

УДК 539.3 Проф. М.М. Стадник, д-р техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

МІЦНІСТЬ ТІЛА З КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ТРИВІСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Отримано аналітичну залежність, яка враховує вплив тривісності навантаження тіла з круговою тріщиною на δ -розкриття вершини тріщини. Така залежність дає змогу обчислювати характеристику тріщиностійкості δ_k за граничними зусиллями. Показано, що δ_k не залежить від типу навантаження

Prof. M.M. Stadnyk – NUFWT of Ukraine, Lviv

Strenght of body with a circular crack under trianial extending

The theoretical dependences considering the influence of three-dimensional loading a body with a circular crack on δ -opening are obtained. It has allowed to calculate δ_k -characteristic on known boundary efforts. It is shown that the stress-toughness δ_k does not depend from of this type of loading.

Розглянемо тривимірне тіло з плоскою круговою тріщиною радіуса a . Систему декартових координат $Oxyz$ розмістимо так, щоб її початок знаходився в центрі тріщини, а тріщина лежала в площині $z = 0$. На безмежності до тіла прикладені рівномірно-розподілені навантаження p і q , з яких p направлено паралельно до осі Oz , а q – паралельно до осей Ox і Oy . Користуючись КРТ-критерієм треба встановити граничні значення p_* і q_* , за яких тіло приходить у гранично-рівноважний стан.

Розглянемо спочатку більш загальну задачу теорії пружності. Для цього вважатимемо, що в тілі замість тріщини міститься сплющена сфероподібна порожнина, обмежена поверхнею $(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/c^2 = 1$, $c \ll a$. Така задача, згідно з [1], зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння

$$\Delta \iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_* d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = -\frac{4\pi d_1 p}{G} + \frac{d_3 c q \pi^2 (3 + \mu)}{2d_2 a G}, \quad (1)$$

відносно стрибка зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ берегів $z = \pm 0$ кругової тріщини радіуса a , на яких діє навантаження, знесене з поверхонь $z = \pm h = \pm c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)/a^2}$ сфероподібної порожнини. Тут $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; G – модуль зсуву матеріалу тіла; $d_1 = 1 - \mu$, $d_2 = 1 + \mu$, $d_3 = 1 - 2\mu$; μ – коефіцієнт Пуассона; S – кругова область $x^2 + y^2 \leq a^2$; $u_z = \tilde{u}_z + u_z^0$, де u_z^0 – зміщення поверхні $z = \pm h$ в однорідному тілі, $\tilde{u}_z$ – збурене зміщення, викликане наявністю в тілі дефекта.

Розв'язавши рівняння (1), матимемо

$$[\tilde{u}_z]_* = (4pd_1/(\pi G) - cd_3q(3 + \mu)/(2d_2aG))\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (2)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \leq a$.

Якщо у співвідношенні (2) покласти $p = p_1$ і $q = 0$, то отримимо відомий результат [2] для випадку одновісного розтягу тіла зусиллями p_1

$$[\tilde{u}_z]_* = (4p_1d_1/(\pi G))\sqrt{a^2 - r^2}. \quad (3)$$

Замінивши в рівності (3) p_1 на вираз

$$p_1 = p - cqb/a > 0; \quad b = \pi(3 + \mu)d_3/(8d_1d_2) \quad (4)$$

отримуємо подання (2). Бачимо, що стрибок зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ для складного навантаження p, q (2) отримується із випадку одновісного розтягу p_1 (3) заміною (4).

Із подання (2) випливає, що для тріщини $c = 0$ $[\tilde{u}_z]_*$ не залежить від зусиль q . Проте це має місце за умови, що $p = 0$. Якщо $p > 0$ тріщина розкривається, тобто $c > 0$ і $[\tilde{u}_z]_*$ стає залежним від величини q .

Вважаючи тепер, що в тілі розміщена кругова тріщина радіуса a , введемо позначення

$$c_0 = c_1 + c_2, \quad (5)$$

де $2c_1$ – величина початкового (до навантаження) розкриття тріщини при $r = 0$, яке для "ідеальної" тріщини дорівнює нулю, однак, у дослідних зразках $c_1 \neq 0$, оскільки залежить від технології її утворення; $2c_2$ – значення стрибка зміщень берегів тріщини при $r = 0$, яке обчислюється (або вимірюється) тільки від зусиль p .

Якщо розкриття $2c_2$ "ідеальної" тріщини ($c_1 = 0$) відбувається в межах пружної деформації, то, згідно з поданням (2), вона переходить у сфероподібну порожнину

$$r^2/a^2 + z^2/c_2^2 = 1, \quad \bar{c}_2 = c_2/a = 2pd_1/(G\pi). \quad (6)$$

Якщо припустити, що у вершині тріщини виникає зона передруйнування згідно з δ -моделлю, то c_2 можна обчислити [2] так:

$$\bar{c}_2 = c_2/a = 2d_1\sigma_T \left(\pi/2 - \arcsin \sqrt{1 - (p/\sigma_T)^2} \right) / (\pi G), \quad (7)$$

де σ_T – границя течіння матеріалу при простому розтязі. Відзначимо, що коли розкриття поверхонь тріщини проходить в межах пружно-пластичних деформацій, то кругова тріщина за дії зусиль p утворює порожнину, форма якої відмінна від сфероподібної. В цьому розумінні подальше розв'язання задачі здійснюється наближено.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно знайти стрибок зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ поверхонь кругової тріщини радіуса R для крайової задачі

$$-\tilde{\sigma}_{zz}(r, 0) = \begin{cases} p - \bar{c}_0qb, & 0 \leq r \leq a, \\ p - \bar{c}_0qb - \sigma_{T1}, & a < r \leq R, \end{cases} \quad \sigma_{T1} = \sigma_T - \bar{c}_0qb. \quad (8)$$

На безмежності зовнішні навантаження відсутні. Тут $R - a$ – довжина зони пластичності; $\bar{c}_0 = (c_1 + c_2)/a$; $\tilde{\sigma}_{zz}$ – збурене напруження.

Користуючись розв'язком [2] задачі (8) для одновісного розтягу тіла зусиллями p_1 з врахуванням виразу (4), матимемо

$$\frac{\pi G}{4d_1} [\tilde{u}_z]_* = \sqrt{R^2 - r^2} \left(p - \bar{c}_0 q b - \sigma_{T1} \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \right) + \sigma_{T1} \int_{\arcsin \frac{a}{R}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (9)$$

$$0 \leq r \leq a.$$

$$\frac{\pi G}{4d_1} [\tilde{u}_z]_* = \sqrt{R^2 - r^2} \left(p - \bar{c}_0 q b - \sigma_{T1} \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \right) + \sigma_{T1} \int_{\arcsin \frac{a}{R}}^{\arcsin \frac{a}{r}} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad (10)$$

$$a \leq r \leq R.$$

З метою встановлення величини R випишемо також формулу

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, 0) = & \frac{2}{\pi \sqrt{r^2 - R^2}} \left[(p - \bar{c}_0 q b) \left(R - \sqrt{r^2 - R^2} \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right) - \right. \\ & \left. - \sigma_{T1} \left(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - R^2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right) \right] + p \end{aligned} \quad (11)$$

для обчислення нормальних напружень при $r \geq R$.

Забезпечуючи, згідно з δ_k -моделлю, обмеженість напружень $\sigma_{zz}(r, 0)$ поза тріщиною, зокрема і при $r \rightarrow R + 0$, із виразу (11) отримимо рівняння

$$(p - \bar{c}_0 q b) R - \sigma_{T1} \sqrt{R^2 - a^2} = 0, \quad (12)$$

розв'язавши яке, матимемо подання

$$R = a / \sqrt{1 - (p - \bar{c}_0 b q)^2 / \sigma_{T1}^2} \quad (13)$$

для визначення параметра R .

Із співвідношень (11), (12) виходить, що

$$\lim_{r \rightarrow R+0} \sigma_{zz}(r, 0) = \sigma_T, \quad (14)$$

тобто напруження на контурі тріщини не тільки обмежені, але і неперервні.

Співвідношення (9) і (10) на основі рівності (12) подамо у вигляді

$$[\tilde{u}_z]_* = \frac{4d_1}{\pi G} \sigma_{T1} \int_{\arcsin \frac{a}{R}}^{\varphi} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad r \leq R, \quad (15)$$

де $\varphi = \pi/2$, якщо $0 \leq r < a$; $\varphi = \arcsin a/r$, якщо $a \leq r \leq R$.

Із подання (15) випливає, що

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{d[\tilde{u}_z]_*}{dr} = 0 \text{ і } \lim_{r \rightarrow R} [\tilde{u}_z]_* = 0, \quad (16)$$

тобто, як і при одновісному розтязі [2], є плавне змикання берегів тріщини при $r = R$.

Для встановлення критичного навантаження p_* , q_* знайдемо, виходячи з подань (13) і (15), стрибок зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ при $r = a$

$$\delta = [\tilde{u}_z]_* \Big|_{r=a} = 4d_1 a \sigma_{T1} \left(1 - \sqrt{1 - (p - \bar{c}_0 b q)^2 / (\sigma_{T1}^2)} \right) / (\pi G). \quad (17)$$

Користуючись δ_k -критерієм із (17) матимемо

$$4d_1 a \sigma_{T1}^* \left(1 - \sqrt{1 - (p_* - \bar{c}_0^* b q_*)^2 / (\sigma_{T1}^*)^2} \right) / (\pi G) = \delta_k, \quad (18)$$

де: $\bar{c}_0^* = c_1 / a + 2d_1 \sigma_T \left(\pi / 2 - \arcsin \sqrt{1 - (p_* / \sigma_T)^2} \right) / (\pi G)$, $\sigma_{T1}^* = \sigma_T - \bar{c}_0^* q_* b$.

Тут δ_k – характеристика тріщиностійкості.

Дійсний розв'язок рівняння (18) існує тільки за $a_* \leq a$, тобто

$$p_* - \bar{c}_0^* b q_* = \sigma_{T1}^* \sqrt{2a_* / a} \sqrt{1 - a_* / (2a)}, \quad (19)$$

де $a_* = \delta_k \pi G / (4d_1 \sigma_{T1}^*)$.

Співвідношення (19) слугує для визначення критичних значень p_* і q_* . Оскільки маємо одне рівняння, то одній із величин, зокрема q_* надається певного, в допустимих межах, значення, а p_* визначається із рівності (19).

За одновісного розтягу тіла навантаженням $p = p_1$, $q = 0$ із виразу (18) отримуємо подання [2]

$$4d_1 a \sigma_T \left(1 - \sqrt{1 - (p_1^* / \sigma_T)^2} \right) / (\pi G) = \delta_k. \quad (20)$$

Оскільки рівність (18) виконується для будь-яких величин p_* і q_* , в допустимих межах їх зміни, в тому числі і за $p_* = p_1^*$, $q_* = 0$, то виходячи із (18), (20) отримимо співвідношення

$$\sigma_{T1}^* \left(1 - \sqrt{1 - (p_* - \bar{c}_0^* b q_*)^2 / (\sigma_{T1}^*)^2} \right) = \sigma_T \left(1 - \sqrt{1 - (p_1^* / \sigma_T)^2} \right), \quad (21)$$

яке можна розглядати, як діаграму, що зв'язує p_* і q_* за тривісного навантаження з p_1^* для одновісного навантаження при застосуванні деформаційного критерію руйнування.

Аналіз рівностей (18), (20), (21) показує, що тріщиностійкість δ_k не залежить від типу навантаження, хоча експериментальні результати [3, 4] вказують на залежність δ_k . При цьому в [4] виявлено спадання δ_k з ростом q , а в [3] вказується як на спадання так і на зростання δ_k залежно від відносної величини q_* / p_* . Це можна пояснити тим, що автори [3, 4] при визначенні δ_k користувались формулою, яка не враховує впливу навантаження q на розкриття δ . Крім цього бачимо, що права частина рівності (19) з ростом a зменшується, а це означає, що p_* і q_* , які визначаються з (19) є руйнуючими.

Якщо $a < a_*$, то при $p - \bar{c}_0 q b = \sigma_{T1}$ із (13) маємо, що $R \rightarrow \infty$. В результаті із подання (17) виходить, що

$$\delta = 4d_1 a \sigma_{T1}^* / (\pi G) < 4d_1 a_* \sigma_{T1}^* / \pi G = \delta_k. \quad (22)$$

Зі співвідношення (22) випливає, що за $a < a_*$ навіть при $p - \bar{c}_0 q b = \sigma_{T1}$ руйнування не виникає. Таким чином $p_* - \bar{c}_0^* q_* b$ не залежить від наявності в

тілі кругової тріщини, тобто тіло поводить ся як однорідне. Накінець матимемо подання

$$p_* - \bar{c}_0 q_* b = \begin{cases} \sigma_{T1}^*, & a < a_*, \\ \sigma_{T1}^* \sqrt{2a_*/a} \sqrt{1 - a_*/(2a)}, & a > a_*, \end{cases} \quad (23)$$

яке при $q = 0$ отримано в роботі [2]. Із подання (23) бачимо, що коли $a < a_*$, то навантаження q не впливає на граничний стан тіла.

Література

1. Стадник М.М. Об одном методе приближенного решения трехмерной упругой задачи для тела с тонким включением// Физ.-хим. механика материалов. – 1988, № 1. – С. 53-65.
2. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
3. Лебедев А.А., Музыка Н.Р. Несущая способность пластины с трещиной при двухосном растяжении// Пробл. прочности. – 2001, № 2. – С. 20-27.
4. Іваницький Я.Л., Штаюра С.Т., Костів Р.Б. Оцінка тріщиностійкості матеріалів при двовісному навантаженні// Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій – Львів: Фіз. мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 697-702.

УДК 536.532

Доц. В.О. Фединець, канд. техн. наук –
НУ "Львівська політехніка"

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ВИМІРЮВАННЯ ШВИДКОЗМІННИХ ТЕМПЕРАТУР ГАЗОВИХ ПОТОКІВ

Проаналізовано методи вимірювання швидкозмінних температур газових потоків шляхом їх прямого розрахунку.

Ключові слова: газовий потік, вимірювання, теплообмін, температура, приймач температури.

Assoc. prof. V.O. Fedynets – NU "L'viv'ska Politechnica"

The analysis of methods of measurement quickly varying temperatures of gas streams

It is lead (is carried out) the analysis of methods of measurement quickly varying temperatures of gas streams by their direct calculation.

Keywords: a gas stream, measurement, heat exchange, temperature, the receiver of temperature.

Вступ. Унаслідок певного значення теплоємності чутливого елемента приймача температури його температура завжди буде відставати від температури газового потоку, якщо вона змінилася. При вимірюванні змінної в часі температури потоку приймач також не встигає слідкувати за зміною температури, оскільки для зміни температури його чутливого елемента потрібен деякий час. Спотворення показів приймача через нестационарності теплових процесів як в самому приймачі, так і між приймачем і навколишнім середовищем зумовлені тепловою інерцією приймача. За рахунок теплової інерції виникає додаткова різниця між температурою чутливого елемента приймача і температурою газового потоку, яку називають динамічною похибкою вимірювання температури газового потоку.