



3. ТЕХНОЛОГІЯ ТА УСТАТКУВАННЯ ДЕРЕВООБРОБНИХ ПІДПРИЄМСТВ

УДК 634.0.812

Доц. Б.П. Поберейко, канд. техн. наук – НЛТУ України

ВИЗНАЧЕННЯ КОРОТКОЧАСНОЇ МІЦНОСТІ ДЕРЕВИНИ

Отримано критеріальні співвідношення для визначення технологічної міцності деревини як анізотропного матеріалу у пружній області деформування для одно- та дво-мірного випадків. Визначено межу міцності в умовах одновісного стиску та розтягу.

Doc. B.P. Pobereyko – NUFWT of Ukraine

Determination of brief durability of wood

Criteria correlations are got for determination of technological durability of wood in the resilient region of deformation for one- and two measured cases. Certainly border of durability in the conditions of compression and tension.

Актуальність та постановка задачі. Одним із основних чинників руйнування деревини є поля напружень та деформацій. На сьогодні їх граничні значення визначені в основному у випадках, коли напружено-деформівний стан вважається однорідним, а градієнтами полів вологи і температури можна знехтувати. У процесі гідротермічної обробки деревини розподіли цих полів є нерівномірними, тому, для врахування зазначених особливостей, актуальними є задачі визначення локальної міцності деревини.

Для проведення таких досліджень виходитимемо із синтезованої у роботі [1] фізико-математичної моделі визначення міцності анізотропних матеріалів у пружній області деформування. Її складовими частинами є:

- критерій міцності, заданий нерівністю

$$J(a_{ij}, \tau) \leq J^*, \quad (1)$$

- початкові умови задачі деформування для $\tau = 0$

$$J(a_{ij}, \tau) = 1, \varepsilon_{ij} = 0; \quad (2)$$

- система рівнянь зв'язку величин a_{ij} та ε_{ij}

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} + 1)^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2; \\ (\varepsilon_{22} + 1)^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2; \\ (\varepsilon_{33} + 1)^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2; \\ 2\varepsilon_{12} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}; \\ 2\varepsilon_{13} = a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33}; \\ 2\varepsilon_{23} = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33}. \end{cases}, \quad (3)$$

де $J(a_{ij}, \tau) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – якобіан перетворень градієнтів руху

$a_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_{0i}}$; координати x_{0i} та x_j точок суцільного середовища до та після де-

формування матеріалу відповідно; J^* – граничне значення якобіану перетворень, залежне від способу навантаження матеріалу; τ – тривалість деформування, яка для абсолютно-пружних матеріалів є незначною; ε_{ij} – компоненти тензора деформацій матеріалу.

Ця модель є тривимірною. В її основі покладено основні положення механіки суцільного середовища та ентропійний критерій міцності, який ґрунтується на законах термодинаміки незворотних процесів. Вона дає змогу виявити безпечну для цілісності матеріалу область допустимих значень компонентів деформацій у будь-якій точці його об'єму незалежно від умов та способу деформування. Тому її доцільно використати для моделювання міцності деревини у часткових випадках.

Одновимірний випадок. У цьому випадку $x_2 = x_{02} = \text{const}$, $x_3 = x_{03} = \text{const}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, тому систему (3), з врахуванням початкової умови (2), запишемо у вигляді

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = 0; \\ a_{22} = a_{33} = 1; \\ a_{11}^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2. \end{cases} \quad (4)$$

Звідси, $J = a_{11} = 1 + \varepsilon_{11}$, а критерієм міцності, відповідно, є нерівність

$$\varepsilon_{11} \leq J^* - 1. \quad (5)$$

Отримана умова дає змогу оцінити межу міцності матеріалу незалежно від типу навантаження (стиск, розтяг). Дійсно, за даними досліджень [1], величина J^* дорівнює відношенню об'ємів деформованого та недеформованого матеріалів і завжди є додатною, тому у випадку розтягу $J^* > 1$, а у випадку стиску $0 < J^* < 1$. Отже, величина J^* є залежною від способу навантаження матеріалу.

Двовимірний випадок. Для двовимірного випадку

$$x_3 = x_{03} = \text{const}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (6)$$

Тоді, виходячи із загальної постановки задачі, неважко показати, що система

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2; \\ a_{22}^2 + a_{12}^2 = (1 + \varepsilon_{22})^2; \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (7)$$

описує зв'язок градієнтів руху a_{ij} та компонентів деформацій ε_{ij} у матеріалі з плоским напружено-деформованим станом.

Початковим умовам (2) відповідатиме система

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1; \\ a_{22}^2 + a_{12}^2 = 1; \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

а якобіан J визначатиметься залежністю

$$J = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (9)$$

Покажемо, що отримані співвідношення (6)-(9), доповнені нерівністю (1), є загальною постановкою задачі визначення міцності ортотропних матеріалів у двовимірному випадку. Дійсно, із (8), після нескладних арифметичних перетворень, знаходимо

$$a_{21} = a_{12} \text{ або } a_{21} = -a_{12}. \quad (10)$$

Підставивши отримані результати у (7), матимемо систему трьох нелінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2; \\ a_{22}^2 + a_{12}^2 = (1 + \varepsilon_{22})^2; \\ \pm a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 2\varepsilon_{12}. \end{cases} \quad (11)$$

Ця система має аналітичні розв'язки. Для їх знаходження необхідно обидві частини третього рівняння системи піднести до квадрату та замінити a_{11}^2 і a_{22}^2 на їх вирази, знайдені із двох перших рівностей цієї системи. Внаслідок цих перетворень одержимо біквадратне рівняння

$$\left\{ \left((1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right)^2 + 16\varepsilon_{12}^2 \right\} a_{12}^4 - 8\varepsilon_{12}^2 \left((1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 \right) a_{12}^2 + 16\varepsilon_{12}^2 = 0 \quad (12)$$

Його розв'язки мають вигляд

$$a_{12}^2 = 4 \frac{(1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 \pm 2\sqrt{(1 + \varepsilon_{11})^2(1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2}}{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2} \varepsilon_{12}^2. \quad (13)$$

Підставивши знайдений результат у першу та другу рівності системи (11), матимемо залежності квадратів градієнтів руху a_{11} та a_{22} від компонентів деформацій

$$a_{11}^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2 - 4 \frac{(1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 \pm 2\sqrt{(1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2}}{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2} \varepsilon_{12}^2; \quad (14)$$

$$a_{22}^2 = (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4 \frac{(1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 \pm 2\sqrt{(1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2}}{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2} \varepsilon_{12}^2. \quad (15)$$

Отримані залежності є громіздкими, тому для подальшого розв'язання задачі введемо такі позначення:

$$\varphi = \left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2; \quad \psi = (1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2; \quad (16)$$

$$\xi = (1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2, \quad \varsigma = \frac{\psi \pm 2\sqrt{\xi}}{\varphi}.$$

Тоді співвідношення (13) – (15) запишемо у вигляді

$$a_{12}^2 = 4\varsigma\varepsilon_{12}^2; \quad a_{11}^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2; \quad a_{22}^2 = (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2, \quad (17)$$

а якобіан (9) визначатиметься формулою

$$J = \pm \sqrt{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2 \right] \left[(1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2 \right]} + \left(\frac{4a_{21}}{|a_{21}|} \right) \varsigma\varepsilon_{12}^2. \quad (18)$$

Звідси, підставивши (18) у нерівність (1), матимемо

$$\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2 \right] \left[(1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varsigma\varepsilon_{12}^2 \right] \leq \left(J^* - \frac{4a_{21}}{|a_{21}|} \varsigma\varepsilon_{12}^2 \right)^2. \quad (19)$$

Або

$$4 \frac{(1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 \pm 2\sqrt{(1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2}}{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2}. \quad (20)$$

$$\cdot \left(2 \frac{a_{21}}{|a_{21}|} J^* - (1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2 \right) \varepsilon_{12}^2 \leq J^{*2} - (1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2.$$

Для визначення відношення величин a_{21} та $|a_{21}|$ розглянемо міцність матеріалу в умовах чистого зсуву. У цьому випадку $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} \neq 0$, тому критеріальну умову (20) запишемо у вигляді

$$\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon_{12}^2} \right) \left(\frac{a_{21}}{|a_{21}|} J^* - 1 \right) \leq J^* - 1. \quad (21)$$

Звідси, якщо $a_{21}/|a_{21}| = 1$, то $\left(\pm \sqrt{1 - 4\varepsilon_{12}^2} \right) \leq 0$. З двох отриманих нерівностей правильною є нерівність $\sqrt{1 - 4\varepsilon_{12}^2} \leq 0$, з якої зрозуміло, що $|\varepsilon_{12}| \leq \frac{1}{2}$.

Отриманий результат суперечить результатам експериментальних досліджень деревини на міцність [2], згідно з якими область допустимих значень деформацій для деревини різних порід є різною. Тому доцільно припустити, що $a_{21}/|a_{21}| = -1$, а, отже, згідно з (10), $a_{21} = -a_{12}$. Звідси, замінивши у (21) величину a_{21} на величину $-a_{12}$, отримаємо

$$\pm \sqrt{1 - 4\varepsilon_{12}^2} \leq -\frac{2J^*}{1 + J^*}. \quad (22)$$

Аналіз цієї нерівності свідчить, що оскільки $J^* > 0$, то вона є правильною тільки у випадку, коли перед коренем квадратним є знак мінус.

Таким чином, критерії міцності для деревини як ортотропних матеріалів, випробовуваних у різних умовах, мають вигляд:

- у випадку чистого зсуву

$$|\varepsilon_{12}| \leq \sqrt{0,25 - \left(\frac{J^*}{1 + J^*}\right)^2}, \quad (23)$$

- у випадку плоского напружено-деформівного стану

$$4 \frac{(1 + \varepsilon_{11})^2 + (1 + \varepsilon_{22})^2 - 2\sqrt{(1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2 - 4\varepsilon_{12}^2}}{\left[(1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2\right]^2 + 16\varepsilon_{12}^2} \times$$

$$\times \left(-2J^* - (1 + \varepsilon_{11})^2 - (1 + \varepsilon_{22})^2\right) \varepsilon_{12}^2 \leq J^{*2} - (1 + \varepsilon_{11})^2 (1 + \varepsilon_{22})^2, \quad (24)$$

- у випадку двохосового розтягу (стиску)

$$(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22}) \leq J^*. \quad (25)$$

Аналіз формули (23) свідчить, що у випадку чистого зсуву значення відношення об'ємів деформованого та недеформованого матеріалу є меншим від одиниці. Дійсно, у протилежному випадку граничне значення J^* якобіану перетворень J є більшим за одиницю, а значення виразу у правій частині нерівності (23) – комплексним числом, що суперечить визначенню деформацій зсуву [2].

Література

1. **Поберейко Б.П.** Технологічний критерій міцності деревини у пружній області деформування// Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2006, вип. 16.1
2. **Ашкенази Е.К.** Анизотропия древесины и древесных материалов. – М.: Лесн. пром-сть, 1978. – 224 с.

УДК 674.02:621.923

Доц. О.А. Кійко, канд. техн. наук – НЛТУ України

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИПУСКУ У ПРОЦЕСІ МЕХАНІЧНОГО ОБРОБЛЕННЯ ДЕРЕВИНИ І ДЕРЕВНИХ МАТЕРІАЛІВ

Запропоновано спосіб визначення оптимального припуску для процесів механічного оброблення деревини і деревних матеріалів за допомогою імітаційного моделювання.