

для безперевантажувального транспортування вантажів та зі комбінованою у просторі трасою, підвищення продуктивності і надійності конвеєрів, широке застосування ЕВМ у проектуванні конвеєрів та автоматизація управління такими машинами.

Література

1. Спиваковський А.О., Дьячков В.К. Транспортирующие машины. – М.: Машиностроение, 1983. – 487 с.
2. Александров М.П. Подъемно-транспортные машины. – М.: Высш. шк., 1985. – 520 с.
3. Иванченко Ф.К. Конструкция и расчет подъемно-транспортных машин. – К.: Вища шк., 1988. – 424 с.

УДК 534.111

*Проф. Є.В. Харченко, д-р техн. наук;
аспір. М.Б. Сокіл – НУ "Львівська політехніка"*

КОЛИВАННЯ РУХОМИХ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ І АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД В ЇХ ДОСЛІДЖЕННІ

Запропоновано методику дослідження коливних процесів одновимірних систем, які характеризуються позовжнім рухом. В її основу покладено узагальнення на один клас диференціальних рівнянь з частинними похідними методів Д'Аламбера та КБМ.

Ключові слова: хвилі, частота, хвильове рівняння, амплітуда, хвильове число.

Prof. Ye. V. Kharchenko; doctorate M. B. Sokil – NU "L'vivs'ka Politekhnikha"

Oscillation of mobile nonlinear-resilient environments and asumptotic method in their research

Method of research of oscillation of processes of one class-offered homogeneous systems, which are longitudinal motion which is characterized. In his generalization of basing on one class of distinctive equalizations corrected with of parts of methods of D'Alembert and KBM.

Keywords: wave, frequency, wave alignment, amplitude, wave number.

Дослідження коливних процесів в одно- чи багатовимірних середовищах, що рухаються вздовж деякої осі [1-3], зв'язане із значними математичними труднощами, адже для побудови розв'язків диференціальних рівнянь, які описують вказані процеси, не вдається застосувати відомі класичні методи. Проблема значно ускладнюється, якщо пружні характеристики середовища відмінні від лінійних. Деякі найпростіші моделі таких рухомих середовищ, за припущення незначних швидкостей руху, розглядались, наприклад в [4,5]. Останнє значною мірою звужує класи розглядуваних прикладних задач. Тому дослідження динамічних процесів у рухомих середовищах за довільних (обмежених) швидкостей їх руху залишається актуальною задачею. Нижче, для диференціального рівняння, яке описує широкий спектр динамічних процесів рухомих одновимірних середовищ, робиться спроба частково розв'язати вказану проблему. В основу проведених досліджень покладено: узагальнення методу Д'Аламбера на один клас крайових задач для рівняння гіперболічного типу [5], яке містить мішану похідну лінійної і часової змінних; принцип одностотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами та асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ) [6, 7].

Відомо, що математичною моделлю поздовжніх коливань одновимірного нелінійно пружного середовища, яке рухається вздовж своєї геометричної осі зі сталою швидкістю V , є диференціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{tx} - \alpha^2 u_{xx} = \varepsilon f(u, u_t, u_x, u_{xx}). \quad (1)$$

в якому: $u(x, t)$ – переміщення перерізу середовища з координатою x у довільний момент часу t ; $f(u, u_t, u_x, u_{xx})$ – аналітична функція, яка описує нелінійну складову пружних сил середовища, в'язко-пружні сили та сили тертя; α і ε – сталі, до того ж ε – малий параметр. Малий параметр у правій частині рівняння (1) показує на малу величину нелінійних сил порівняно із лінійною складовою відновлювальних сил.

Для рівняння (1) будемо розглядати крайові умови вигляду

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

які узгоджуються з умовами відсутності переміщень середовища у двох фіксованих його точках. У [6] показано, що одночастотні розв'язки незбуреної крайової задачі (1), (2) мають вигляд

$$u(x, t) = \frac{a}{2} (\cos(\kappa x + \omega t + \varphi) - \cos(\chi x - \omega t - \varphi)), \quad (3)$$

де: χ, κ, ω – сталі; a – амплітудний параметр; φ – фаза;

$$\kappa = \frac{k\pi}{2l} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right), \quad \chi = \frac{k\pi}{2l} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right), \quad \omega = \frac{k\pi}{2l} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

($k = 1, 2, \dots$). Сталі χ, κ називатимемо хвильовими числами прямої і зворотної (відбитої) хвиль, ω – частотою. Розвиваючи основну ідею асимптотичного методу КБМ, розв'язок збуреної крайової задачі (1), (2) у формі близькій до головної ($k = 1$) форми незбуреної задачі, будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = a \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin \left(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi \right) + \varepsilon U_1(a, x, \psi) + \varepsilon^2 U_2(a, x, \psi) + \dots, \quad (4)$$

де $U_i(a, x, \psi)$ – невідомі періодичні по $\psi = \omega t + \varphi$ функції, що задовольняють умовам, які випливають із (2), тобто

$$U_i(a, x, \psi)|_{x=0} = U_i(a, x, \psi)|_{x=l} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Наявність нелінійних сил у системі призводить до зміни форми коливань (порівняно із лінійним її аналогом), а також зміни в часі і її амплітудно-частотної характеристики. Тому, в асимптотичному представленні (4) параметри a і φ для збуреного рівняння будуть вже змінними величинами. Невідомі закони їх зміни будемо задавати співвідношеннями

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \quad \dot{\varphi} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots, \quad (6)$$

в яких праві частини визначаються так, щоб асимптотичне представлення (4), (6) з необхідним ступенем точності задовольняло вихідному рівнянню (1). Із другого рівняння співвідношень (6) також випливає

$$\dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (7)$$

Шляхом диференціювання залежності (3), з врахуванням (6), (7), після нескладних перетворень, отримуємо лінійні диференціальні рівняння, які зв'язують невідомі функції $U_i(a, x, \psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$

$$\begin{aligned} & \omega^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 \psi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi \partial x} - \alpha^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} = \\ & = f_i(a, x, \psi) + 2 \left[\left(\omega - \beta \frac{\chi - \kappa}{2} \right) \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \left(A_i(a) \cos \left(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi \right) + a B_i(a) \sin \left(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi \right) \right) - \right. \\ & \left. - \beta \frac{\kappa + \chi}{2} \cos \frac{\kappa + \chi}{2} x \left(A_i(a) \sin \left(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi \right) - a B_i(a) \cos \left(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi \right) \right) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

де $f_i(a, x, \psi)$ – відомого вигляду періодичні по ψ функції, зокрема $f_1(a, x, \psi) = f(u, u_x, u_t, u_{xx})|_{u = a \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi)}$. Для однозначного визначення із (8) невідомих функцій $A_i(a)$ і $B_i(a)$ накладемо на $U_i(a, x, \psi)$ додаткові умови – умови відсутності в їх розкладах доданків, пропорційних головній частині та частинній її похідній по змінній ψ у представленні (4), тобто доданків пропорційних $\sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi)$ і $\sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \cos(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi)$. Це, разом з крайовими умовами (5), дає змогу у випадку неперервної двічі диференційованої по x, ψ функції $U_i(a, x, \psi)$, довести тотожності

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \left(\omega^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 \psi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi \partial x} - \alpha^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} \right) \begin{cases} \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi), \\ \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \cos(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi) \end{cases} d\psi dx \equiv 0 \quad (9)$$

З фізичних міркувань додаткові умови, накладені на функції $U_i(a, x, \psi)$, відповідають вибору за величину амплітуди хвильового процесу амплітуду головної її частини у представленні (4), тобто параметр a . Самі ж залежності (9) дають змогу визначити із (8) невідомі функції $A_i(a)$ та $B_i(a)$ у вигляді

$$A_i(a) = \frac{-\varepsilon}{\pi l \left(\omega - \beta \frac{\chi - \kappa}{2} \right)} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \psi) \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \cos(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi) dx d\psi,$$

$$B_i(a) = \frac{\varepsilon}{\pi l a \left(\omega - \beta \frac{\chi - \kappa}{2} \right)} \int_0^{2\pi} \int_0^l f_i(a, x, \psi) \sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi) dx d\psi. \quad (10)$$

Для завершення розв'язування задачі необхідно визначити невідомі поки що функції $U_i(a, x, \psi)$. З цією метою її, а також відомі функції $f_i(a, x, \psi)$ представимо у вигляді рядів Фур'є. Функції $U_i(a, x, \psi)$ будуть задовольняти всім накладеним на неї умовам (крайовим умовам (5); умовам відсутності в їх розкладах доданків пропорційних головній частині і її похідній у представленні (4)), якщо їх розклади у ряди мають вигляд

$$U_i(a, x, \psi) = \sum_{k=2}^n \sum_{s, s \neq 1} U_{iks}(a) \sin k \frac{\kappa + \chi}{2} x \exp(is\psi), \quad (11)$$

де $U_{iks}(a)$ – невідомі коефіцієнти. Аналогічно, з врахуванням (10), розкладемо у ряди Фур'є ці частини функцій $f_i(a, x, \psi)$, які не містять головної частини і її похідних у представленні (4), тобто

$$\tilde{f}_i(a, x, \psi) = \sum_{k=2}^n \sum_{s, s \neq 1} \tilde{f}_{iks}(a) \sin k \frac{\kappa + \chi}{2} x \exp(is\psi), \quad (12)$$

де $\tilde{f}_i(a, x, \psi)$ – ті частини функцій $f_i(a, x, \psi)$, які не містять доданків, пропорційних функції $\sin \frac{\kappa + \chi}{2} x \sin(\frac{\chi - \kappa}{2} x - \psi)$ і її частинній похідній по ψ . Підставивши (11), (12) у (8), після прирівнювання коефіцієнтів при однакових виразах вигляду $\sin k \frac{\kappa + \chi}{2} x \exp(is\psi)$, отримуємо невідомі коефіцієнти розкладу функції $U_i(a, x, \psi)$

$$U_{iks}(a) = \frac{1}{(\alpha k(\kappa + \chi))^2 + 4\beta iks - 2\omega^2 s^2} \tilde{f}_{iks}(a). \quad (13)$$

Покажемо, що вказану методику можна перенести і на випадок збурених крайових умов вигляду

$$u(x, t)|_{x=0} = \varepsilon F_1(u, u_x, u_t)|_{x=0}, \quad u(x, t)|_{x=l} = \varepsilon G_1(u, u_x, u_t)|_{x=l}, \quad (14)$$

де $F_1(u, u_x, u_t)$ і $G_1(u, u_x, u_t)$ – відомі аналітичні функції. Для цього заміною змінних

$$u(x, t) = v(x, t) + \varepsilon w(x, t) \quad (15)$$

із (1) отримуємо

$$v_{tt} + 2\beta v_{xt} - \alpha^2 v_{xx} = \varepsilon [f(u, u_x, u_t) - w_{tt} - \beta w_{xt} + \alpha^2 w_{xx}]. \quad (16)$$

Виберемо функцію $w(x, t)$ так, щоб вона була розв'язком диференціального рівняння $w_{xx} = 0$ і задовольняла крайовим умовам

$$w(x, t)|_{x=0} = \varepsilon F_1(v, v_x, v_t)|_{x=0}, \quad w(x, t)|_{x=l} = \varepsilon G_1(v, v_x, v_t)|_{x=l}. \quad (17)$$

Тоді функція $v(x, t)$, як випливає із (15), буде вже задовольняти однорідним крайовим умовам. Знайти функцію $w(x, t)$ не становить значних труднощів:

$$w(x, t) = \frac{1}{l} [(G_1(v, v_x, v_t)|_{x=l} - F_1(v, v_x, v_t)|_{x=0})x + lF_1(v, v_x, v_t)|_{x=0}]. \quad (18)$$

Підставивши в (16) на місце $w(x, t)$ і її похідних вирази, які узгоджуються із (18), приходимо до розв'язаної вище задачі з однорідними крайовими умовами.

Таким чином, отримані результати дають змогу стверджувати, що навіть постійна швидкість руху середовища призводить до зміни форми та частоти прямої і відбитої хвиль порівняно із їх аналогічними характеристиками у середовищі, що не рухається, розрахункові ж формули дають змогу для конкретного середовища визначити закони зміни в часі основних параметрів динамічного процесу середовища. На завершення зауважимо, як і необхідно було чекати, при $\beta = 0$ із викладеного отримуються відомі результати, які стосуються коливань одновимірних нерухомих середовищ (див., наприклад, [7]).

Література

1. Доценко П.Д. Колебание и устойчивость движущейся полосы// Машиноведение. – 1969, № 5. – С. 18-24.
2. Вейц В.Л., Бейлин И.Ш., Меркин В.М. Колебания транспортируемой ленты// Сб. Научн. тр. ВУЗов ЛитССР. Вибротехника. – 1986, № 4 (57). – С. 181-187.
3. Киба С.П. Об одном способе решения задачи о струне с подвижной нагрузкой// Прикл. механика. – 1974. – 10, № 1. – С. 59-63.
4. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив позовжнього руху на нелінійні коливання пружних одновимірних систем// Динаміка, міцність та проектування машин і приладів: Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2004, № 509. – С. 25-28.
5. Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження// Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УкрДЛТУ. – 2003, вип. 28. – С. 81-89.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
7. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1974. – 592 с.