

Усуваючи з системи рівнянь (1) момент M_{36} та розв'язуючи її відносно жорсткостей c_{1n} , c_{2n} , отримаємо:

$$c_{1n} = \frac{\omega^2 (J_k \theta^2 - J_n \xi^2) + \xi \theta \omega^2 (J_n - J_k)}{\xi (\theta - \xi)}; \quad c_{2n} = \frac{J_k \theta \omega^2}{\theta - \xi}. \quad (2, 3)$$

Зазначимо, що у вирази (2, 3) для визначення жорсткостей c_{1n} , c_{2n} входять амплітуди коливань ξ , θ , які задають форму коливань двомасної механічної коливної системи з двома ступенями вільності.

Прийнявши, що плоскі пружні системи складаються з чотирьох пружних елементів, жорсткості цих пружних систем згідно [1] становитимуть:

$$c_{1n} = \left[\left(1 - \frac{2\psi}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{2\psi}{\pi} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{2G\beta h_1 b_1^3}{l_{1n}} + \frac{8EJ_{e1}}{l_{1n}} \left[\frac{3r_1^2}{l_{1n}^2} + \frac{3r_1}{l_{1n}} + 1 \right] \right]; \quad (4)$$

$$c_{2n} = \left[\left(1 - \frac{2\psi}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{2\psi}{\pi} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{2G\beta h_2 b_2^3}{l_{2n}} + \frac{8EJ_{e2}}{l_{2n}} \left[\frac{3r_2^2}{l_{2n}^2} + \frac{3r_2}{l_{2n}} + 1 \right] \right], \quad (5)$$

де $\psi \leq 90^\circ$ – кут в межах кроку розміщення пружних елементів; G – модуль пружності при крученні; E – модуль поздовжньої пружності; β – коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін $h_{1,2}$ і $b_{1,2}$ прямокутних перерізів першої та другої плоских пружних систем; J_{e1} , J_{e2} , l_{1n} , l_{2n} , r_1 , r_2 – попарно відповідно моменти інерції поперечного перерізу пружних елементів, робочі довжини пружних елементів та радіуси розташування місць кріплення центральних частин першої та другої ділянок плоскої пружної системи.

Прирівнявши попарно вирази (2), (4) та (3), (5) і враховуючи, що значення моментів інерції прямокутного перерізу відповідного пружного елемента для двох ділянок становить $J_{e1} = b_1 h_1^3 / 12$, $J_{e2} = b_2 h_2^3 / 12$, $b_{1,2} = 5h_{1,2}$, а також те, що власна частота коливань механічної коливної системи повинна дорівнювати $\omega_0 = \omega / (0.93 \dots 0.96)$ (в такому випадку резонансне налагодження становить $z = 0.93 \dots 0.96$), отримаємо вирази для знаходження h_1 , h_2 :

$$h_1 = 4 \sqrt{\frac{\omega^2 (J_k \theta^2 - J_n \xi^2) + \xi \theta \omega^2 (J_n - J_k)}{\xi (\theta - \xi) z^2 \Omega_1}}; \quad h_2 = 4 \sqrt{\frac{J_k \theta \omega^2}{(\theta - \xi) z^2 \Omega_2}}, \quad (6, 7)$$

$$\text{де } \Omega_{1,2} = \left[\left(1 - \frac{2\psi}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{2\psi}{\pi} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{250 \cdot G\beta}{l_{1,2n}} + \frac{10E}{3l_{1,2n}} \left(\frac{3r_{1,2}^2}{l_{1,2n}^2} + \frac{3r_{1,2}}{l_{1,2n}} + 1 \right) \right].$$

Приймаючи $\theta_1 = \xi$ та $\theta_2 = \theta$, згідно [2] максимальні напруження у пружних елементах при згині відповідно для першої та другої плоских пружних систем становлять:

$$\sigma_{\max 1,2} = \frac{\theta_{1,2} h_{1,2}}{l_{1,2n}} \sqrt{\left[E \left(\frac{3r_{1,2}}{l_{1,2n}} + 2 \right) \right]^2 + 400 \cdot \left(\frac{G\beta}{\alpha} \right)^2}. \quad (8)$$

Підставляючи в (8) вирази для h_1 та h_2 з (6,7), отримаємо такі остаточні формули для перевірки на міцність пружних елементів першої та другої плоских пружних систем:

$$\sigma_{\max 1} = \frac{\xi}{l_{1n}} \sqrt{\left[E \left(\frac{3r_1}{l_{1n}} + 2 \right) \right]^2 + 400 \cdot \left(\frac{G\beta}{\alpha} \right)^2} \times 4 \sqrt{\frac{\omega^2 (J_k \theta^2 - J_n \xi^2) + \xi \theta \omega^2 (J_n - J_k)}{\xi (\theta - \xi) z^2 \Omega_1}}; \quad (9)$$

$$\sigma_{\max 2} = \frac{\theta}{l_{2n}} \sqrt{\left[E \left(\frac{3r_2}{l_{2n}} + 2 \right) \right]^2 + 400 \cdot \left(\frac{G\beta}{\alpha} \right)^2} \times 4 \sqrt{\frac{J_k \theta \omega^2}{(\theta - \xi) z^2 \Omega_2}}. \quad (10)$$

Таким чином, наведений вище розрахунок плоских пружних систем на жорсткість з виведенням остаточних виразів геометричних параметрів пружних елементів дає змогу точного налагодження систем в резонанс, а проведений розрахунок на міцність дозволяє перевірити їх на здатність роботи при знакозмінних навантаженнях.

Література

1. Повідайло В.О., Ланець О.С. Розрахунок та аналіз плоскої пружної системи вібраційної машини об'ємної обробки// Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. Український міжвід. наук. – техн. зб. – Львів: НУ "Львівська політехніка", 2001, вип. 36. – С. 30-36.
2. Гаврильченко О.В., Ланець О.С. Розрахунок на жорсткість та міцність плоскої пружної системи з шістьма пружними стержнями, яка використовується у вібромашинах об'ємної обробки// Машинознавство. – 2001, №9 (51). – С. 51-55.
3. Повідайло В.А. Расчет и конструирование вибрационных питателей. – М.: Машгиз, 1962.

УДК 539.06

Доц. О.І. Думанський – УкрДЛТУ

ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КРУЧЕННЯ ПОРОЖНИСТИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ВАЛІВ (БРУСІВ)

Пропонується загальний метод дослідження напруженого стану порожнистих призматичних валів (брусів), що знаходяться під дією моменту кручення, якщо перетворююча функція поперечного перетину вала (бруса) на круг має вигляд многочлена довільного ступеня.

Doc. O.I. Dumanskiy – USUFWT

General method for the research of cavernous prismatic shafts (balks) twisting

The general method for the research of strained state of hollow prismatic shafts (balks) under the moment of rotation is proposed. It is assumed here that the transforming function of cross section from shafts (balks) to ring is presented by polynomial of random power.

У деяких механізмах, елементами яких є вали або бруси, для полегшення конструкції або виходячи з конструктивних потреб вал або брус може бути порожнистим, тобто його поперечним перерізом є двозв'язна область із зовнішнім контуром і внутрішнім отвором певної геометричної конфігурації.

Розглянемо призматичний ізотропний порожнистий вал (брус), поперечним перерізом якого є двозв'язна область із зовнішніми і внутрішніми контурами L_1 і L_2 , який перебуває під дією моменту кручення M_k . Побудуємо загальний розв'язок знаходження дотичних напружень в будь-якій точці поперечного перерізу вала та жорсткість на кручення, якщо конформно перетворююча функція побудована у вигляді полінома

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^m C_k \zeta^k \quad (1)$$

і здійснює перетворення поперечного перерізу вала на кільце $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$.

Функцію напружень $f(\zeta)$, яку задамо у вигляді

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \quad (2)$$

і вважаючи її регулярною в кільці $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$, знайдемо з граничних умов [1]

$$f(\sigma) - \overline{f(\sigma)} = i\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)} + iC_2 \quad \text{на } \gamma_2; \quad (3)$$

$$f(\rho_1\sigma) - \overline{f(\rho_1\sigma)} = i\omega(\rho_1\sigma)\overline{\omega(\rho_1\sigma)} \quad \text{на } \gamma_1$$

де γ_1, γ_2 – відповідно внутрішня і зовнішня границі кільця $\rho_1 \leq |\zeta| \leq 1$.

Умови (3) можна записати в компактному вигляді:

$$f(\sigma_i) - \overline{f(\sigma_i)} = i\omega(\sigma_i)\overline{\omega(\sigma_i)} + iC_i \quad \text{на } \gamma_i (i=1,2), \quad (4)$$

де: $\sigma_1 = \rho_1\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma = e^{i\theta}$.

Компоненти дотичних напружень, що діють в кожній точці поперечного перерізу вала, знаходимо згідно з формулами:

$$\tau_\rho - i\tau_\theta = \frac{\mu\tau}{\rho_i|\omega'(\zeta)|} [f'(\zeta) - i\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}] \quad i=1,2, \quad (5)$$

де: μ – пружна постійна Ляме, τ – кут закручування стрижня на одиницю довжини і дорівнює $\tau = M_k/D$, M_k – крутний момент, D – жорсткість вала (бруса) на кручення $D = \mu(I_0 + D_0)$,

$$I_0 = \frac{1}{4i} \int_{\gamma_1} [\overline{\omega(\zeta)}]^2 \omega(\zeta) d\omega(\zeta), \quad (6)$$

$$D_0 = -\frac{1}{4i} \int_{\gamma_1} [f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}] d[\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}] \quad i=1,2$$

Задамо праву частину умови (4) у вигляді:

$$i\omega(\sigma_i)\overline{\omega(\frac{1}{\sigma_i})} = i \sum_{k=-m}^{m-1} C_k \rho_i^k \sigma_i^k \cdot \sum_{k=-m}^{m-1} \overline{C_k} \rho_i^k \sigma_i^{-k} =$$

$$= \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} P_{ki}(\rho, C_k) \sigma^k \quad (i=1,2); \quad (7)$$

де

$$P_{k,2} = \sum_{r=-m}^{m-1-k} C_{k+r} \overline{C_r} \quad (k=0, \dots, 2m-1), \quad (8)$$

$$P_{k,1} = \sum_{r=-m}^{m-1-k} C_{k+r} \overline{C_r} \rho_1^{2r-k} \quad (k=0, \dots, 2m-1).$$

Підставивши (2) і (7) в (4), отримаємо:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sigma_i^k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{a_k} \overline{\sigma_i^k} = i \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} P_{k,i} \sigma_i^k + iC_i \quad \text{на } \gamma_i \quad (i=1,2) \quad (9)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях σ і поклавши одну із постійних C_i , наприклад $C_1=0$, з умов (8) знаходимо:

$$a_0 - \overline{a_0} = iP_{0,1}; \quad a_0 - \overline{a_0} = iP_{0,2} + iC_2;$$

$$a_k \rho_1^k - \overline{a_{-k}} \rho_1^{-k} = iP_{k,1}, \quad k=1, \dots, 2m-1;$$

$$a_k - \overline{a_{-k}} = iP_{k,2},$$

$$a_k = a_{-k} = 0 \quad \text{при } k \geq 2m.$$

Таким чином, шукана функція $f(\zeta)$ має вигляд:

$$f(\zeta) = \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} a_k \zeta^k, \quad (10)$$

де

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} a_0 &= \frac{1}{2} D_{0,1}; \quad C_2 = D_{0,1} - D_{0,2}; \\ a_k &= i \left[D_{k,2} + \frac{D_{k,2} \rho_1^k - D_{k,1}}{\rho_1^{-k} - \rho_1^k} \right]; \\ a_{-k} &= i \frac{\overline{D_{k,1}} - \overline{D_{k,2}} \rho_1^k}{\rho_1^{-k} - \rho_1^k} \quad (k=1, \dots, 2m-1), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Знаходимо жорсткість і напруження в довільній точці поперечного перерізу вала згідно формул з (5) і (6), з урахуванням значень (11).

Формули розподілу дотичних (крутних) напружень в точках внутрішнього і зовнішнього контурів поперечного перерізу вала мають дещо простіший вигляд, а саме:

- на внутрішньому контурі, на L_2 (при $\rho=\rho_2=1$)

$$\tau_\rho = 0, \tau_\theta = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\sigma)|} \left[B_{0,2} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2m-1} \left(k \frac{a_{-k}}{i} + B_{-k,2} \right) \sigma^{-k} \right]; \quad (12)$$

- на зовнішньому контурі на L_1 (при $\rho=\rho_1$)

$$\tau_\rho = 0, \tau_\theta = \frac{\mu\tau}{\rho_1|\omega'(\rho_1\sigma)|} \left[B_{0,1} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{2m-1} \left(k \frac{a_{-k}}{i} \rho_1^{-k} + B_{-k,1} \right) \sigma^{-k} \right], \quad (13)$$

де

$$\left. \begin{aligned} B_{-k,i} &= \sum_{r=-m}^{m-1-k} r C_r \bar{C}_{k+r} \rho_i^{2r+k} \quad (k=0, \dots, 2m-1) \\ B_{k,i} &= k P_{k,i} + B_{-k,i} \quad (k=0, \dots, 2m-1) \end{aligned} \right\} \quad i=1,2 \quad (14)$$

Таким чином, аналогічно як і при крученні валів суцільного поперечного перерізу [2], розв'язок задачі не є складним, а основні труднощі задачі зводяться до побудови конформно перетворюючої функції, яка дозволяла б перетворювати заданий поперечний переріз вала на область кругового кільця.

Література

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Думанський О.І. Загальний метод дослідження кручення суцільних призматичних валів (брусів) // Науковий вісник: Збірн. наук.-техн. праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2002, вип. 12.5. – С. 170-174.

УДК 534.111

Доц. Б.І. Сокіл, д-р. техн. наук;

інж. М.Б. Сокіл – НУ "Львівська політехніка"

ПЕРІОДИЧНІ АТЕБ-ФУНКЦІЇ У ДОСЛІДЖЕННІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Розв'язуються задачі про аналітичне дослідження коливальних процесів сильно нелінійних систем із зосередженими масами і розподіленими параметрами на які діють різної природи імпульсні збурення. В основу досліджень покладено: а) принцип одночастотності коливальності; б) ідею використання періодичних Атеб-функцій для описання коливальних процесів систем із степеневією нелінійністю; в) узагальнення, на основі вказаних вище функцій, методу усереднення на нові класи нелінійних систем.

Ass. Prof. B.I. Sokil, eng. M.B. Sokil – NU "Lviv'ska Politekhnic"

Periodic Ateb-functions in research pulse indignation nonlinear systems

The tasks of analytical research of oscillatory processes of strongly nonlinear systems with the concentrated weights and allocated parameters under influence of a different nature pulse indignations are solved. In a basis of researches are: a) a principle of one-rate fluctuations; b) idea of periodic Ateb-functions use for the description of oscillatory processes of systems with nonlinear; c) application with use of the mentioned above functions, asymptotic method on new classes of nonlinear systems.

Предметом досліджень, є так звані системи із імпульсними збуреннями. Імпульсні збурення мають різну природу і можуть діяти як у фіксовані моменти часу, так і при проходженні системи конкретні положення. Необхідність їх розгляду пов'язана із багатьма явищами та процесами, що мають місце у фізиці, техніці, біології і, які у своїй еволюції характеризуються короткою тривалістю дії (удар, миттєвий поштовх). Останнє дозволяє, в багатьох випадках, нехтувати тривалістю його дії і при описі процесу математичними співвідношеннями (моделями) вважати дію імпульсного збурення – миттєвою.

Поряд з тим математичними моделями систем із імпульсними збуреннями можуть бути суцільні одно- чи багатовимірні тіла, які в окремих поло-

женнях містять малі за розмірами включення з відмінними фізико-механічними властивостями. Дослідження коливальних процесів таких дискретних чи дискретно-неперервних систем за лінійної чи квазілінійної їх математичних моделей проводились, наприклад, в [1-7]. Нижче, використовуючи метод усереднення [8] у поєднанні із періодичними Атеб-функціями [9], розглянемо математичні моделі більш складних систем – систем із сильною нелінійністю.

1. Сильно нелінійні моделі коливальних процесів дискретних систем з імпульсним збуренням

1.1. Дискретні нелінійні системи з імпульсним збуренням, яке залежить від часу. Математичною моделлю сильно нелінійних коливальних систем з одним ступенем вільності при імпульсному збуренні, що діє у фіксовані моменти часу t_n ($n=1,2,\dots,N$; $t_1 > 0$; $t_{n+1} > t_n$) і величина котрого значно менша від нелінійної відновлюючої сили, може бути звичайне нелінійне диференціальне рівняння

$$\ddot{y} + \alpha^2 y^{\nu+1} = \varepsilon f(y, \dot{y}) + \varepsilon \sum_{n=1}^N f_n(y, \dot{y}) \delta(t - t_n), \quad (1.1)$$

в якому α і ν -сталі, причому, $\nu+1 = (2s_1+1)(2s_2+1)^{-1}$, $s_i = 0,1,2,\dots$; $i=1,2$; $\varepsilon f_n(y(t_n), \dot{y}(t_n))$ – величина імпульсного збурення, що діє у моменти часу t_n ; $f(y, \dot{y})$ як і $f_n(y, \dot{y})$ -аналітичні функції своїх аргументів; $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака.

Під розв'язком рівняння (1.1) будемо розуміти кусково-неперервну функцію $\chi(t)$ з розривами першого роду при значеннях незалежної змінної t , що відповідають моментам дії на систему імпульсного збурення, тобто

$$\ddot{\chi}(t) + \alpha^2 \chi(t) = \varepsilon f(\chi(t), \dot{\chi}(t)) \quad (1.2)$$

при $t \neq t_n$ і умовам розриву у вказані вище моменти часу

$$\chi(t_n+0) - \chi(t_n-0) = \varepsilon f_n(\chi(t_n), \dot{\chi}(t_n)). \quad (1.3)$$

Для знаходження функції, яка задовольняє вказані вище умови (є розв'язком нелінійного рівняння (1.1)), розглянемо відповідне йому незбурене, тобто рівняння (1.1) при $\varepsilon = 0$

$$\ddot{y} + \alpha^2 y^{\nu+1} = 0. \quad (1.4)$$

Періодичні розв'язки цього нелінійного рівняння виражаються через Атеб-функції у вигляді

$$y(t) = a \begin{cases} ca(\nu+1, l, \psi), \\ sa(\nu+1, l, \psi), \end{cases} \quad (1.5)$$

де стала l визначається із умови 2π -періодичності по ψ використаних Атеб-функцій: $l = \pi^{-1} \Pi(1, \nu+1)$; $\Pi(1, \nu+1) = \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma^{-1}(\frac{\nu}{2} + (\nu+2)^{-1})$ – їх півперіод, а параметри a і ψ (амплітуда і фаза коливальності) зв'язані співвідношенням

$$\psi = \alpha \pi \sqrt{\frac{\nu+2}{2}} \Pi^{-1}(1, \nu+1) a^{\frac{\nu}{2}} t + \theta \quad (\theta - \text{довільна стала}).$$