

**ПЕРІОДИЧНІ АТЕВ-ФУНКЦІЇ У ДОСЛІДЖЕННІ КОЛИВАНЬ  
СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩ**

Запропоновано методику дослідження коливних процесів однорідних одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом. В основу досліджень покладено узагальнення, на основі застосування Ateb-функцій, методу усереднення на деякі класи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

**Ключові слова:** нелінійні коливання, динамічний процес, рівняння руху, амплітудно-частотна характеристика.

*Prof. B.I. Sokil; K.I. Lishchinska – NU "L'vivs'ka Politekhnika"*

**Periodic Ateb-functions in research of oscillations  
of strongly nonlinear moving mediums**

It is offered a technique of research of oscillatory processes homogeneous unidimensional nonlinearly elastic mediums which are characterized by a longitudinal motion. In a basis of researches generalization on a foundation of use of Ateb-functions, an averaging method on some classes of the differential equations in fractional derivatives is necessary.

**Keywords:** nonlinear oscillations, dynamic process, the equation of motion, an amplitude-frequency characteristic.

Багато прикладних задач механіки вимагають вивчення коливних процесів у середовищах, що рухаються з постійною чи змінною швидкостями (бурові установки вентиляційних стволів шахт і нафтових промислів, трубопроводи, якими транспортується рідина, струна або волокно при намотуванні чи технологічному процесі й ін.). Математичними моделями динамічних процесів у таких системах є диференціальні рівняння з частинними похідними, які для свого дослідження не дають змоги застосовувати класичні методи Фур'є чи Д'Аламбера [1]. Тому такі задачі вивчені, певною мірою, за припущенням найпростіших фізико-механічних властивостей матеріалу середовища [2-4]. Проте найпростіші (лінійні) моделі руху середовищ не можуть дати відповідь на цілий ряд практичних і теоретичних питань, які виникають під час вивчення реальних динамічних систем. У зв'язку з цим виникає необхідність розгляду більш складних, нелінійних аналогів цих систем, що рухаються вздовж своєї осі. Нижче, на прикладі поздовжніх коливань рухомого суцільного одновимірного середовища, розглядається така модель середовища, пружні властивості матеріалу якого значною мірою відмінні від лінійного закону. Для отриманого диференціального рівняння руху середовища (за певних обмежень щодо швидкості його руху), розроблено методику дослідження. В її основу покладено ідею використання періодичних Ateb-функцій [5-8] для побудови розв'язків звичайних диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю і узагальнення методу усереднення на нелінійні рівняння із частинними похідними, які описують рух середовища. Це дає змогу в межах прийнятих припущень дослідити вплив кінематичних і фізико-механічних параметрів на основні характеристики руху середовища.

Диференціальне рівняння коливань. Розглянемо поздовжні коливання рухомого одновимірного середовища на прикладі прямолінійної однорідної

стрічки (стрижня, канату, труби й ін.). Вважатимемо, що вона рухається вздовж своєї геометричної осі зі сталою швидкістю  $V$ .

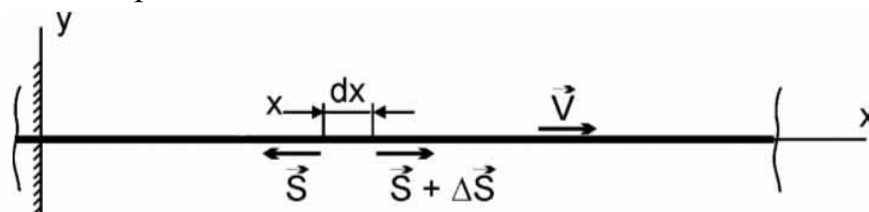


Рис. 1. Схема сил, які діють на елемент рухомої прямолінійної стрічки

Позначимо:  $u(x, t)$  – поздовжнє переміщення перерізу з координатою  $x$  у довільний момент часу  $t$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$  – відносну деформацію. Будемо вважати, що у перерізах стрічки виникають лише поздовжні зусилля, які визначаємо залежністю  $S(x, t) = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ , що і функція  $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$  характеризує в'язко-пружні властивості матеріалу стрічки. Будемо вважатимемо, що їх з достатнім ступенем точності можна апроксимувати залежністю

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = E^* \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu+1} + \mu f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad (1)$$

де:  $E^*$  – "модуль пружності" матеріалу стержня;  $F_0$  – площа поперечного перерізу (стала величина),  $\nu + 1$  – стала вигляду  $\nu + 1 = \frac{2m+1}{2n+1}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$\mu$  – малий параметр, який вказує на незначне відхилення пружних властивостей матеріалу від степеневого закону. Спираючись на рівняння кінетостатики, умова динамічної рівноваги елемента стрічки набирає вигляд

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = (\rho F_0)^{-1} \left[ \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right], \quad (2)$$

де  $\rho$  – маса одиниці довжини матеріалу стрічки.

З врахуванням того, що стрічка здійснює поздовжній рух із сталою швидкістю, мають місце співвідношення [9]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Останні співвідношення дають змогу диференціальне рівняння руху середовища записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \quad (4)$$

де  $\alpha^2 = \frac{(\nu+1)E^*}{\rho F_0}$ , а  $f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$  відомим чином виражається через функцію  $\bar{f}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ . Зауважимо, при  $\nu = 0$  (матеріал середовища задовольняє вимоги квазілінійного закону пружності) задача розглядалась в [10], при  $V = 0$  – в [7, 8].

Методика дослідження. Легко переконатись, що навіть у лінійному випадку ( $\nu = 0, \mu = 0$ ) виникають проблеми із побудовою розв'язку отриманого рівняння. Тому будемо досліджувати його як припущення малої швидкості руху середовища. Це дає змогу рівняння (4) записати у вигляді

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^\nu u_{xx} = \mu f(u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}) - 2Vu_{xt} - V^2 u_{xx}. \quad (5)$$

В отриманому рівнянні і надалі для більш компактного запису відповідних виразів уведені позначення:  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ . Із прийнятих припущень випливає, що найбільше значення правої його частини є значно меншим від максимального значення виразу  $\alpha^2 (u_x)^\nu u_{xx}$ . Це дає змогу при побудові розв'язку рівняння використати головну ідею методів збурень [11, 12]. Згідно із останніми припущеннями, розглянемо спочатку незбурене рівняння

$$u_{tt} - \alpha^2 (u_x)^\nu u_{xx} = 0. \quad (6)$$

Для дослідження рівняння (6) можна використати метод відокремлення змінних, згідно із яким, як показано в [7, 8], його одночастотні розв'язки виражаються за допомогою періодичних Атеб-функцій у вигляді

$$u_k(x, t) = a_k X_k(x) ca(\nu+1, 1, \omega_k(a)t + \theta). \quad (7)$$

Треба відзначити, що функції  $X_k(x)$ , які визначають форми коливань, залежать від способу закріплення середовища (крайових умов для рівняння (7)). Зокрема, у випадку закріплення стрічки, які відповідають крайовим умовам

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (8)$$

чи

$$u(x, t)|_{x=0} = u_x(x, t)|_{x=l} = 0, \quad (9)$$

вони також виражаються через періодичні Атеб-функції відповідно у вигляді

$$X_k(x) = \begin{cases} sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k\Pi_x}{l}x\right) \\ sa\left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{(2k+1)\Pi_x}{2l}x\right). \end{cases} \quad (10)$$

У співвідношеннях (7), (10)  $\Pi_x = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)$  – півперіод функцій, які визначають форму коливань,  $a_k, \theta_k$  – сталі,  $k=1,2,\dots$ ,  $\omega_k(a_k)$  – власна частота коливань стрічки і вона набирає вигляд

$$\omega_k(a_k) = \alpha \left( \frac{s \Pi_x}{l} \right)^{1-\frac{\nu}{2}} a_k^{\frac{\nu}{2}}, \quad (11)$$

до того ж,  $s=k$  для крайових умов (8) і  $s = \frac{2k+1}{2}$  – для крайових умов (9).

Використовуючи принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [12], а також загальну ідею методу Ван-дер-Поля для нелінійних систем, залежності (7) можна вважати і розв'язком розглядуваних збурених крайових задач. Різниця полягає у тому, що у збуреному випадку параметри  $a$  і  $\theta$  будуть вже функціями часу і вони визначаються із системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{sa(1, \nu+1, \psi_k) X_k(x) f_1^{**}(a, \psi_k, x)}{\omega_k P}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \frac{(\nu+2)ca(\nu+1, 1, \psi_k) X_k(x) f_1^{**}(a, \psi_k, x)}{2a\omega_k P}, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $f_1^{**}(a, \psi, x) = \left\langle -\mu f(u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}) + 2Vu_{xt} + V^2u_{xx} \right\rangle \Big|_{\substack{u=aX_k(x)ca(\nu+1, 1, \psi_k), \\ u_{xx}=aX_k''(x)ca(\nu+1, 1, \psi_k)}}$ ,

$$\psi_k = \omega_k(a)t + \theta, \quad P = \int_0^l X_k^2(x) dx.$$

Досліджувати закони зміни амплітуди параметрів  $a_k$  і  $\theta_k$  за допомогою отриманої системи диференціальних рівнянь є, взагалі кажучи, також не простою задачею. Щоб спростити її використаємо наступне:

- праві частини співвідношень (11) є періодичними по  $\psi_k$  і  $x$  функціями з періодами відповідно  $2\Pi_T$  і  $2\Pi_x$  ( $\Pi_T = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right)$ );
- максимальні їх значення (через прийняті припущення) є порядку  $\mu$ ;
- точність системи диференціальних рівнянь першого порядку із малими правими частинами не зміниться, якщо у правих їх частинах зробити похибку вищого порядку ніж  $\mu$ .

Вказане вище дає змогу для системи рівнянь (12) застосувати метод усереднення [14], згідно із яким вона, для розглядуваного наближення, еквівалентна наступній

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= \mu A(a_k), \\ \dot{\psi}_k &= \omega(a_k) + \mu B(a_k) - \frac{b}{\omega(a_k)} V^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{де } A_k(a) = \frac{-1}{2\Pi_T P \omega} \int_0^{2\Pi_l} \int_0^l X_k(x) f(a_k X_k c a(\nu+1, 1, \psi_k), \dots, a_k X_k'' c a(\nu+1, 1, \psi_k)) s a(1, \nu+1, \psi_k) dx d\psi_k$$

$$B(a_k) = -\frac{\nu+2}{4\Pi_T P a_k \omega} \int_0^{2\Pi_l} \int_0^l X_k(x) f(a_k X_k c a(\nu+1, 1, \psi_k), \dots, a_k X_k'' c a(\nu+1, 1, \psi_k)) c a(\nu+1, 1, \psi_k) dx d\psi_k$$

$$b = \frac{s\pi}{2l} \frac{\nu+4}{\nu+2} \Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{3}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right).$$

Таким чином, як показують останні формули, у першому наближенні швидкість руху середовища впливає тільки на частоту його власних коливань, причому із збільшенням швидкості руху середовища – власна частота коливань зменшується. Вказане явище особливо актуальне при дослідженні резонансних явищ у вказаного типу одновимірних систем.

Як приклад, розглянемо поздовжні коливання рухомого стрижня, матеріал якого задовольняє істотно вимогам нелінійного закону пружності

$$\sigma = E^* \varepsilon_x^{\nu+1} + E \varepsilon_x, \quad (14)$$

де  $E$  – стала.

За припущенням  $E^* \varepsilon_x^{\nu+1} \gg E \varepsilon_x$  і крайових умов, які узгоджуються із (8), отримуємо: амплітуда коливань стрижня залишається сталою (система консервативна), що стосується частоти власних коливань, то вона залежить від амплітуди коливань та швидкості руху стрижня і визначається залежністю

$$\Omega = \omega(a_k) + \frac{\alpha_1}{\omega(a_k)} \frac{(3\nu+4)(\nu+1)}{l^2(\nu+2)} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\nu+2}\right)} - \frac{b}{\omega(a_k)} V^2, \quad (15)$$

де  $\alpha_1 = E/\rho F$ .

Нижче на графіку (рис. 2) показано залежності частоти власних коливань від швидкості при різних значеннях параметру  $\nu$ .

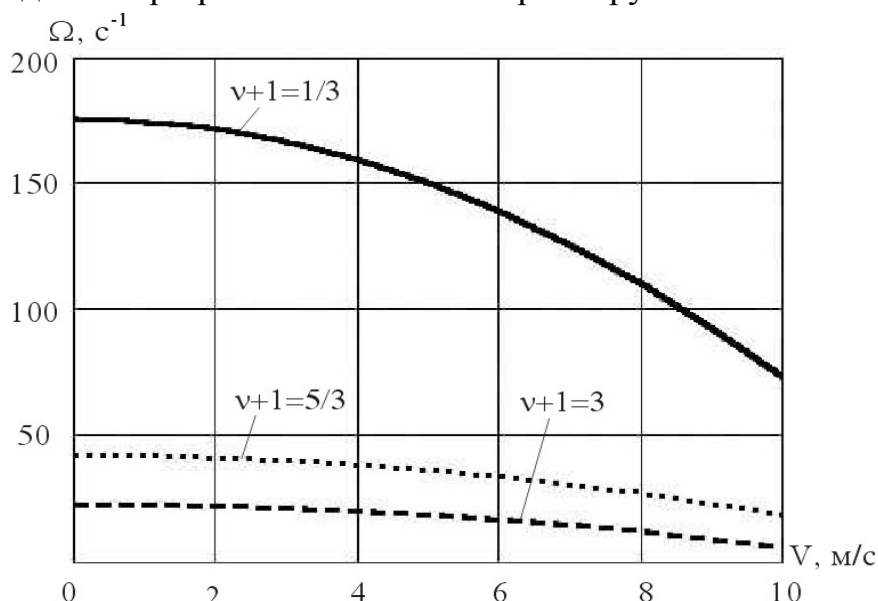


Рис. 2. Залежність частоти власних коливань стрижня від швидкості руху

Отримані результати показують: із зростанням швидкості власна частота коливань зменшується, до того ж швидкість спадання частоти менша для більш м'яких матеріалів. Це особливо актуально при дослідженні резонансних явищ у вказаних системах.

### Література

1. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
2. Горошко О.А. О продольных колебаниях балки с подвижным экипажем// Прикладная механика. – 1978. – 14, № 8. – С. 70-78.
3. Тарме М., Моут Л. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении// В кн.: Тр. Американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – М.: Мир, 1969. – 36, № 1. – С. 87-98.
4. Моут М., Нэгюльсуорен Л. Теоретические и экспериментальные исследования вибраций ленточных пил// В кн.: Тр. Американского общества инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. – М.: Мир, 1966. – 88, № 2. – С. 27-32.
5. Сеник П.М. Про Ateb-функції// Доп. АН УРСР. – 1968, № 1. – С. 23 -26.
6. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції// Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325-333.
7. Сокил Б.И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными// Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 6. – С. 803-805.
8. Сокил Б.І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ// Доп. НАН України. – 1997, № 1. – С. 55-58.
9. Волосов В.М. Нелинейные волны в неоднородных средах. Асимптотические методы исследования с приложениями к задачам океанологии// В сб.: Колебания нелинейных систем. – К: Изд-во Ин-та математики. – 1976. – С. 3-141.
10. Мартинців М.П., Сокил Б.І., Сокил М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно пружних системах і методи їх дослідження// Лісове госп-во, лісова, паперова і д/о пром-сть. – Львів: УкрДЛТУ – 2003, вип. 28. – С. 81-89.
11. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
12. Митропольский Ю.А. Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с.
13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
14. Митропольский Ю.А. Лекции по методу усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. Думка, 1966. – 467 с.

УДК 630.37

Доц. Л.О. Тисовський, канд. фіз.-мат. наук;  
аспір. І.М. Рудько – НЛТУ України

## РОЗРАХУНОК НЕСУЧОГО КАНАТА НЕЗАВАНТАЖЕНОЇ ДВОПРОМІЖНОЇ УСТАНОВКИ

Розроблена методика для визначення форми прогину несучого каната підвісної системи з двома проміжками. Проведено числовий аналіз трельовальної установки для конкретного випадку. Стверджується, що запропоновану методику можна застосовувати і для канатних трельовальних установок з довільним числом проміжків.

*Doc. L.O. Tysovskij; doctorate I.M. Rud'ko – NUFWT of Ukraine*

## Calculation of a bearing cable of not loaded plant with two runs

The technique of definition of the form of a deflection of a bearing rope of pendant system with two runs is developed. It is lead the numerical analysis of pendant plant for a concrete case. It is certain, that the resulted technique can be applied and to transport plant with any number of runs.