



2. ЛІСОЕКСПЛУАТАЦІЯ

УДК 634. 0377. 2

Асист. О.В. Боратинський – УкрДЛТУ

КОЛИВАННЯ НЕСУЧИХ КАНАТІВ ПІДВІСНИХ ЛІСОТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ

Наведено результати дослідження коливань несучих канатів підвісних систем. Виконано графічний аналіз отриманих залежностей, сформульовано рекомендації для вибору основних експлуатаційних параметрів підвісних лісотransпортних систем.

Assist. O.W. Boratynskyy – USUFWT

Oscillation of bearing ropes of the suspended forest transportation systems

The results of the researches of bearing ropes oscillation of the suspended systems are presented. The graphic analysis of the received dependences is executed; the recommendations for the choice of basic operating parameters of the suspended forest transportation systems are formulated.

Підвісні канатні системи здобули визнання в усіх країнах світу, як найбільш прогресивний вид первинного транспортування деревини, при освоєнні гірських лісів. Ефективність роботи таких установок, в основному, визначається міцністю та довговічністю несучих канатів, як найбільш дорогого елемента. Дослідженням канатних установок та їх окремих елементів присвячені роботи [1-6], в яких при розрахунку несучого канату враховувалися тільки статичні навантаження.

Для визначення характеру зміни напружень в канаті та створення методики розрахунку з умови довговічності необхідно розглянути коливання канату. При підніманні вантажу і русі каретки систему, аналогічну несучому канату, можна розглядати, як консервативну з імпульсною дією сил [7]. Результати досліджень коливальних процесів в дискретних і дискретно-неперервних системах з лінійною та квазілінійною математичними моделями наведено в роботах [8, 9].

Однак, для конкретних умов експлуатації, необхідно розглянути відповідні розрахункові схеми, скориставшись наведеною методикою. Для виведення диференціального рівняння поперечних коливань канату, розглянемо розрахункову схему на рис. 1.

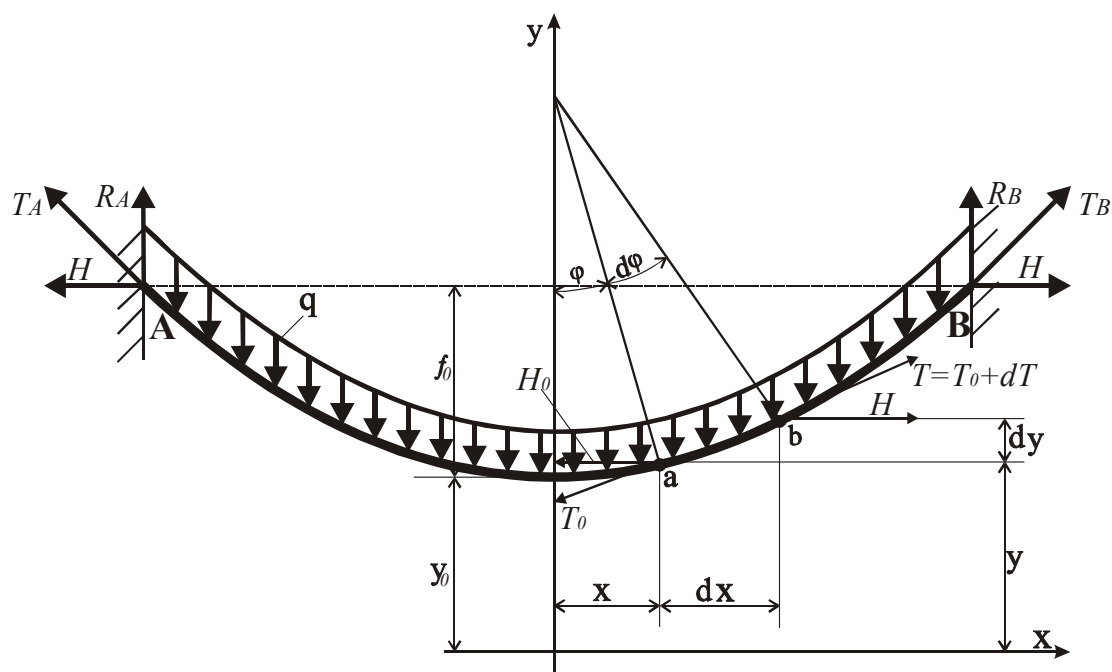


Рис. 1. Розрахункова схема для виведення рівняння коливання канату

Позначимо через q силу, віднесену до одиниці довжини канату. Тоді на елемент канату ab будуть діяти сили qdS і в точках a і b натяги T_0 і T відповідно.

Застосуємо до даного елемента другий закон Ньютона

$$mdS\omega = T - T_0 + qdS, \quad (1)$$

або, розділивши на dS , отримаємо

$$m\omega = \frac{\partial T}{\partial S} + q. \quad (2)$$

При русі канату, який ми вважаємо ідеальною однорідною і нерозтяжною ниткою, положення і швидкість кожної його точки, а також натяг T залежать не тільки від дугової координати S , але й від часу t . Тому, якщо r – радіус-вектор деякої точки, що знаходиться на рухомому канаті, а ϑ і ω – швидкість і прискорення цієї точки, тоді будемо мати:

$$T = T(S, t); r = r(S, t); \vartheta = \vartheta(S, t) = \frac{\partial r}{\partial t}; \omega = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Диференціальне рівняння (2) є основним рівнянням динаміки нитки у векторній формі. Проектуючи його на осі нерухомих декартових координат, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial x}{\partial S} \right) + q_x \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial y}{\partial S} \right) + q_y \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial z}{\partial S} \right) + q_z \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

До цих рівнянь необхідно приєднати рівняння зв'язку

$$\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial S}\right)^2 = 1. \quad (5)$$

Диференціюючи це рівняння за часом t , отримаємо:

$$\frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial S}\right) + \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial S}\right) + \frac{\partial z}{\partial S} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial S}\right) = 0,$$

або змінюючи порядок диференціювання

$$\frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial z}{\partial S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = 0.$$

Величини, що стоять в дужках, рівні відповідним проекціям швидкості $\mathcal{G}$, тобто

$$\mathcal{G}_X = \frac{\partial x}{\partial t}, \mathcal{G}_Y = \frac{\partial y}{\partial t}, \mathcal{G}_Z = \frac{\partial z}{\partial t}, \quad (6)$$

або у векторній формі $\tau \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S} = 0$.

Тому остання рівність бере такою

$$\frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial \mathcal{G}_X}{\partial S} + \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial \mathcal{G}_Y}{\partial S} + \frac{\partial z}{\partial S} \frac{\partial \mathcal{G}_Z}{\partial S} = 0. \quad (7)$$

Диференціальні рівняння руху нитки (4) повинні бути проінтегровані з врахуванням зв'язків (5) і (7), а також граничних і початкових умов. Якщо кінці канату AB закріплені, то відраховуючи дугову координату від кінця A , граничні умови можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} X_A(0, t) &= a_1; Y_A(0, t) = b_1; Z_A(0, t) = c_1, \\ X_B(l, t) &= a_2; Y_B(l, t) = b_2; Z_B(l, t) = c_2, \end{aligned}$$

де: l – довжина нитки; a_k, b_k, c_k – постійні числа ($k = 1, 2$ – координати точок закріплення A і B).

При дослідженні коливань канату відповідно до загальної теорії малих коливань [7, 9, 10], переміщення u і похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ вважаються величинами першого порядку малості.

Тоді, довжину ділянки нитки dS , можна представити як

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx, \quad (8)$$

або нехтуючи квадратом похідної $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ порівняно з одиницею

$$dS = dx = dS_0.$$

Складемо тепер диференційні рівняння руху нитки, прийнявши, що зовнішні сили рівні нулю, а коливання нитки проходять в одній площині, при цьому переміщення точок нитки перпендикулярні осі x . Із цього виходить, що $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$, а отже перші два рівняння системи (4) наберуть вигляду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial x}{\partial S} \right) &= 0 \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(T \frac{\partial u}{\partial S} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Звідси отримаємо:

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)^2}}. \quad (10)$$

Перше рівняння системи (9) можна записати – $\frac{\partial T}{\partial S} = 0$.

Підставивши у друге рівняння системи (9) значення $T_0 = const$, отримаємо диференціальне рівняння вільних поперечних коливань канату

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}, \quad (11)$$

де a – коефіцієнт, що має розмірність швидкості і визначається з рівняння, [5]

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{m}}. \quad (12)$$

Рівняння (11) має відповідати двом початковим і двом граничним умовам.

Початкові умови мають такий вигляд:

при
$$t = 0, u = f(x), \frac{\partial u}{\partial t} = F(x), (0 \leq x \leq l). \quad (13)$$

Перше з цих рівнянь визначає форму, а друге характер розподілу швидкості точок канату в початковий момент часу, форми $f(x), F(x)$ задані [10].

Так для несучого канату мобільної канатної установки, на основі статичного розрахунку [6] встановлено, що

$$f(x) = \frac{qx(l-x)}{2H \cos \alpha} + \frac{Qx(l-x)}{Hl},$$

де $H = T \cos \alpha$.

Граничні умови

$$u(0, t) = 0; u(l, t) = 0, \quad (14)$$

і показують, що переміщення точок закріплення канату в будь-який момент часу рівні нулю.

При необхідності врахувати податливість опор, встановлюють закон зміни переміщення u і вносять його у граничні умови. Закон зміни переміщення u з врахуванням податливості опор можна вивести на основі досліджень проф. М.Г. Адамовського [6].

Для розв'язування рівняння (11) використаємо метод Фур'є [11, 12], згідно з яким розв'язок шукається у формі двох функцій

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (15)$$

із яких перша залежить тільки від x , а друга – від t .

Отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X}{dx^2} T, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2 T}{dt^2} X. \quad (16)$$

Внесемо ці вирази для похідних в рівняння (11), тоді

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} T, \quad (17)$$

або

$$\frac{1}{a^2 T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (18)$$

Така рівність можлива, якщо обидва відношення представляють постійне число. Позначимо його через λ^2 , тоді рівність (18) набере такого вигляду

$$\frac{1}{a^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2. \quad (19)$$

Звідки:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 \lambda^2 T = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0. \quad (21)$$

Загальний розв'язок рівняння (21) можна записати в наступному вигляді

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (22)$$

Скористаємося першою граничною умовою (14) і рівністю (15), тоді

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0.$$

При будь-якому t ця рівність можлива тільки при $X(0) = 0$, отже з (22) знайдемо, що $C_1 = 0$, а

$$X(x) = \sin \lambda x. \quad (23)$$

На основі другої граничної умови і залежності (15) отримаємо

$$\sin \lambda l = 0.$$

Це рівняння має безліч коренів

$$\lambda_K = \frac{\pi k}{l}, (k=1,2,3....). \quad (24)$$

Внесемо значення λ_K в рівняння (22). Тоді його загальний розв'язок буде мати вигляд

$$T_K = a_K \cos \frac{\pi a k}{l} t + b_K \sin \frac{\pi a k}{l} t, \quad (25)$$

де a_K, b_K – довільні постійні.

Враховуючи значення λ_K з (24), отримаємо один з частинних розв'язків рівняння (11)

$$u_K(x, t) = \sin \frac{\pi k}{l} x \left(a_K \cos \frac{\pi a k}{l} t + b_K \sin \frac{\pi a k}{l} t \right). \quad (26)$$

Тому що рівняння (11) лінійне, загальний розв'язок буде складатися з частинних і запишеться у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{\pi k x}{l} \left(a_K \cos \frac{\pi a k}{l} t + b_K \sin \frac{\pi a k}{l} t \right). \quad (27)$$

Продиференціювавши рівняння (27) за t , отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi a k}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} \left(-a_K \sin \frac{\pi a k}{l} t + b_K \cos \frac{\pi a k}{l} t \right). \quad (28)$$

Скориставшись початковими умовами (26) і (27) при $t = 0$, і замінивши праві частини відповідно на $f(x)$ і $F(x)$ отримаємо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_K \sin \frac{\pi k x}{l}; F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi a k}{l} b_K \sin \frac{\pi k x}{l}. \quad (29)$$

Помножимо перше рівняння на $\sin \pi n x / l$ і проінтегруємо його від 0 до l

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_K \int_0^l \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (30)$$

Згідно з формулою ортогональних тригонометричних функцій, можна записати

$$\int_0^l \sin \frac{\pi k x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \begin{cases} 0, k \neq n \\ \frac{l}{2}, k = n \end{cases}. \quad (31)$$

Скориставшись рівняннями (30) і (31), отримаємо

$$a_K = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx; b_K = \frac{2}{\pi a_K} \int_0^l F(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx. \quad (32)$$

Знаючи натяг канату T_0 , його погонну масу m і довжину l , а також початкові умови (13), за формулою (12) знаходимо параметр a , після чого з рівнянь (32) обчислюємо коефіцієнти a_K і b_K , і відповідно встановлюємо закон поперечних коливань будь-якої точки M канату (27). Кожний член ряду це k -а гармоніка, або стояча хвиля.

Амплітуда коливань

$$A_K = \sqrt{a_K^2 + b_K^2}. \quad (33)$$

Частота коливань

$$\omega_K = \frac{\pi a k}{l}. \quad (34)$$

Основна частота ω , буде при $k=1$, тобто

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{m}}. \quad (35)$$

Наведена методика дає змогу отримати частоти і при більш високих гармоніках. Дослідження характеру зміни амплітуди та частоти коливання канатів дасть змогу вибрати оптимальні режими експлуатації та уникнути явища резонансу.

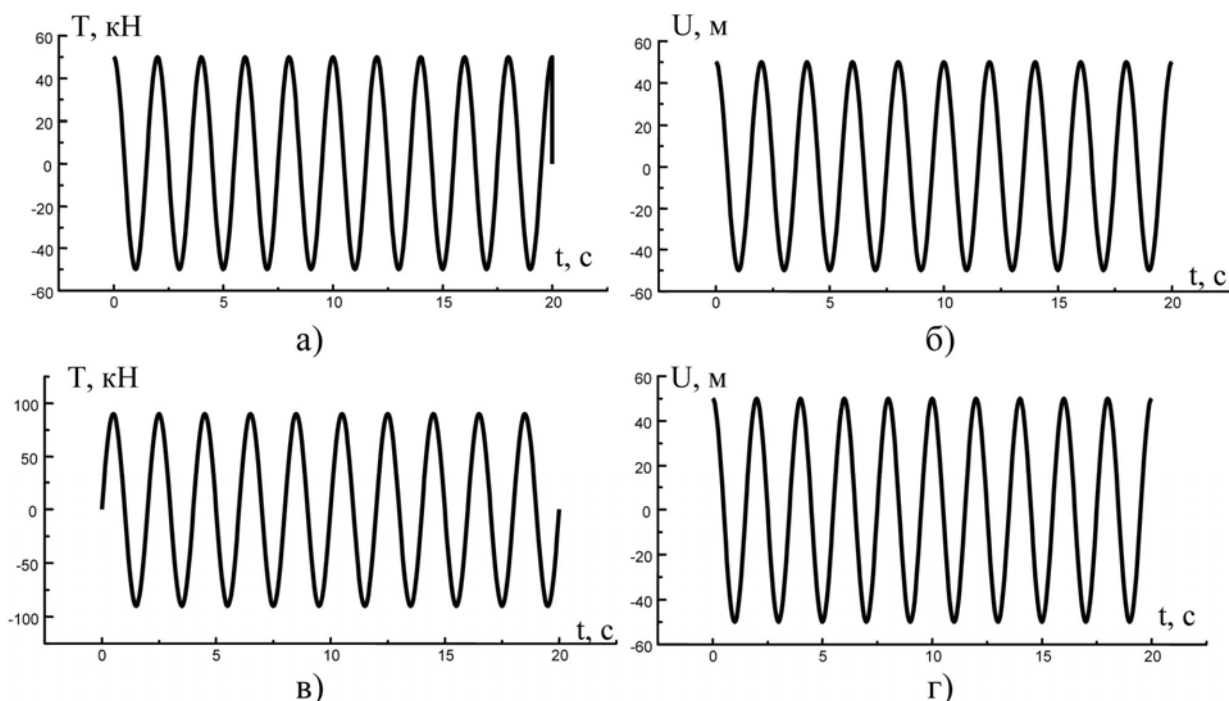


Рис. 2. Графіки зміни натягу та прогинів несучого канату при вільних коливаннях: а) $T=f(Q)$ при $Q=16 \text{ kH}$; б) $U=f(Q)$ при $Q=16 \text{ kH}$; в) $T=f(Q)$ при $Q=32 \text{ kH}$; г) $U=f(Q)$ при $Q=32 \text{ kH}$

Для прикладу, виконаємо графічний аналіз залежності (27), рис. 2, при наступних даних: канат ГОСТ 2688; $Q = 16 \text{ kH}, 32 \text{ kH}$; $l = 200 \text{ м}, 300 \text{ м}$; $f/l = 1/20$. Графіки побудовано для гармонік $k = 1; 2; 3$ при $x = 0.25l; 0.5l; 0.75l$. Інші дані необхідні для розрахунку прийнято для установки ЛЛ-26 [2].

Аналіз отриманих аналітичних залежностей і графіків показав, що частоти вільних коливань несучих канатів значно перевищують частоти збуджуючого зусилля, яке визначається умовами роботи установки [4-6]. Тобто, для таких систем, відсутня можливість виникнення резонансу. Це дає змогу рекомендувати для підвісних лісотransпортних установок приймати швидкість руху вантажної каретки до 7 м/с, а на підніманні вантажу – до 3 м/с, що дасть змогу підвищити їх продуктивність зберігши безпечні умови експлуатації.

Література

1. Качурин В.К. Теория висячих систем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1962. – 224 с.
 2. Дукельский А.И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны. – М.-Л.: Машиностроение, 1966. – 484 с.
 3. Белая Н.М., Прохоренко А.Г. Канатные лесотранспортные установки. – М.: Машиностроение, 1964. – 299 с.
 4. Беркман М.Б. и др. Подвесные канатные дороги. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
 5. Мартинців М.П. Розрахунок основних елементів підвісних канатних лісотранспортних установок. – К.: Ясмина, 1996. – 175 с.
 6. Адамовський М.Г., Мартинців М.П., Бадера Й.П. Підвісні канатні лісотранспортні системи. – К.: ІЗМН, 1997. – 156 с.
 7. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. – Киев: АН УССР, 1962. – 332 с.
 8. Самойленко А.М., Перестюк Н.П. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием// Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1990. – 236 с.
 9. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.
 10. Тисовський Л.О., Мартинців М.П. Про визначення кінетичної енергії каната підвісної лісотранспортної установки// Наук. вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2002, вип. 12.2. – С. 136-140.
 11. Бутенин Н.В., Лупц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, т.І, II. – М.: Наука, 1970. – 236 с.
 12. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1971. – 346 с.
-