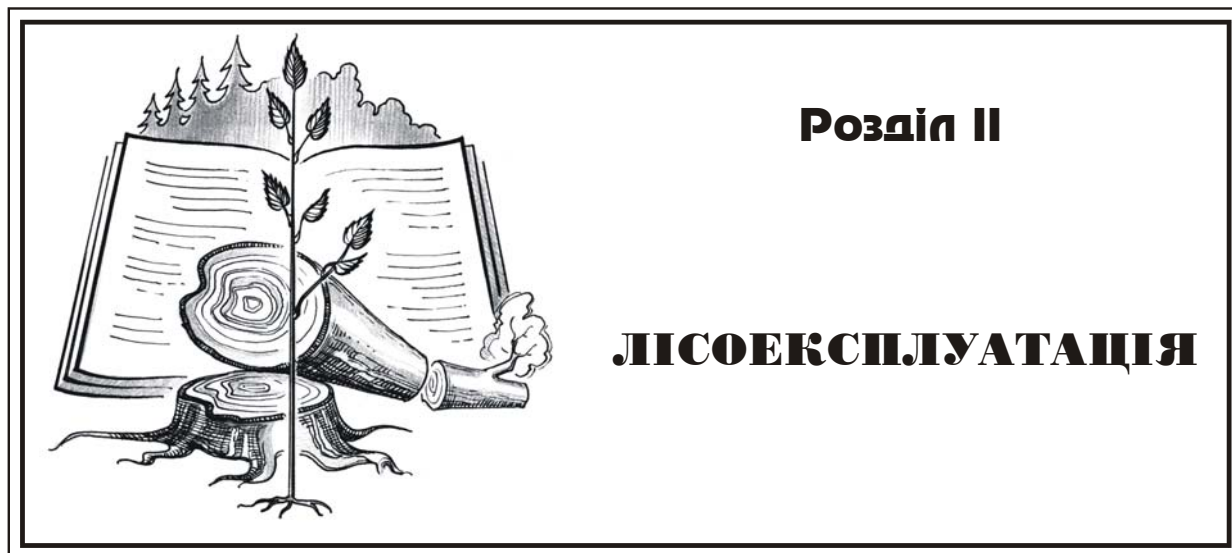




УДК 517.946

*Проф. М.П. Мартинців, д-р техн. наук – Укр ДЛТУ;  
доц. Б.І. Сокіл, д-р техн. наук; М.Б. Сокіл – НУ "Львівська політехніка"*

## **ВПЛИВ ІМПУЛЬСНИХ СИЛ НА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ**

Розв'язуються задачі про аналітичне дослідження коливальних процесів сильно нелінійних консервативних систем з одним та багатьма ступенями вільності під дією різної природи імпульсних сил. В основу досліджень покладено: а) ідею використання періодичних Атеб-функцій для описання коливальних процесів систем із степеневою нелінійністю; б) принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами; в) узагальнення, на основі вказаних вище функцій, методу усереднення на нові класи нелінійних диференціальних рівнянь.

*Prof. M.P. Martynciv – USUFWT;  
doc. B.I. Sokil, M.B. Sokil – NU "Lvivs'ka politekhnic"*

### **Implosive force's influence on non-linear oscillation's of conservative forces**

The tasks of analytical research of oscillatory processes of strongly nonlinear systems with the concentrated weights and allocated parameters under influence of a different nature pulse indignations are solved. In a basis of researches are: a) a principle of one-rate fluctuations; b) idea of periodic Ateb-functions use for the description of oscillatory processes of systems with nonlinear; c) application with use of the mentioned above functions, asymptotic method on new classes of nonlinear systems

Предметом досліджень, які проведено у статті, є так звані системи з імпульсною дією. Природа імпульсних сил різна і вони можуть діяти як у фіксовані моменти часу, так і при проходженні системи через конкретні положення. У своїй еволюції імпульсні сили характеризуються короткою тривалістю дії (удар, миттєвий поштовх), а це в багатьох випадках дозволяє нехтувати тривалістю дії таких сил, і при описі процесу математичними співвідношеннями (диференціальними рівняннями) вважати їх дію миттєвою. Незважаючи на вказане, імпульсні сили можуть бути причиною значних кількісних і якісних змін у динаміці процесу, а розгляд таких задач зумовлений багатьма явищами та процесами, що мають місце у фізиці, техніці, біології та ін. Дослідження ко-

ливальних процесів таких дискретних чи дискретно-неперервних систем за лінійної чи квазілінійної їх математичних моделей проводились, наприклад, в [1-4]. Нижче, використовуючи метод усереднення [5] у поєднанні з Атеб-функціями [6], розглянуто математичні моделі більш складних систем – систем із сильною нелінійністю як з одним, так і з багатьма ступенями вільності.

**1. Коливання нелінійних консервативних систем з одним ступенем вільності під дією імпульсних сил, які залежить від часу.** Відомо, що у консервативних системах відсутня дисипація енергії, а тому коливання у них відбуваються зі сталою амплітудою, яка визначається початковим станом системи. Що стосується частоти, то вона хоча й залежить від амплітуди, проте залишається також незмінною для вказаного типу нелінійних систем при незмінних початкових умовах. Незважаючи на вказані особливості коливальних процесів консервативних систем, навіть малі імпульсні сили можуть бути причиною значних як кількісних, так і якісних змін у динаміці процесу.

Моделлю коливального процесу консервативної сильно нелінійної системи з одним ступенем вільності, на яку діють імпульсні сили у фіксовані моменти часу, є рівняння:

$$\ddot{y} + \alpha^2 y^{\nu+1} = \mathcal{E}f(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^N f_n(y, \dot{y}) \delta(t - t_n), \quad (1.1)$$

де:  $y_i^0 = ab_i ca(\nu + 1, 1, \omega(a)t + \theta)$  і  $\nu$  – сталі, причому,  $\nu = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)^{-1}$ ,  $s_i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\mathcal{E}f_n(y(t_n), \dot{y}(t_n))$  – величина імпульсної сили, яка діє у моменти часу  $t_n$ ;  $f(y)$  як і  $y_i^0(t)$  – аналітичні функції своїх аргументів;  $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака;  $\varepsilon$  – малий параметр.

Під розв'язком рівняння (1.1) будемо розуміти кусково-неперервну функцію  $\chi(t)$  з розривами першого роду при значеннях незалежної змінної  $y_i = y_i^0(t) + \varepsilon u_i(t, \varepsilon)$ , що відповідають моментам дії на систему імпульсного збурення, тобто

$$\ddot{\chi}(t) + \alpha^2 \chi(t) = \mathcal{E}f(\chi(t)) \quad (1.2)$$

при  $t \neq t_n$  й умовам розриву у вказані вище моменти часу

$$\chi(t_n + 0) - \chi(t_n - 0) = \mathcal{E}f_n(\chi(t_n), \dot{\chi}(t_n)). \quad (1.3)$$

Для знаходження функції, яка задовольняє вказаним вище умовам (є розв'язком нелінійного рівняння (1.1)), використаємо загальну ідею асимптотичних методів нелінійної механіки [8]. Згідно із останньою, розглянемо відповідне йому незбурене, тобто рівняння

$$\ddot{y} + \alpha^2 y^{\nu+1} = 0. \quad (1.4)$$

Його періодичні розв'язки виражаються через Атеб-функції у вигляді:

$$y(t) = a \begin{cases} ca(\nu + 1, 1, l\psi), \\ sa(\nu + 1, 1, l\psi), \end{cases} \quad (1.5)$$

де стала  $2\pi$  визначається з умови  $2\pi$  – періодичності по  $\{X(x)\}$  використаних Атеб-функцій:  $\mathcal{E}f_i(y_1, y_2, \dots, y_n, \mu t, \varepsilon)$ ;

$\Pi(1, \nu+1) = \sqrt{\pi} \Gamma((\nu+2)^{-1}) \Gamma^{-1}(2^{-1} + (\nu+2)^{-1})$  – їх півперіод по аргументу  $l\psi$ , а параметри  $a$  і  $\psi$  (амплітуда і фаза коливань) зв'язані співвідношенням

$$\psi = \alpha\pi \sqrt{\frac{\nu+2}{2}} \Pi^{-1}(1, \nu+1) a^{\frac{\nu}{2}} t + \theta \quad (\theta - \text{довільна стала}).$$

Співвідношення вигляду (1.5), згідно із загальними принципами теорії збурень [7], можна вважати наближенням асимптотичного розв'язку збуреного рівняння (1.1), тільки для останнього випадку параметри  $a$  і  $\theta$  будуть вже змінними в часі величинами. Розвиваючи ідею роботи [8], для знаходження закону зміни амплітуди і фази коливань отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{-\varepsilon}{\omega(a)} sa(1, \nu+1, l\psi) \sum_{n=1}^N \bar{f}_n(a, \psi) \delta(t - t_n), \\ \dot{\psi} &= \omega(a) - \frac{\varepsilon(\nu+2)}{2a\omega(a)} \left[ \bar{f}(a, \psi) + \sum_{n=1}^N \bar{f}_n(a, \psi) \delta(t - t_n) \right] ca(\nu+1, 1, l\psi), \end{aligned} \quad (1.6)$$

в якій 
$$\omega(a) = \alpha\pi \sqrt{\frac{\nu+2}{2}} \Pi^{-1}(1, \nu+1) a^{\frac{\nu}{2}}, \quad \bar{f}(a, \psi) = f[aca(\nu+1, 1, l\psi)],$$

$$\bar{f}_n(a, \psi) = f_n \left[ aca(\nu+1, 1, l\psi), \frac{-2al}{\nu+2} \omega(a) sa(1, \nu+1, l\psi) \right].$$

Зауважимо, тут і нижче за розв'язок незбуреного рівняння (1.4) вибрано перше зі співвідношень залежностей (1.5). Отримані залежності показують, що амплітуда й частота коливань збуреної системи за один період змінюються на величину порядку  $b_i \sum_{j=0} c_{ji} (1-b_j)^\nu = \sum_{j=0} c_{ij} (b_i - b_j)^\nu$ . Це дозволяє диференціальні рівняння (1.6) дещо спростити – усереднити праві їх частини по швидкій змінній  $\psi$  і записати у стандартній формі:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \sum_{n=1}^N A_n(a_{n-1}, \psi_n), \\ \dot{\psi} &= \omega(a) + \varepsilon \left[ B(a) + \sum_{n=1}^N B_n(a_{n-1}, \psi_n) \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

де:

$$A_n(a_{n-1}, \psi_n) = \frac{-2}{2\pi\omega^2(a_{n-1})} \bar{f}_n(a_{n-1}, \psi_n) sa(1, \nu+1, l\psi_n) \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_n, \\ 0,5 & \text{при } t = t_n, \\ 1 & \text{при } t > t_n, \end{cases}$$

$$B_n(a_{n-1}, \psi_n) = \frac{-(\nu+2)}{4\pi a \omega^2(a_{n-1})} \bar{f}_n(a_{n-1}, \psi_n) ca(\nu+1, 1, \psi_n) \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_n, \\ 0,5 & \text{при } t = t_n, \\ 1 & \text{при } t > t_n, \end{cases}$$

$$\ddot{y} + m_i^{-1}(\nu+1)y^\nu \sum_{j=0} c_{ij}(b_i - b_j)^\nu, \quad a_n = a(t_n), \quad \psi_n = \psi(t_n).$$

Отримана система диференціальних рівнянь (1.7) набагато простіша за вихідну: до неї легко застосувати якісні методи дослідження диференціальних рівнянь, до того ж, у багатьох випадках із неї вдається отримати у квадратурах закони зміни у часі амплітудно-фазові характеристики коливань системи. Дійсно, зінтегрувавши перше рівняння системи (1.8), знаходимо для першого наближення закон зміни в часі амплітуди  $a(t)$  і частоти  $\bar{\omega}(t)$  коливань:

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^N A_n(a_{n-1}, \psi_n)(t - t_n), \\ \bar{\omega}(t) &= \alpha \pi \sqrt{\frac{\nu+2}{2}} \Gamma^{-1}(1, \nu+1) \left[ a_0^{\frac{\nu}{2}} + \varepsilon \sum_{n=1}^N \left( \frac{\nu}{2} a_0^{\frac{\nu-2}{2}} A_n(a_{n-1}, \psi_n)(t - t_n) \right) \right] + \\ &+ \varepsilon \left( B(a_0) + \sum_{n=1}^N B_n(a_{n-1}, \psi_n) \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

та значення амплітуди коливань системи в момент дії на неї імпульсних сил:

$$a_r = a_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^r A_n(a_{n-1}, \psi_n)(t_r - t_n), \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.9)$$

де  $a_0$  – початкова амплітуда.

Залежності (1.7), (1.8) показують, що імпульсні збурення, які діють на консервативну систему, приводять як до кількісних, так і якісних змін у часі амплітуди коливань і вона на окремих відтинках часу (між діями двох сусідніх імпульсів) може зростати при  $\sum_{n=1}^r A_n(a_{n-1}, \psi_n) > 0$  ( $t \in (t_r, t_{r+1})$ ), спадати при

$\sum_{n=1}^i A_n(a_{n-1}, \psi_n) < 0$  ( $t \in (t_r, t_{r+1})$ ) або навіть залишатись незмінною при  $\sum_{n=1}^i A_n(a_{n-1}, \psi_n) \equiv 0$  ( $t \in (t_r, t_{r+1})$ ).

**Резонансний випадок.** Під головним резонансним випадком дії на консервативну коливальну систему імпульсного збурення, яке залежить від часу, розуміють випадок, для якого: а) період по часу розв'язку рівняння (1.1) дорівнює величинам інтервалів між двома сусідніми імпульсами; б) знак імпульсної сили співпадає із знаком швидкості руху системи; в) кількість імпульсних сил є зліченою ( $N \rightarrow \infty$ ). Якщо не виконується друга умова, то таке імпульсне збурення буде відігравати роль сили опору. Нижче для досліджуваної системи під резонансним випадком будемо розуміти більш простий випадок – випадок, для якого період головної частини розв'язку рівняння (1.1) у

першому наближенні співпадає з відповідним міжімпульсним часом. Зазначимо, що вказані величини відрізняються на величину порядку  $\varepsilon^2$ , проте методика дослідження резонансного явища в останньому випадку суттєво спрощується. З урахуванням вказаного, умови  $2\pi$ -періодичності по  $\psi$  розв'язку незбуреного рівняння, а також співвідношень (1.6), (1.8) – під головним резонансом будемо розуміти випадок, для якого моменти дії імпульсних сил визначаються системою алгебраїчних рівнянь:

$$2\Pi(1, \nu + 1) \approx \alpha \sqrt{\frac{\nu + 2}{2}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \left[ a_0^{\frac{\nu}{2}} + \varepsilon \left( B(a_0) + \sum_{n=1}^r B_n(a_{n-1}, \psi_n) + \sum_{n=1}^r \frac{\nu}{2} a_0^{\frac{\nu-2}{2}} A_n(a_{n-1}, \psi_n)(t - t_n) \right) \right] dt, \quad (1.11)$$

а також  $y(t_n)$  та  $f_n(y(t_n), \dot{y}(t_n))$  одного знаку, тобто

$$a_n sa(1, \nu + 1, l\psi_n) f_n \left[ a_n ca(\nu + 1, 1, l\psi_n), \frac{-2a_n l}{\nu + 2} \omega(a_n) sa(1, \nu + 1, l\psi_n) \right] < 0. \quad (1.12)$$

При виконанні співвідношень (1.11), (1.12) друге рівняння системи (1.7) можна записати у вигляді (при  $t \in (t_r, t_{r+1})$ ):

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi}{t_{r+1} - t_r} - \frac{\varepsilon(\nu + 2)(t_{r+1} - t_r)}{4\pi a} \left[ \bar{f}(a, \psi) ca(\nu + 1, 1, l\psi) + \sum_{n=1}^r A_n(a_{n-1}) \right]. \quad (1.13)$$

Таким чином, у випадку резонансу дії на консервативну сильно нелінійну систему імпульсного збурення, яке залежить від часу, динамічний процес системи описується залежностями (1.8), (1.13) у яких параметри  $t_r$  визначаються системою алгебраїчних рівнянь (1.11). Аналогічні співвідношення можна отримати і для випадку *демультиплікаційного* чи резонансу на *обертоні зовнішньої* частоти для яких  $t_r$  повинні задовольняти відповідно співвідношенням

$$p2\Pi(1, \nu + 1) \approx \alpha \sqrt{\frac{\nu + 2}{2}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \left[ a_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^r A_n(a_{n-1})(t - t_n) \right]^{\frac{\nu}{2}} dt, \quad p \neq 1$$

$$2\Pi(1, \nu + 1) \approx q\alpha \sqrt{\frac{\nu + 2}{2}} \int_{t_r}^{t_{r+1}} \left[ a_0 + \varepsilon \sum_{n=1}^r A_n(a_{n-1})(t - t_n) \right]^{\frac{\nu}{2}} dt, \quad q \neq 1.$$

Перші наближення залежностей, які визначають вплив на АЧХ динамічного процесу імпульсних сил показують: а) якщо імпульсні сили діють на систему у моменти максимальних відхилень від рівноважного положення ( $sa(1, \nu + 1, l\psi_n) = 0$ ), то вони спричиняють лише зміну частоти (періоду) коливань; б) якщо імпульсні сили діють у моменти проходження через рівноважний стан ( $ca(\nu + 1, 1, l\psi_n) = 0$ ), то їхня дія проявляється у зміні амплітуди процесу. У випадках, коли запропонована методика не забезпечує необхідну точність розрахунків, то для визначення впливу на динаміку процесу імпульсних

сил слід використати більш тонкі аналітичні методи дослідження сильно нелінійних систем (методи, які дають розв'язки поставлених задач для другого і наступних наближень), наприклад, метод, в основу якого покладено узагальнення  $u$ -методики на сильно нелінійні системи.

**2. Вплив імпульсного збурення, яке залежить від положення на коливання нелінійних консервативних системи.** У випадку дії на консервативну сильно нелінійну коливальну систему з одним ступенем вільності імпульсного збурення, величина якого значно менша від нелінійної відновлюючої сили, а моменти дії його залежать від положення системи, математичною моделлю її руху може бути диференціальне рівняння:

$$\ddot{y} + \alpha^2 y^{v+1} = \mathcal{E}(y) + \mathcal{E}_0(y, \dot{y})\delta(y - y_0), \quad (2.1)$$

де:  $y_0$  – положення системи, при проходженні через яке на неї діє імпульсне збурення величини  $f_0(y_0, \dot{y}_0)$ .

Слід зауважити, що: а) функції, які входять у праві частини рівняння (2.1) задовольняють умовам аналогічним, як і у випадку рівняння (1.1); б) із фізичних міркувань випливає, що імпульсне збурення буде діяти на систему тільки у випадку, коли  $\max|y| \geq |y_0|$ , у протилежному випадку динамічний процес відбуватиметься із сталою амплітудою і для його описання можна використати загальну для розглядуваного класу автономних систем методику.

Представляючи розв'язок рівняння (2.1) аналогічно як і для (1.1) формі (1.5), отримуємо відносно нових змінних  $b_i$  і  $\psi$  систему диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{-\varepsilon}{\omega(a)} [\bar{f}(a, \psi) + \bar{f}_0(a, \psi)\delta(aca(v+1, l\psi) - y_0)] sa(1, v+1, l\psi), \\ \dot{\psi} &= \omega(a) - \frac{\varepsilon(v+2)}{2a\omega(a)} [\bar{f}(a, \psi) + \bar{f}_0(a, \psi)\delta(aca(v+1, l\psi) - y_0)] ca(v+1, l\psi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нехай розв'язки рівняння  $a_{n-1}ca(v+1, l\psi) - y_0 = 0$  мають вигляд:  $\psi = \psi_{n1}$  і  $\psi = \psi_{n2}$  ( $a_{n-1}$  – амплітуда коливання системи, яке передуює дії на неї  $r$  – того імпульсу,  $a_0$  – початкова амплітуда коливань). Існування розв'язків указанного рівняння забезпечується умовою б), якій задовольняють праві частини рівняння (2.1).

Використовуючи вказане вище, а також властивість дельта-функції Дірака  $\delta(g(x)) = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|g'(x_k)|}$  ( $g(x_k) = 0$ ), систему рівнянь (2.2) запишемо у вигляді:

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon(v+2)sa(1, v+1, l\psi)}{2l\pi\omega(a)} \sum_{n=1} \bar{f}_0(a, \psi) \left[ \frac{\delta(\psi - \psi_{n1})}{|sa(1, v+1, l\psi_{n1})|} + \frac{\delta(\psi - \psi_{n2})}{|sa(1, v+1, l\psi_{n2})|} \right], \quad (2.3)$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) - \frac{\varepsilon(\nu+2)}{2a\omega(a)} ca(\nu+1, l, \psi) \left\{ \bar{f}(a, \psi) - \frac{\nu+2}{2l\pi} \sum_{n=1} \bar{f}_0(a, \psi) \left[ \frac{\delta(\psi - \psi_{n1})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n1})|} + \frac{\delta(\psi - \psi_{n2})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n2})|} \right] \right\}$$

Для останньої системи диференціальних рівнянь можна використати математичний апарат усереднення і привести її до стандартного вигляду:

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon(\nu+2)}{4l\pi^2} \sum_{n=1} [\bar{f}_{o1}(a_{n-1}, \psi_{n1}) + \bar{f}_{o2}(a_n, \psi_{n2})],$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) - \frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\pi} \left\{ \frac{1}{a\omega(a)} \bar{f}(a) - \frac{\nu+2}{2l\pi} \sum_{n=1} [\bar{f}_{o1}(a_{n-1}, \psi_{n1}) + \bar{f}_{o2}(a_n, \psi_{n2})] \right\} \quad (2.4)$$

де:

$$\bar{f}_{o1}(a_{n-1}, \psi_{n1}) = \frac{sa(1, \nu+1, l\psi_{n1})}{\omega(a_{n-1})} \frac{\bar{f}_0(a_{n-1}, \psi_{n1})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n1})|},$$

$$\bar{f}_{o2}(a_n, \psi_{n2}) = \frac{sa(1, \nu+1, l\psi_{n2})}{\omega(a_n)} \frac{\bar{f}_0(a_n, \psi_{n2})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n2})|},$$

$$\bar{f}(a) = \int_0^{2\pi} ca(\nu+1, l, \psi) \bar{f}(a, \psi) d\psi, \quad \bar{f}_{o1}(a_{n-1}, \psi_{n1}) = \frac{ca(\nu+1, l, \psi_{n1})}{a_{n-1}\omega(a_{n-1})} \frac{\bar{f}_0(a_{n-1}, \psi_{n1})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n1})|},$$

$$\bar{f}_{o2}(a_n, \psi_{n2}) = \frac{ca(\nu+1, l, \psi_{n2})}{a_n\omega(a_n)} \frac{\bar{f}_0(a_n, \psi_{n2})}{|sa(1, \nu+1, l\psi_{n2})|}.$$

Система диференціальних рівнянь (2.4) за своєю структурою та методами дослідження аналогічна до системи диференціальних рівнянь (1.7), тільки для розглядуваного випадку моменти дії імпульсних збурень  $t_n$  є розв'язками рівнянь  $a_{n-1}ca[\nu+1, l, l(\omega(a_{n-1})t_n + \theta)] = y_0$ .

**3. Одночастотні ("нормальні") коливання нелінійних консервативних систем із багатьма ступенями вільності під дією імпульсних збурень.** Аналітичне дослідження коливальних процесів механічних систем із багатьма ступенями вільності пов'язане зі значними труднощами у випадку, якщо вони відмінні від квазілінійних. Нижче запропоновано метод дослідження певних типів нелінійних систем із багатьма ступенями вільності, на які діють імпульсні збурення. Він базується на знаходженні частинних розв'язків вигляду "нормальних" коливань, які не відповідають системам лінеаризованих диференціальних рівнянь, але, тим не менше, їх вдається знайти у замкнутому вигляді. Такий аналітичний підхід до дослідження коливальних процесів сильно нелінійних систем з багатьма ступенями вільності є найбільш прийнятним у випадках, коли лінеаризація вихідних рівнянь є принципово недопустимою, а побудувати загальний їх розв'язок є, взагалі кажучи, задачею, яку розв'язати не вдається.

Розглянемо консервативну систему з обмеженим числом ступенів вільності. Нехай: потенціальна енергія системи являє собою близьку до одно-

рідної функцію узагальнених координат  $y_1, y_2, \dots, y_S$  із показником однорідності  $\nu + 2$  ( $S$  – число ступенів вільності системи)

$$P(y_1, y_2, \dots, y_S) = \sum c_{r_1 r_2 \dots r_S} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_S^{\nu_S} + \varepsilon F(y_1, y_2, \dots, y_S); \quad (3.1)$$

кінетична енергія – додатньо визначена квадратична форма

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S m_i \dot{y}_i^2, \quad (3.2)$$

де:  $\varepsilon F(y_1, y_2, \dots, y_S)$  – аналітична функція, яка характеризує відхилення потенціальної енергії системи від однорідної функції;  $\sum_{i=1}^n \nu_i = \nu + 2$  - показник однорідності головної частини функції  $P(y_1, y_2, \dots, y_S)$ ,  $c_{r_1 r_2 \dots r_S}$ ;  $m_i$  – сталі.

Тоді диференціальні рівняння руху системи приймають вигляд:

$$\ddot{y}_i + m_i^{-1} \nu_i \sum c_{r_1 r_2 \dots r_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_{i-1}^{\nu_{i-1}} y_i^{\nu_i-1} y_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots y_S^{\nu_S} = \mathcal{E}_i(y_1, y_2, \dots, y_S), \quad (3.3)$$

де  $f_i(y_1, y_2, \dots, y_S) = m_i^{-1} \frac{\partial F(y_1, y_2, \dots, y_S)}{\partial y_i}$ .

Вважатимемо, що на досліджувану консервативну систему, точніше кажучи на її  $j$ -у точку, діють імпульсні збурення в моменти часу  $t_n$ , а їх величина залежить від положення системи. Нехтуючи величинами порядку  $\varepsilon^2$ , диференціальні рівняння руху системи з врахуванням останнього приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i + m_i^{-1} \nu_i \sum c_{r_1 r_2 \dots r_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_{i-1}^{\nu_{i-1}} y_i^{\nu_i-1} y_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots y_S^{\nu_S} &= \mathcal{E}_i(y_1, y_2, \dots, y_S) \text{ при } i \neq j, \\ \ddot{y}_j + m_j^{-1} \nu_j \sum c_{r_1 r_2 \dots r_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_{j-1}^{\nu_{j-1}} y_j^{\nu_j} y_{j+1}^{\nu_{j+1}} \dots y_S^{\nu_S} &= \mathcal{E}_j(y_1, y_2, \dots, y_S) + \\ + \varepsilon \sum_{n=1}^N g_{jn}(y_1, y_2, \dots, y_S) \delta(t - t_n) &, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де  $\varepsilon m_j g_{jn}(y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{Sn})$  – величина імпульсного збурення, яке діє в момент часу  $t_n$ .

У сильно нелінійних консервативних системах, рух яких описується диференціальними рівняннями (3.4) при  $\varepsilon = 0$  існують одночастотні коливальні процеси, описати які можна за допомогою періодичних Атеб-функцій. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що у системі відбуваються нелінійні коливання, які співпадають за формою з першою узагальненою координатою ("модою"), тобто  $y_i = b_i y_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, S$ . Модальні сталі  $b_i$  зв'язані системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} b_i \sum \nu_i c_{r_1 r_2 \dots r_S} 1(b_2)^{\nu_2} (b_3)^{\nu_3} \dots (b_S)^{\nu_S} &= \\ = \sum \nu_i c_{r_1 r_2 \dots r_S} 1(b_2)^{\nu_2} (b_3)^{\nu_3} \dots (b_{j-1})^{\nu_{j-1}} (b_j)^{\nu_j-1} (b_{j+1})^{\nu_{j+1}} \dots (b_S)^{\nu_S} &. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отже, питання існування нормальних форм коливань у сильно нелінійних механічних системах із  $S$  ступенями вільності пов'язане із пробле-

мою існування дійсних розв'язків системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (3.5). Вказаного типу системи мають [9] у випадку цілих додатних  $\nu$  не менше ніж  $\nu + 2$  розв'язків. Таким чином, нормальні моди (форми) коливань незбуреної системи (3.1) описуються за допомогою періодичних Атеб-функцій у вигляді:

$$y_1 = aca(\nu + 1, 1, l\psi), \quad y_i = a\bar{b}_i ca(\nu + 1, 1, l\psi), \quad (3.6)$$

де:  $\psi = \omega(a)t + \theta$ ,  $a, \theta$  – сталі;  $\omega(a) = \sqrt{2^{-1}(\nu + 2)a^2}$ ,  $\bar{b}_i$  – розв'язки рівнянь (3.5).

Аналогічно як і для механічних систем із одним ступенем вільності, з (3.4), врахувавши (3.5), (3.6), отримуємо систему диференціальних рівнянь для знаходження законів зміни амплітуд і частот коливань системи у формах, які близькі до "нормальних" коливань незбуреної системи:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \varepsilon \frac{-\varepsilon}{\omega(a)} sa(1, \nu + 1, l\psi) \bar{f}_i(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi), \\ \dot{a}_j &= \varepsilon \frac{-\varepsilon}{\omega(a)} sa(1, \nu + 1, l\psi) \left[ \bar{f}_j(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) + \sum_{n=1}^N \bar{g}_{jn}(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) \delta(t - t_n) \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\dot{\psi}_i = \omega(a) - \frac{\varepsilon(\nu + 2)}{2a\omega(a)} ca(\nu + 1, 1, l\psi) \bar{f}_i(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi),$$

$$\dot{\psi}_j = \omega(a) - \frac{\varepsilon(\nu + 2)}{2a\omega(a)} ca(\nu + 1, 1, l\psi) \left[ \bar{f}_j(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) + \sum_{n=1}^N \bar{g}_{jn}(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) \delta(t - t_n) \right],$$

де:  $\bar{f}_i(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) = f_i(aca(\nu + 1, 1, l\psi), a\bar{b}_2 ca(\nu + 1, 1, l\psi), \dots, a\bar{b}_S ca(\nu + 1, 1, l\psi))$ ;  
 $\bar{g}_n(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi) = g_n(aca(\nu + 1, 1, l\psi), a\bar{b}_2 ca(\nu + 1, 1, l\psi), \dots, a\bar{b}_S ca(\nu + 1, 1, l\psi))$ .

Усереднені диференціальні рівняння, які відповідають системі (3.7) із врахуванням того, що система без дії імпульсного збурення є консервативною, приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= 0, \\ \dot{\psi}_i &= \omega(a) + \varepsilon B_i(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S), \\ \dot{a}_j &= \varepsilon \sum_{n=1}^N A_{jn}(a_{n-1}, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi_n), \\ \dot{\psi}_j &= \omega(a) + \varepsilon B_j(a, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S) + \varepsilon \sum_{n=1}^N B_{jn}(a_{n-1}, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_S, \psi_n), \end{aligned} \quad (3.8)$$

в яких праві частини визначаються та досліджуються подібним чином як і для диференціального рівняння (1.1).

У випадку дії на консервативну систему з багатьма ступенями вільності, рух якої описується автономними рівняннями (3.3) імпульсного збурення, яке залежить від положення  $j$ -ої точки системи, диференціальні рівняння, які описують закони зміни в часі амплітуди й фази коливань у формах близьких до нормальних форм коливань незбуреної системи, можна привести

також до вигляду (3.8), тільки праві частини цих рівнянь визначаються подібно як і для диференціального рівняння (2.1). Саму ж методику можна узагальнити і на деякі інші класи сильно нелінійних консервативних систем із багатьма ступенями вільності, зокрема на системи, математичними моделями руху яких є рівняння

$$\ddot{y}_i + m_i^{-1}(\nu + 2) \sum_{j=0} c_{ij} (y_i^{\nu+1} - y_j^{\nu+1}) = \mathcal{F}_i(y_1, y_2, \dots, y_S) \quad (3.9)$$

при дії на них малих імпульсних сил, що залежить від часу або положення системи. Нормальні форми коливань, які відповідають незбуреним рівнянням (3.9), можна описати також залежностями (3.6), тільки параметри  $\tilde{b}_i$  для останнього випадку є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь

$$b_i \sum_{j=0} c_{ji} (1 - b_j)^\nu = \sum_{j=0} c_{ij} (b_i - b_j)^\nu. \quad (3.10)$$

Таким чином, дослідження коливальних процесів сильно нелінійних консервативних систем з багатьма ступенями вільності, потенціальна енергія яких є близькою до однорідної функції узагальнених координат, на які діють імпульсні сили, можна проводити на основі методики, яка викладена у пп. 1, 2.

### Література

1. Гашук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с.
2. Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени. – Мат. сб., 1967. – № 2. – С. 202-208.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.П. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием// Дифференц. уравнения, 1978. – 14, № 6. – С. 1034-1045.
4. Перестюк Н.П. Периодические и почти-периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Ч.I. – К.: Наук. думка, 1984. – С. 301-304.
5. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с.
6. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції// Укр. мат. журн. – 1969. – 21, №3. – С. 325-333.
7. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
8. Сеник П.М., Сокіл Б.І. Про застосування  $\mathcal{U}$ -методи для одного класу коливних систем// Доп. АН УРСР. – 1977. – А, №1. – С. 12-16.
9. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. – М.: ГНТИ, 1939. – 237 с.

УДК 634.31

Аспір. В.В. Баріляк<sup>1</sup> – УкрДЛТУ

## АНАЛІЗ КОНСТРУКТИВНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ І КЛАСИФІКАЦІЯ ПРИВОДІВ ЛІСОВИХ МАШИН З КАНАТНОЮ ТЯГОЮ

Зроблено загальний огляд та наведено класифікації існуючих приводів вантажопідіймальних та лісотransпортних машин з канатною тягою, що застосовуються в лісовій промисловості, розглянуто окремі елементи та зроблено класифікацію приво-

<sup>1</sup> Наук. керівник: проф. М.П. Мартинців, д-р техн. наук – УкрДЛТУ