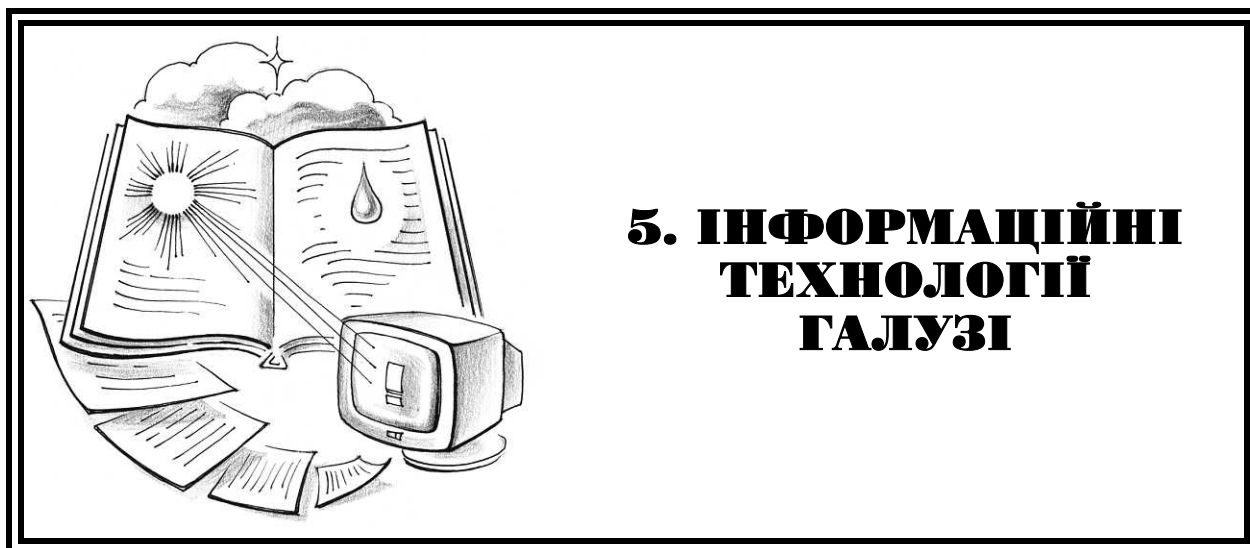




5. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 539.3

*Доц. О.І. Думанський, канд. фіз.-мат. наук – УкрДЛТУ;
доц. П.М. Осів, канд. фіз.-мат. наук – Українська академія друкарства*

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ДЕФОРМІВНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЇ У ВИГЛЯДІ ДВОЗВ'ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

Пропонується загальний підхід стосовно дослідження пружного стану пластинок у вигляді двозв'язної області, якщо конформно відображна функція, яка здійснює перетворення області пластинчастого елемента на кругове кільце, що задається у вигляді многочлена.

*Doc. O.I. Dumanskyj – USUFWT; doc. P.M. Osiw – Ukrainian
academy of book-printing*

The general method of research it is elastic – deformed conditions of lamellar elements of a design as two-coherent area

The general approach concerning research of an elastic condition of plates as two-coherent area if konphorm displaying function carries out transformations of area of a lamellar element on the circular ring, set as a multinominal is offered.

Актуальність проблеми

Елементи інженерної конструкції, незалежно від їх призначення, повинні бути міцними, жорсткими та стійкими при найменших затратах матеріалу. Тому однією з основних задач при проектуванні є встановлення напруженого стану у деталях машин та механізмів, елементах конструкцій заданої форми, а також утворення на основі проведених досліджень нових, більш раціональних конструктивних форм. Більшість пластинчастих елементів деревообробних верстатів, пристроїв, устаткувань мають скінчені геометричні розміри і розрахунок їх надійної експлуатації та міцності є важливим та актуальним.

Аналіз відомих досліджень

На сьогодні опублікована достатня кількість монографій та наукових робіт, присвячених дослідженню пружної та граничної рівноваги пластинчас-

тих та оболонкових елементів конструкцій, які піддані дії різних силових та температурних факторів і послаблених отворами, надрізами, тріщинами тощо. Це роботи М.Г. Мусхелішвілі, Г.М. Савіна, Я.С. Підстригача, В.В. Панасюка, М.П. Саврука, О.Г. Космодам'янського та інших, – що засвідчує необхідність та доцільність цього напрямку досліджень в механіці суцільного деформівного середовища. Інтенсивно ведуться наукові дослідження плоских задач анізотропних пластинчастих елементів конструкцій, основою для яких є розвинені методи розрахунку напружено-деформівного стану ізотропних тіл. Цікавими є дослідження, представлені в роботах [1-5], в яких наведені задачі розгляду пружної рівноваги як анізотропних, так ізотропних пластинчастих елементів при дії різних силових факторів.

У даній роботі пропонується загальний підхід для дослідження напружено-деформівного стану пластинчастого елемента конструкції у вигляді двозв'язної області, тобто елемента, в якому враховується взаємовплив концентрації напружень вздовж внутрішнього та зовнішнього контурів. Алгоритм розв'язання задачі будується за допомогою аналітичних функцій та апарату конформно відображної функції у вигляді ряду, що здійснює перетворення двозв'язної фізичної області на кругове кільце.

Основний матеріал дослідження з обґрунтуванням отриманих результатів

Формулювання задачі. Розглядається пружний ізотропний пластинчастий елемент конструкції у вигляді двозв'язної області (рис. 1). Віднесемо цей елемент до прямокутної системи декартових координат xOy так, щоби початок координат співпадав з центром отвору, площина xOy – із серединою поверхнею області пластини. Вважаючи, що пластинчастий елемент є двозв'язною областю S , обмеженою всередині кривою L_1 , а зовні кривою L_2 , і відома конформно відображна функція $z = \omega(\zeta)$, що здійснює перетворення кругового кільця з границями γ_1 і γ_2 (рис. 2) на область S , то розв'язок задачі зводиться до знаходження двох регулярних в $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$ функцій $\phi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, за якими знаходимо розподіл концентрації напружень, що виникають на контурах, які обмежують дану область.

Комплексні потенціали $\phi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ знаходимо з контурної умови [6]:

$$\chi_j \phi(\sigma_j) + \frac{\omega(\sigma_j)}{\omega'(\sigma_j)} \overline{\phi'(\sigma_j)} + \overline{\psi(\sigma_j)} = \overline{f_j(\sigma_j)} + C_j \quad \text{на } \gamma_j, \quad (1)$$

де $j=1, 2$, значення χ_j та вигляд функцій $f_j(\sigma_j)$ будуть залежати від типу основних задач (перша, друга або змішана), заданих на L_1 і L_2 , контурних умов, наявності об'ємних сил тощо, $z=\omega(\zeta)$ – конформно відображна функція, визначається

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=-m}^m C_k \zeta^k, \quad (2)$$

що здійснює конформне відображення кругового кільця $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$ на задану область S (або на область S' досить близьку до заданої пластинчастого елемента).

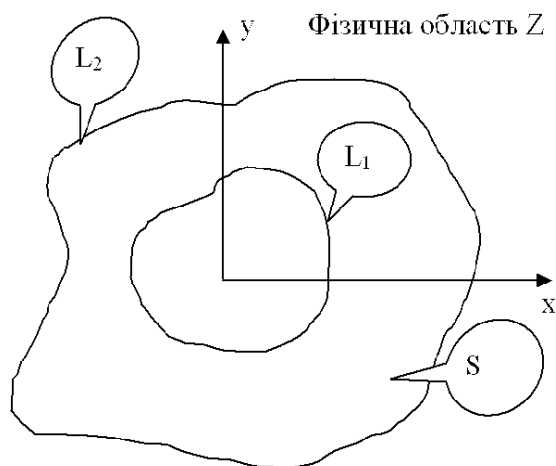


Рис. 1.

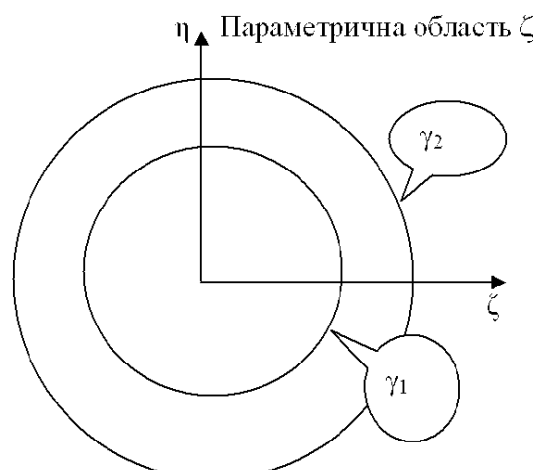


Рис. 2

Запишемо граничні умови (1) у розгорнутому вигляді:

$$\chi_2 \varphi(\sigma_2) + \frac{\omega(\sigma_2)}{\omega'(\sigma_2)} \overline{\varphi'(\sigma_2)} + \overline{\psi(\sigma_2)} = \overline{f_2(\sigma_2)} + C_2 \quad \text{на } \gamma_2, \quad (3)$$

$$\chi_1 \varphi(\sigma_1) + \frac{\omega(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)} \overline{\varphi'(\sigma_1)} + \overline{\psi(\sigma_1)} = \overline{f_1(\sigma_1)} + C_1 \quad \text{на } \gamma_1. \quad (4)$$

Знаходження комплексних потенціалів $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$. Для знаходження результату розв'язання задачі перейдемо у виразах (3) і (4) до спряжених значень:

$$\chi_2 \overline{\varphi(\sigma_2)} + \frac{\overline{\omega(\sigma_2)}}{\overline{\omega'(\sigma_2)}} \varphi'(\sigma_2) + \psi(\sigma_2) = f_2(\sigma_2) + \overline{C_2} \quad \text{на } \gamma_2, \quad (5)$$

$$\chi_1 \overline{\varphi(\sigma_1)} + \frac{\overline{\omega(\sigma_1)}}{\overline{\omega'(\sigma_1)}} \varphi'(\sigma_1) + \psi(\sigma_1) = f_1(\sigma_1) + \overline{C_1} \quad \text{на } \gamma_1. \quad (6)$$

Задамо на γ_1 і γ_2 відповідно однозначні функції $f_2(\zeta)$ і $f_1(\zeta)$ у вигляді:

$$f_2(\zeta) = f_{21}(\zeta) + f_{20}(\zeta), \quad f_1(\zeta) = f_{11}(\zeta) + f_{10}(\zeta),$$

де: $f_{21}(\zeta)$ і $f_{11}(\zeta)$ – функції, які не мають у кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$ особливих точок; $f_{20}(\zeta)$ і $f_{10}(\zeta)$ – функції регулярні поза кільцем $\rho_1 < |\zeta| < 1$, є головними частинами функцій $f_2(\zeta)$ і $f_1(\zeta)$ відповідно. Всі особливі точки цих функцій знаходяться у кільці $\rho_1 < |\zeta| < 1$.

Якщо $f_{20}(\zeta)$ і $f_{10}(\zeta)$ не дорівнюють нулю, що може траплятися при розв'язанні певних задач, то функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, які є регулярними у кільці $\rho_1 < |\zeta| < 1$, шукаємо таким чином.

Позначимо через $\varphi_1(\zeta)$ і $\psi_1(\zeta)$ функції, регулярні при $|\zeta| \leq 1$, а через $\varphi_2(\zeta)$ і $\psi_2(\zeta)$ функції, регулярні при $|\zeta| \geq \rho_1$ і дорівнюють нулю в нескінченно віддалених точках. При виборі цих умов ці функції будуть мати такий вигляд:

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \varphi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^{-k}, \quad (7)$$

$$\psi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k, \quad \psi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^{-k}. \quad (8)$$

Задамо функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ у такому вигляді

$$\varphi(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + \frac{1}{\chi_2} \overline{f_{20}}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\chi_1} \overline{f_{10}}\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right); \quad (9)$$

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta),$$

$$\text{де} \quad \varphi_*(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + \varphi_2(\zeta). \quad (10)$$

Вважаємо, що $\varphi_1(\zeta)$ регулярна у крузі $|\zeta| < 1/\rho_1^2$, а функція $\varphi_2(\zeta)$ – регулярна при $|\zeta| > \rho_1^2$, тобто, функція $\varphi_*(\zeta)$ регулярна у кільці $\rho_1^2 < |\zeta| < \rho_1^{-2}$.

Для числового розв'язання задачі функції $\varphi_1(\zeta)$ і $\varphi_2(\zeta)$ будуються у вигляді поліномів $\varphi_1^{(n)}(\zeta)$ і $\varphi_2^{(n)}(\zeta)$. Тоді функція $\varphi_*^{(n)}(\zeta) = \varphi_1^{(n)}(\zeta) + \varphi_2^{(n)}(\zeta)$ буде регулярно у всій площині комплексної змінної ζ , за винятком точок $\zeta=0$ і $\zeta=\infty$, в яких вона має особливості у вигляді полюсів.

Запишемо контурні умови (5) і (6), з врахуванням (10), у такому вигляді

$$\chi_2 \overline{\varphi_1}\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) + \chi_2 \overline{\varphi_2}\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)}{\overline{\omega}'(\sigma_2)} [\varphi_1'(\sigma_2) + \varphi_2'(\sigma_2)] + \psi(\sigma_2) = f_{22}(\sigma_2) + \overline{C_2} \quad \text{на } \gamma_2, \quad (11)$$

$$\chi_1 \overline{\varphi_1}\left(\frac{\rho_1^2}{\sigma_1}\right) + \chi_1 \overline{\varphi_2}\left(\frac{\rho_1^2}{\sigma_1}\right) + \frac{\overline{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\sigma_1}\right)}{\overline{\omega}'(\sigma_1)} [\varphi_1'(\sigma_1) + \varphi_2'(\sigma_2)] + \psi(\sigma_1) = f_{11}(\sigma_1) + \overline{C_1} \quad \text{на } \gamma_1, \quad (12)$$

де:

$$f_{22}(\sigma_2) = f_{2r}(\sigma_2) - \frac{\chi_2}{\chi_1} f_{10}(\rho_1^2 \sigma_2) + \frac{\overline{\omega}(1/\sigma_2)}{\overline{\omega}'(\sigma_2)} \left[\frac{1}{\chi_2 \sigma_2^2} \overline{f_{20}}(1/\sigma_2) + \frac{\rho_1^2}{\chi_1 \sigma_2^2} \overline{f_{10}}(\rho_1^2/\sigma_2) \right], \quad (13)$$

$$f_{11}(\sigma_1) = f_{1r}(\sigma_1) - \frac{\chi_1}{\chi_2} f_{20}(\sigma_1/\rho_1^2) + \frac{\overline{\omega}(\rho_1^2/\sigma_1)}{\overline{\omega}'(\sigma_1)} \left[\frac{1}{\chi_2 \sigma_1^2} \overline{f_{20}}(1/\sigma_1) + \frac{\rho_1^2}{\chi_1 \sigma_1^2} \overline{f_{10}}(\rho_1^2/\sigma_1) \right].$$

Очевидно, функції $f_{22}(\zeta)$ і $f_{11}(\zeta)$ не мають особливих точок у кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$, тому задамо їх у вигляді рядів.

$$f_{22}(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \zeta^k; \quad f_{11}(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \zeta^k; \quad (14)$$

або наближено у вигляді інтерполяційних поліномів

$$f_{22}^{(n)}(\zeta) = \sum_{k=-\frac{m'}{2}}^{\frac{m'}{2}-1} A_k^{(n)} \zeta^k; \quad f_{11}^{(n)}(\zeta) = \sum_{k=-\frac{m'}{2}}^{\frac{m'}{2}-1} B_k^{(n)} \zeta^k; \quad (15)$$

де коефіцієнти $A_k^{(n)}$ і $B_k^{(n)}$ мають такий вигляд

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{m'} \sum_{j=1}^{m'} f_{22}^{(j)} e^{-ik\theta_j}, \quad B_k^{(n)} = \frac{1}{m'} \sum_{j=1}^{m'} f_{11}^{(j)} e^{-ik\theta_j} \rho_1^{-k}, \quad (k = -\frac{m'}{2}, \dots, \frac{m'}{2}-1). \quad (16)$$

Вирази $f_{22}^{(j)}$ і $f_{11}^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, m'$) – це значення функцій, заданих формулами (14) і (12) в точках $\sigma_2^{(j)} = e^{i\theta_j}$, де $\theta_j = \frac{2\pi}{m'} j$ або $\sigma_1^{(j)} = \rho_1 e^{i\theta_j}$, де $\theta_j = \frac{2\pi}{m'} j$ для функції $f_{11}^{(j)}$.

Проаналізуємо функціональні вирази у контурних умовах (11) і (12). Функціональний вираз $\frac{\overline{\omega(\sigma_2)}}{\omega'(\sigma_2)}$ є контурним значенням раціональної функції

$$\frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} = \frac{\sum_{k_1=-m}^{m_1} \overline{C}_{k_1} \zeta^{-k_1}}{\sum_{k_1=-m}^{m_1} k_1 C_{k_1} \zeta^{k_1-1}}, \text{ регулярної у всій площині комплексної змінної } \zeta, \text{ за}$$

винятком точок $\zeta=0$ і $\zeta=\infty$, в яких вона має полюси скінченного порядку (m_1-m-1 і $m-m_1+1$ відповідно) та скінченної кількості точок

$$\zeta_k \ (k=1, \dots, p) \text{ і } \zeta'_k \ (k=1, \dots, q), \ (0 < |\zeta_k| < \rho_1; \ 1 < |\zeta| < \infty; \ p+q \leq m+m_1),$$

де вона має полюси порядку m_k . Таким чином, досліджувану функцію задамо всередині області, тобто всередині γ_2 та зовні у виглядах

$$\frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} = \sum_{i=1}^{m_1-m-1} e_i \zeta^{-i} + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} e_{ki} (\zeta - \zeta_k)^{-i} + \lambda_1(\zeta) \text{ всередині } \gamma_2, \quad (17)$$

$$\frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} = \sum_{i=0}^{m_1-m+1} e'_i \zeta^i + \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{m_k} e'_{ki} (\zeta - \zeta'_k)^{-i} + \lambda_2(\zeta) \text{ зовні } \gamma_2, \quad (18)$$

де: $\lambda_1(\zeta)$ – функція регулярна всередині області, обмеженій контуром γ_2 ; $\lambda_2(\zeta)$ – функція регулярна поза контуром γ_2 і дорівнює нулю в нескінченно віддаленій точці; e_i, e_{ki} та e'_i, e'_{ki} – постійні.

Тоді функціональний вираз $\frac{\overline{\omega(\sigma_2)}}{\omega'(\sigma_2)} \phi'_1(\sigma_2)$ є контурним значенням функ-

ціонального виразу $\frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \phi'_1(\zeta)$ – регулярного всередині контура γ_2 , за винятком точки $\zeta=0$ і точок $\zeta_k \ (k=1, \dots, p)$, де вона має полюси, і тому його можна задати у такому вигляді

$$\frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \phi'_1(\zeta) = \sum_{i=1}^{m_1-m-1} E_i \zeta^{-i} + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} E_{ki} (\zeta - \zeta_k)^{-i} + F_1(\zeta), \quad (19)$$

де: $F_1(\zeta)$ – функція регулярна всередині γ_2 ; E_i, E_{ki} – сталі величини.

Аналогічно запишемо функціональний вираз $\frac{\overline{\omega(\sigma_2)}}{\omega'(\sigma_2)} \phi'_2(\sigma_2)$, який є контурним виразом функції, регулярної зовні γ_2 , за винятком точки $\zeta=\infty$ і точок $\zeta'_k \ (k=1, \dots, q)$, де вона має полюси

$$\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'_2(\zeta) = \sum_{i=0}^{m-m_1+1} E'_i \zeta^i + \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{m_k} E'_{ki} (\zeta - \zeta'_k)^{-i} + F_2(1/\zeta), \quad (20)$$

де: $F_2(1/\zeta)$ – функція регулярна зовні контура γ_2 і дорівнює нулю у нескінченно віддаленій точці; E'_i, E'_{ki} – сталі величини.

Помноживши контурна умову (11) на ядро Коші $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_2}{\sigma_2 - \zeta}$ та інтегруючи вздовж контуру γ_2 , вважаючи $|\zeta| \leq 1$ і, враховуючи властивості інтегралу типу Коші, отримаємо функцію $\psi_1(\zeta)$

$$\psi_1(\zeta) = -\chi_2 \overline{a_0} - \chi_2 \overline{\varphi_2}(1/\zeta) - F_1(\zeta) - \frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'_2(\zeta) + F_2(1/\zeta) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k + \overline{C_2}. \quad (21)$$

Аналогічно в граничній умові (12) відношення $\frac{\overline{\omega}(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)}$ є граничним значенням функції $\frac{\overline{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}$, регулярної на всій площині ζ , за винятком точок $\zeta=0$ і $\zeta=\infty$, в яких вона має полюси скінченного порядку ($m_1 - m - 1$ і $m - m_1 + 1$, відповідно) та скінченної кількості точок $\zeta_k (k=1, \dots, p)$ і $\zeta'_k (k=1, \dots, q)$, ($0 < |\zeta_k| < \rho_1$; $1 < |\zeta| < \infty$; $p + q \leq m + m_1$), де вона має полюси порядку m_k . Отже, дана функція може бути представлена всередині γ_1 у вигляді (17), а поза γ_1 матиме вигляд, що співпадає з виразом (18). Тоді функціонал $\frac{\overline{\omega}(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)}\varphi'_1(\sigma_1)$ з контурної умови (12) є граничним значенням відповідної функції, регулярної всередині γ_1 , окрім точки $\zeta=0$ та точок $\zeta_k (k=1, \dots, p)$, де вона має полюси порядку m_k і може бути представлена у такому вигляді

$$\frac{\overline{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'_1(\zeta) = \sum_{i=1}^{m_1-m-1} D_i \zeta^{-i} + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{m_k} D_{ki} (\zeta - \zeta_k)^{-i} + F_3(\zeta), \quad (22)$$

де: $F_3(\zeta)$ – функція, регулярна всередині γ_1 ; D_i, D_{ki} – постійні.

Функціональний вираз $\frac{\overline{\omega}(\sigma_1)}{\omega'(\sigma_1)}\varphi'_2(\sigma_1)$, що входить у контурну умову (12), є граничним значенням функції $\frac{\overline{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'_2(\zeta)$, що є аналітичною зовні γ_1 , окрім точки $\zeta=\infty$ та точок $\zeta_k (k=1, \dots, q)$, де вона має полюси порядку m_k і може бути представленим у такому вигляді

$$\frac{\overline{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\varphi'_2(\zeta) = \sum_{i=1}^{m_1-m+1} D'_i \zeta^i + \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{m_k} D'_{ki} (\zeta - \zeta_k)^{-i} + F_4(1/\zeta), \quad (23)$$

де: $F_4(1/\zeta)$ – функція регулярна зовні γ_1 ; D'_i, D'_{ki} – постійні.

Помноживши умову (12) на ядро Коші та, інтегруючи її вздовж контуру γ_1 при $|\zeta| < \rho_1$, з врахуванням вигляду функцій (8), (14), (22) і (23), отримаємо значення функції $\psi_1(\zeta)$, регулярної в $|\zeta| < \rho_1$

$$\psi_1(\zeta) = -\chi_1 \bar{a}_0 - \chi_1 \bar{\phi}_2(\rho_1^2/\zeta) - F_3(\zeta) - \frac{\bar{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_2'(\zeta) + F_4(1/\zeta) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^k + \bar{C}_1. \quad (24)$$

Оскільки за умовою функція $\psi_1(\zeta)$ особливих точок у кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$ не має, то ліві частини у формулах (21) і (24) повинні збігатися, тобто функція (21), регулярна в $|\zeta| < 1$ і, відповідно функція (24) регулярна в $|\zeta| < \rho_1$ збігаються в області $|\zeta| < \rho_1$. Отже, функція (24) є аналітично продовженою у круг $|\zeta| < 1$ і є аналітичною всередині γ_2 . Із аналізу правої частини формули (24) теж впливає можливість продовження функції $\psi_1(\zeta)$, оскільки вона не має особливих точок у кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$.

Проведемо аналогічні перетворення з умовами (11) та (12).

Помноживши умову (11) на ядро Коші та інтегруючи по γ_2 , а також вважаючи $|\zeta| > 1$ і, враховуючи (8), (9), (14), (19), (20), знаходимо функцію $\psi_2(\zeta)$ – аналітичну поза γ_2 :

$$\psi_2(\zeta) = \chi_2 \bar{a}_0 - \chi_2 \bar{\phi}_1(1/\zeta) + F_1(\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_1'(\zeta) - F_2(1/\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \zeta^k. \quad (25)$$

Аналогічно, інтегруючи умову (12) вздовж γ_1 , при $|\zeta| > \rho_1$, знаходимо функцію $\psi_2(\zeta)$ – регулярну зовні γ_1 .

$$\psi_2(\zeta) = \chi_1 \bar{a}_0 - \chi_1 \bar{\phi}_1(\rho_1^2/\zeta) + F_3(\zeta) - \frac{\bar{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_1'(\zeta) - F_4(1/\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-k} \zeta^{-k}. \quad (26)$$

Додавши, згідно з умовою (9) функції (21) та (25), отримаємо шукану функцію $\psi(\zeta)$ – аналітичну у кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$:

$$\psi(\zeta) = -\chi_2 \bar{\phi}_*(1/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_*'(\zeta) + f_{22}(\zeta) + \bar{C}_2. \quad (27)$$

Аналогічно, додавши (24) і (26), знаходимо теж функцію $\psi(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) = -\chi_1 \bar{\phi}_*(\rho_1^2/\zeta) - \frac{\bar{\omega}(\rho_1^2/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_*'(\zeta) + f_{11}(\zeta) + \bar{C}_1. \quad (28)$$

Формули (27) та (28) між собою збігаються і поряд з тим визначають функцію $\psi(\zeta)$ у замкнутій формі, тобто задають точне значення цієї функції, якщо буде визначена функція $\phi_*(\zeta)$.

Знайдемо функцію $\phi_*(\zeta)$ і постійні C_1 , C_2 , прирівнявши праві частини формул (27) і (28), помноживши їх попередньо на $\zeta \cdot \omega'(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \omega'(\zeta) \left[\chi_2 \bar{\Phi}_* \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \chi_1 \bar{\Phi}_* \left(\frac{\rho_1^2}{\zeta} \right) \right] + \zeta \bar{\Phi}_* '(\zeta) \left[\bar{\omega} \left(\frac{1}{\zeta} \right) - \bar{\omega} \left(\frac{\rho_1^2}{\zeta} \right) \right] + \bar{N} \cdot \zeta \cdot \omega'(\zeta) = \\ = \zeta \cdot \omega'(\zeta) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[(A_k - B_k) \zeta^k + (A_{-k} - B_{-k}) \zeta^{-k} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

де позначено $\bar{N} = B_0 - A_0 + \bar{C}_1 - \bar{C}_2$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ζ у лівій та правій частинах виразу (29), отримаємо, перейшовши до спряжених значень, дві нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів a_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) та постійної N_0 :

$$N_0 = N + a_0(\chi_2 - \chi_1) = \bar{B}_0 - \bar{A}_0 + C_1 - C_2 + a_0(\chi_2 - \chi_1); \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\chi_2 - \chi_1 \rho_1^{2k}) (k-l) \bar{C}_{k-l} + \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k C_{k+l} (1 - \rho_1^{2(k+l)}) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (\chi_2 - \chi_1 \rho_1^{-2k}) (k+l) \bar{C}_{-(k+l)} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_{-k} C_{l-k} (1 - \rho_1^{2(l-k)}) - N_0 l \bar{C}_{-l} = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_{-k} - \bar{B}_{-k}) (k-l) \bar{C}_{k-l} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_k - \bar{B}_k) (k+l) \bar{C}_{-(k+l)} \quad (l = 0, 1, \dots, \infty); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\chi_2 - \chi_1 \rho_1^{2k}) (k+l) \bar{C}_{k+l} + \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_k C_{k-l} (1 - \rho_1^{2(k-l)}) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (\chi_2 - \chi_1 \rho_1^{-2k}) (l-k) \bar{C}_{l-k} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{a}_{-k} C_{-(k+l)} (1 - \rho_1^{-2(k+l)}) + N_0 l \bar{C}_l = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_{-k} - \bar{B}_{-k}) (k+l) \bar{C}_{k+l} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_k - \bar{B}_k) (l-k) \bar{C}_{l-k} \quad (l = 0, 1, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (32)$$

У випадку першої основної задачі $\chi_1 = \chi_2 = 1$ і C_1 вибираємо таким, щоб $N_0 = 0$. Тоді потреба у знаходженні постійних відпадає. При другій основній задачі A_0 і B_0 відомі, $C_1 = C_2 = 0$, $\chi_1 = \chi_2 = -\chi$ і $N_0 = \bar{B}_0 - \bar{A}_0$ є відомим і тоді член з N_0 можна перенести у праву частину рівнянь (31) і (32).

У випадку змішаної задачі, коли на L_2 заданий розподіл напружень, а на L_1 – переміщення, то потрібно визначити постійну N_0 згідно з формулою:

$$N_0 = a_0(1 - \chi) + \bar{B}_0 - \bar{A}_0 - C_2$$

або, навпаки, якщо задані напруження та переміщення, то

$$N_0 = a_0(1 - \chi) + \bar{B}_0 - \bar{A}_0 + C_1.$$

Обчисливши коефіцієнти a_k із системи рівнянь (31), (32), отримаємо вираз функції $\varphi_*(\zeta)$, а далі функцію $\varphi(\zeta)$ за формули (9).

Згідно з формулою [7]

$$\sigma_{\theta j} = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'_j(\sigma_j)}{\omega'(\sigma_j)} \right], \quad (33)$$

знаходимо розподіл напружень на зовнішньому та внутрішньому контурах досліджуваного об'єкта.

Висновки

Запропонований шлях дослідження напружено-деформівного стану пластинчастих елементів у вигляді двозв'язної області дає змогу отримати розв'язок, виражений в аналітичному вигляді порівняно з числовими методами, що дає змогу змінюючи конформно перетворюючу функцію, отримати розв'язок для такого типу областей. Точність отриманого результату розв'язання залежить від кількості вибраних рівнянь системи (31) і (32), а також – від кількості членів функції $\varphi_*(\zeta)$. Запропонований підхід до розв'язання таких задач має певні переваги над числовим (аналітичність, загальність, врахування будь-якого навантаження тощо), але є все ж таки наближеним, оскільки побудована конформно відображна функція є многочленом і може не давати точного відтворення контура фізичної області, система рівнянь не є скінченною.

Література

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
3. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
4. Стащук Н.Г. Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 359 с.
5. Божедарнік В.В., Максимович О.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 240 с.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.

УДК 330.

Ст. викл. Г.А. Лех, канд. екон. наук;

доц. І.В. Стасюк, канд. екон. наук – УкрДЛТУ

ЗАКОНОМІРНОСТІ РОЗВИТКУ СІМЕЙНОГО БІЗНЕСУ В УКРАЇНІ ТА ЗА КОРДОНОМ

Відомо, що будь-яка людина може брати участь у сфері зайнятості і створювати матеріальні цінності, працюючи безпосередньо у домашньому господарстві. У цій особливій сфері сконцентровано велику кількість людей, які виробляють вагому частку продуктів і послуг. Досліджуються особливості та закономірності розвитку сімейного бізнесу в Україні та за рубежом.