в теории дифференц. уравнений. – К.: Изд-во Ин-та математики, 1977. – С. 143-156.
7. Сокил Б.І., Кузьо І.В. Одночастотні ("нормальні") коливання у нелінійних системах із скінченною кількістю ступенів вільності// Тр. Одесского политехнического ун-та. – 2000, № 2(11). – С. 193-198.
8. Сокил Б.И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными// Укр. мат. журн. – 1982, т. 34, № 6. – С. 803-805.
9. Сокил Б.І. Про один спосіб побудови одночастотних розв'язків для нелінійного хвильового рівняння// Укр. мат. журн. – 1994, т. 46, № 6. – С. 782-785.
10. Филимонов А.М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными// Дифференц. уравнения. 1976. – 12, № 11. – С. 2077-2084.
11. Сенник П.М. Про Ateb-функції// Доп. АН УРСР. – 1968, № 1. – С. 23-26. 12. Сенник П.М. Обернення неповної Beta-функції// Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325-333.